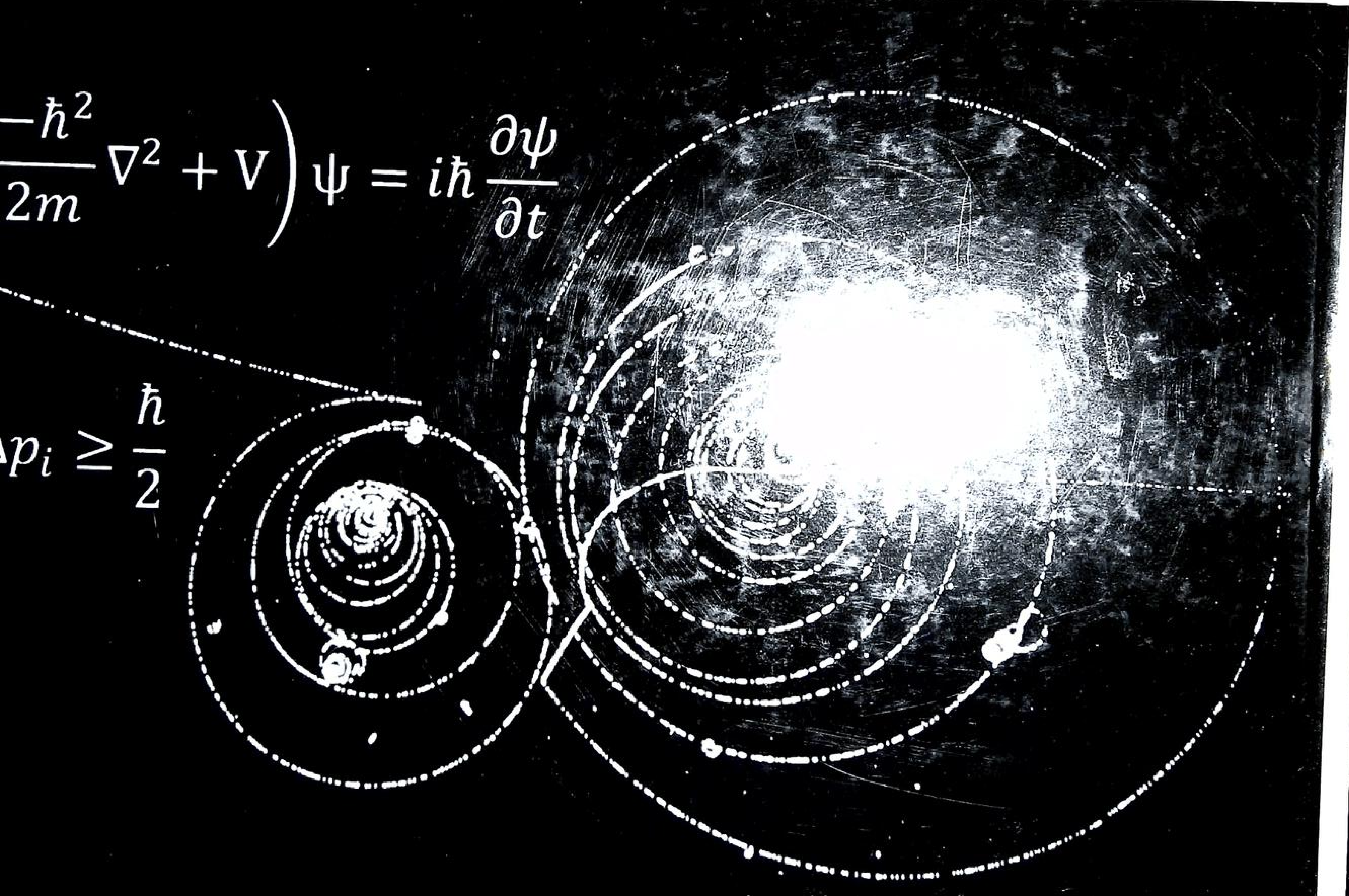
محمد البغدادي

# أسس الفيزياء المعاصرة




## المجلد الرابع

## الميكانيك الكمومي

محمد البغدادي

# أسس الفيزياء المعاصرة

## المجلد الرابع

## الميكانيك الكمومي

**أسس الفيزياء المعاصرة**

المجلد الرابع: الميكانيك الكمومي

المؤلف: محمد البغدادي

الطبعة: الأولى 2015

الناشر: طوب برس للطباعة والنشر والتوزيع

رقم الإيداع القانوني: 2016MO0156

ردمك: 978-9954-594-46-9

الطبع: طوب برس - الرباط

هذه لغتي، ومعجزتي عصا سحري
حدائق بابلي ومسلتي، وهويتي الأولى
معدني الصقيل

محمود درويش

"لم يبد علماؤنا رغبة قوية لحماية اللغة الألمانية، بعضهم لأنهم يظنون فعلاً أنه لا يمكن لباس الحكمة إلا بلباس لاتيني أو يوناني، والبعض الآخر لأنهم يخشون أن يكتشف العالم جهلهم الذي يخبئونه الآن خلف قناع من الكلمات الكبيرة... لقد تركت الأمة بعيدة عن المعرفة".

لايبنيز (1646–1716)
مؤسس حساب التفاضل

# مقدمة الكتاب

يعترض تعليم العلوم باللغة العربية مشاكل عديدة، لعل أهمها افتقار اللغة العربية إلى مراجع يستطيع الطالب استشارتها عندما يجد صعوبة ما في فهم ما بين يديه من أمال أو كتب تغطي أحد المقررات أو عندما يريد تجاوز هذه الأمالي والكتب والحصول على بعض الأجوبة للأسئلة العديدة التي يطرحها على نفسه والتي لا يمكن إلا للمرجع أن يضعها بين يديه أو عندما يرغب في التوسع في المعرفة. والمشكلة الهامة الثانية هي عدم وجود مقابل واحد متفق عليه للمصطلح العلمي الأجنبي بين مختلف البلدان العربية أو بين الجامعيين في قطر واحد أو المنتمين إلى أقسام علمية متقاربة كالفيزياء والرياضيات بل وبين العاملين في القسم الواحد.

ونحن نود في هذا الكتاب إعطاء صورة واضحة عميقة وشاملة للأسس التي تقوم عليها الفيزياء وتغطية المواضيع التي نعتقد أن على الفيزيائي استيعابها في المراحل الجامعية الأولى – لنقل سنوات الدراسة الأربعة أو الخمسة الأولى– سواء توقف عن الدراسة بعدها أو تابعها. فقد حاولنا للوصول إلى هذه الغاية أخذ أمرين بعين الاعتبار، أولهما ضرورة الانطلاق من المفاهيم والمبادئ كما يعيها الفيزيائيون المعاصرون ومن الأهداف التي يضعها مختلف الباحثين نصب أعينهم، لما يوفر ذلك من وضوح في الرؤية واختصار للوقت ومن فعالية لا يمكن للعرض التاريخي أن يوفرها بأي حال من الأحوال. وثانيهما ملاءمة هذه الضرورة مع المقتضيات التربوية في التسلسل من الأسهل إلى الأصعب وبالتالي مراعاة تسلسل البرامج المتبع في أغلب الجامعات إلى أبعد حد ممكن.

وهكذا فإن الفرضية الذرية مثلاً هي من أهم المفاهيم الأساسية في فيزياء اليوم : إن بنية المادة هي بنية غير متصلة ولا نتصور هذه المادة إلا على شكل حبيبات سواء كانت هذه الحبيبات ذرات أو جزيئات أو نويات؛ أو جسيمات تتكون منها هذه الأنواع الثلاثة نسميها جسيمات أولية. ولهذا فقد انطلقنا من هذا المفهوم لشرح مختلف الظواهر الفيزيائية بما فيها الظواهر الجهرية. ثم إن مفهوم المادة، كيانها، مرتبط بمفهوم المكان والزمان. ولهذا فقد تعرضنا بالتفصيل وبالترتيب إلى مفهوم الفضاء –المكان– الخاوي بمعزل عن مفهوم المادة وعن مفهوم الزمان وبنينا الميكانيك النيوتوني التقليدي وانتقلنا بعد ذلك إلى مفهوم للمكان متحد مع مفهوم الزمان وبنينا نظرية النسبية الخاصة التي ارتبط اسمها باسم آنشتاين وأخيراً إلى هذه المفاهيم مرتبطة ببعضها كلها معاً لإعطاء فكرة عن نظرية النسبية العامة التي وضعها آنشتاين.

وقد بيّنا في دراسة مختلف فروع الفيزياء أهمية المبادئ التي يبتكرها الفكر الفيزيائي الخلاق لفهم وتفسير الظواهر الطبيعية والتنبؤ بحدوث ظواهر فيزيائية جديدة وتوحيد ظواهر، متباينة للوهلة الأولى، كالكهربائية والمغنطيسية والضوء مثلاً في نظرية واحدة تعبر عنها أربع معادلات رياضية هي مبادئ الكهرطيسية التي وضعها ماكسويل في القرن التاسع عشر. وأوضحنا أن قبول المبادئ وبقاءها لا ينجم عن بساطتها أو جمال عبارتها الرياضية مهما كان لهاتين الصفتين من أثر وإنما لتطابق النتائج المترتبة عليها مع الواقع التجريبي.

# مقدمة الكتاب

يعترض تعليم العلوم باللغة العربية مشاكل عديدة، لعل أهمها افتقار اللغة العربية إلى مراجع يستطيع الطالب استشارتها عندما يجد صعوبة ما في فهم ما بين يديه من أمال أو كتب تغطي أحد المقررات أو عندما يريد تجاوز هذه الأمالي والكتب والحصول على بعض الأجوبة للأسئلة العديدة التي يطرحها على نفسه والتي لا يمكن إلا للمرجع أن يضعها بين يديه أو عندما يرغب في التوسع في المعرفة. والمشكلة الهامة الثانية هي عدم وجود مقابل واحد متفق عليه للمصطلح العلمي الأجنبي بين مختلف البلدان العربية أو بين الجامعيين في قطر واحد أو المنتمين إلى أقسام علمية متقاربة كالفيزياء والرياضيات بل وبين العاملين في القسم الواحد.

ونحن نود في هذا الكتاب إعطاء صورة واضحة عميقة وشاملة للأسس التي تقوم عليها الفيزياء وتغطية المواضيع التي نعتقد أن على الفيزيائي استيعابها في المراحل الجامعية الأولى – لنقل سنوات الدراسة الأربعة أو الخمسة الأولى– سواء توقف عن الدراسة بعدها أو تابعها. فقد حاولنا للوصول إلى هذه الغاية أخذ أمرين بعين الاعتبار، أولهما ضرورة الانطلاق من المفاهيم والمبادئ كما يعيها الفيزيائيون المعاصرون ومن الأهداف التي يضعها مختلف الباحثين نصب أعينهم، لما يوفر ذلك من وضوح في الرؤية واختصار للوقت ومن فعالية لا يمكن للعرض التاريخي أن يوفرها بأي حال من الأحوال. وثانيهما ملاءمة هذه الضرورة مع المقتضيات التربوية في التسلسل من الأسهل إلى الأصعب وبالتالي مراعاة تسلسل البرامج المتبع في أغلب الجامعات إلى أبعد حد ممكن.

وهكذا فإن الفرضية الذرية مثلاً هي من أهم المفاهيم الأساسية في فيزياء اليوم : إن بنية المادة هي بنية غير متصلة ولا نتصور هذه المادة إلا على شكل حبيبات سواء كانت هذه الحبيبات ذرات أو جزيئات أو نويات؛ أو جسيمات تتكون منها هذه الأنواع الثلاثة نسميها جسيمات أولية. ولهذا فقد انطلقنا من هذا المفهوم لشرح مختلف الظواهر الفيزيائية بما فيها الظواهر الجهرية. ثم إن مفهوم المادة، كيانها، مرتبط بمفهوم المكان والزمان. ولهذا فقد تعرضنا بالتفصيل وبالترتيب إلى مفهوم الفضاء –المكان– الخاوي بمعزل عن مفهوم المادة وعن مفهوم الزمان وبنينا الميكانيك النيوتوني التقليدي وانتقلنا بعد ذلك إلى مفهوم المكان متحد مع مفهوم الزمان وبنينا نظرية النسبية الخاصة التي ارتبط اسمها باسم آنشتاين وأخيراً إلى هذه المفاهيم مرتبطة ببعضها كلها معاً لإعطاء فكرة عن نظرية النسبية العامة التي وضعها آنشتاين.

وقد بيّنا في دراسة مختلف فروع الفيزياء أهمية المبادئ التي يبتكرها الفكر الفيزيائي الخلاق لفهم وتفسير الظواهر الطبيعية والتنبؤ بحدوث ظواهر فيزيائية جديدة وتوحيد ظواهر، متباينة للوهلة الأولى، كالكهربائية والمغنطيسية والضوء مثلاً في نظرية واحدة تعبر عنها أربع معادلات رياضية هي مبادئ الكهرطيسية التي وضعها ماكسويل في القرن التاسع عشر. وأوضحنا أن قبول المبادئ وبقاءها لا ينجم عن بساطتها أو جمال عبارتها الرياضية مهما كان لهاتين الصفتين من أثر وإنما لتطابق النتائج المترتبة عليها مع الواقع التجريبي.

فالفيزياء علم تجريبي قبل كل شيء والتجربة وحدها هي التي تقرر الحقيقة أي أن معرفة الواقع تبدأ بالتجربة وتنتهي بها. وهكذا ولما كانت المبادئ هي نتاج الفكر والخيال الإنساني، تستوحي التجربة أحياناً ولكنها لا تستخلص منها، فهي لا تتصف بالأزلية ولا تصلح في كل الأحوال. إن المغامرة الفيزيائية تسعى إلى الوصول إلى المبادئ الأكثر شمولية المفسرة لأكبر عدد ممكن من الحادثات والموحدة لمختلف فروع الفيزياء.

وقد آلينا جهداً إعطاء صورة متسعة، متكاملة منطقياً، للنظريات التي عالجناها وتجنبنا وسعنا العروض الوصفية العقيمة التي تعيق التعليم العالي والتي لا تليق به في نظرنا وحاولنا الإحاطة بدقة بمختلف جوانب المواضيع المطروقة. وقد سمح لنا تجنب التكرار الناتج عن الانتقال من العرض الوصفي إلى العرض الرياضي استنفاد الموضوع وتكريس حيز أكبر للغة الوحيدة التي يمكن أن تصف الطبيعة وتصقُلها ونعني بذلك الرياضيات.

إننا على وعي تام بما يترتب على عرض الفيزياء على هذا الشكل : مبادئ مصاغة بقالب رياضي يزداد تعقيداً ويبتعد عن الحدس مع تطور الفيزياء وتعمقها في بنية المادة وبنية المكان والزمان، وقوانين -نظريات ودعاوى وقضايا رياضية – تنتج عنها منطقياً مما يحول الفيزياء إلى رياضيات من حيث كونها تقوم على دراسة بنى معينة – معرفة بإعطاء علاقات تركيب بين عناصر مجموعة ما – فهي فيزياء البنى بقدر كون الرياضيات المعاصرة رياضيات البنى. ولكن لم لا؟ ألا تهدف الفيزياء فيما تهدف إليه إلى الوحدة مع الهندسة وما هي الهندسة؟ يقول آنشتاين "تبقى الهندسة علماً رياضياً مادام استنتاج النظريات من المصادرة (الموضوعة) مسألة منطقية صرفة ولكنها في الوقت نفسه علم فيزيائي بقدر ما تحوى مصادراتها على مقولات تخص الأشياء الطبيعية ولا يمكن التحقق منها إلا بالتجربة. وهكذا فإن المحاذير المترتبة على العرض الموضوعاتي (المصادراتي) Axiomatic للفيزياء تزول إذا منحت الأشغال المخبرية والتطبيقية أهمية خاصة، إضافة إلى دورها المألوف في تعلم العلوم الطبيعية والتعامل معها. فالتجربة وحدها هي التي ترفع عن الفيزياء الموضوعاتية كل طابع مسلماتي ودوغماتي. كما أن الإشارة إلى تطور الأفكار في الفيزياء من آن إلى آخر وإعطاء الخطوط العريضة للطريق المتعرج والمتقلب الذي اتبعته تسهم – بغض النظر عن أهميتها التاريخية – في إلقاء الأضواء على المحتوى الحديث للمبادئ وفي تجنب الأخطار الناجمة عن الطريقة التي اتبعناها.

لقد قسمنا هذا الكتاب إلى مجلدات خمسة :

I– الميكانيك التقليدي النيوتوني والنسبوي

II– الميكانيك الإحصائي والترموديناميك

III– الكهرطيسية والضوء

IV– ميكانيك الكم

V– الفيزياء الإحصائية

ويتضمن محتوى هذه المجلدات المواد كما درسناها خلال سنوات عديدة تتجاوز العقدين في جامعتي الرباط ودمشق وغيرهما في المرحلتين الجامعيتين الأوليين وقسماً طفيفاً مما درسناه في المرحلة بعد

الجامعية. ونحن وإن لم نعتمد مصدراً معيناً فإننا لا ندعي الإبداع أو التجديد اللهم إلا فيما يتعلق بالأخذ بيد القارئ المبتدئ والوصول به إلى عمق المفاهيم والقوانين الفيزيائية المعروفة في مختلف الفروع من وجهة نظر تؤمن بوحدة الفيزياء وبوحدة طريقة دراستها.

ولقد طمحنا إلى إصدار هذا الكتاب إن أمكن بلغتين : العربية والفرنسية أو العربية والإنكليزية حتى يعتاد القارئ العربي ذو الثقافة المزدوجة التعامل العلمي مع لغته العربية ولغة التدريس الأجنبية في بلده في آن واحد. وأخيراً فإن المراجع التي عدنا إليها غالباً هي :

1- سلسلة الفيزياء النظرية للانداو وليفشيتز بأجزائها التسعة المترجمة عن الروسية إلى الفرنسية والإنكليزية والألمانية.

2- دروس الفيزياء النظرية لسومرفلد بأجزائها الستة وهي مترجمة عن الألمانية إلى الإنكليزية ويتجاوز محتوى هاتين السلسلتين محتوى كتابنا بكثير.

3- محاضرات فاينمان في الفيزياء بثلاثة أجزاء وهي مترجمة عن الإنكليزية إلى الفرنسية والعربية.

4- دروس الفيزياء لجامعة بيركلي بخمسة أجزاء وهي أيضاً مترجمة إلى الفرنسية.

يغطي المرجعان الأخيران برامج السنتين الأولى والثانية في جامعات الولايات المتحدة ولكنهما يبقيان، وخاصة الأول منهما – محاضرات فاينمان – أفضل ما يمكن أن ينصح الفيزيائي مدرساً وطالباً بقراءته.

لقد قسمنا كل مجلد إلى فصول يتألف كل منها من فقرات مرقمة بعدد بدءاً من الواحد ومن أرقام – تحت فقرات – مرقمة بعددين أولهما يدل على الفقرة وثانيهما إلى تحت الفقرة أما العلاقات فيشار إليها، في الفصل، برقمين أولهما (من اليسار) رقم الفقرة وثانيهما رقم العلاقة في الفقرة المذكورة وبثلاثة أرقام عندما لا تقع العلاقة في الفصل المذكور وهكذا فإن (4.2.5) تعنى العلاقة رقم 5 في الفقرة الثانية من الفصل الرابع. ونشير إلى العلاقة بأربعة أرقام أولها روماني I، II، III، IV، V، عندما لا تقع العلاقة في المجلد المذكور.

****

أود أولا وقبل كل شيء أن أوجه شكري وامتناني للسيد عبد الإله بن كيران فلولا مبادرته لما تم نشر هذا الكتاب بالمغرب.

كما أود أن أعبر عن شكري للسيدة بشرى حسني – وكانت قد عملت معي في مختبر الفيزياء النظرية – للمجهود الذي بذلته لفك رموز كتابتي في هذا الكتاب وفي مؤلفات أخرى، ولعلو باعها في التنقل بين اللغة العربية واللغات الأوربية التي كتبت بها؛ لا أعرف غيرها قادرا على القيام بهذا العمل بنفس الهدوء والصبر الذي تتمتع بهما.

وأود أخيرا التعبير عن خالص الشكر لمؤسسة طوب بريس لقبولها نشر هذا الكتاب ولعنايتها بإخراجه على الشكل الذي هو عليه.

# مقدمة

إن ميكانيك الكم هو ميكانيك الأجسام المجهرية بامتياز، الذرة ومكوناتها، النواة والإلكترونات، التي يستحيل رؤيتها بالعين المجردة. تخضع هذه الأجسام لقوانين تختلف اختلافاً جذرياً عن القوانين المنظمة لحركة الأجسام الجهرية التي درسناها في الميكانيك التقليدي، إذ تزول في الميكانيك الجديد مفاهيم عديدة، على رأسها مفهوم المسار، لتحل محلها مفاهيم أخرى لا تقوم على الحواس والحدس ولا يمكن بالتالي تقبلها بسهولة؛ وتأخذ المقادير الفيزيائية فيه قيماً منفصلة على خلاف القيم المتصلة التي اعتدنا عليها في الفيزياء التقليدية. وهذا ما يفسر المخاض العسير والطويل الذي دام طيلة الربع الأول من القرن الماضي لنشوء ميكانيك الكم كنظرية فيزيائية متسقة لا تناقض فيها. تكرس كتب عديدة بعض فصولها لدراسة مرحلة المخاض هذه فتعرض ما افترضه فيزيائيو هذه الحقبة المبدعون وما ابتكروه من طرق للتلاؤم مع النتائج التجريبية. لكننا فضلنا القفز على هذه الحقبة التاريخية الغنية واستوحاء مبادئ الميكانيك الكمومي من الواقع الفيزيائي – استقرار ذرة الهدروجين – المتناقض مع الفيزياء التقليدية. عرضنا هذه المبادئ وعبرنا عنها رياضياً في الفصل الأول وبينا أن ثابتة بلانك – الفعل h – هي التي تعين الحد الفاصل بين النظرية الكمومية والنظرية التقليدية. فعندما تكون الأفعال بحدود h فتعالج كمومياً وعندما تكون كبيرة جداً أمامها فتعالج تقليدياً؛ وذلك على غرار سرعة الضوء C التي تعين الحد الفاصل بين الميكانيك التقليدي والميكانيك النسبوي، ميكانيك الأجسام التي تقارب سرعتها سرعة الضوء. إلا أن السؤال يبقى مطروحاً : هل تنطبق قوانين الميكانيك الكمومي على كل الأجسام الجهرية والمجهرية رغم تخفيها في الحالات الجهرية ؟ نظرنا في دراسة مسألة القياس –التفاعل بين جهاز القياس الجهري والنظمة الكمومية المجهرية– إلى جهاز القياس كنظمة كمومية وألمحنا إلى التفاعل مع المحيط المعبر عنه بالتشابك الذي يثبت استمرار السلوك الكمومي في الأبعاد الجهرية ويفتح آفاق بحث بعيدة لم تتبلور بعد في نظرية متكاملة.

طبقنا في الفصل الثاني هذه المبادئ على حالات خاصة يسهل فيها حل معادلة شرودينغر بمتغير واحد، هضبة الكمون وبئره والهزاز التوافقي الذي عالجناه بطريقتي شردوينغر وهايزنبرغ ودرسنا في الفصل الثالث على وجه الخصوص ذرة الهدروجين وقيم الطاقة التي تأخذها. ميزنا، من جهة، بين نوعين من العزوم الزاوية، العزم الناتج عن حركة الإلكترون حول النواة، المسمى بالعزم المداري وإن لم يكن للمدار معنى في ميكانيك الكم، والعزم الصميمي (السبين)المستقل عن الحركة. ولكننا جمعنا بينهما، من جهة أخرى، كمولدات تمثيل زمرة الدورانات في فضاء متجهات الحالة تحقق نفس علاقات التبادل التي تحققها مولدات هذه الزمرة. أتاح ذلك لنا استنباط العبارات التفاضلية للعزم الزاوي المداري بشكل مستقل عن مبدأ التقابل الذي يعرف هذا العزم كجداء متجهي للوضع بالاندفاع رغم أنه يستحيل معرفة هذين المقدارين في

# مقدمة

إن ميكانيك الكم هو ميكانيك الأجسام المجهرية بامتياز، الذرة ومكوناتها، النواة والإلكترونات، التي يستحيل رؤيتها بالعين المجردة. تخضع هذه الأجسام لقوانين تختلف اختلافاً جذرياً عن القوانين المنظمة لحركة الأجسام الجهرية التي درسناها في الميكانيك التقليدي، إذ تزول في الميكانيك الجديد مفاهيم عديدة، على رأسها مفهوم المسار، لتحل محلها مفاهيم أخرى لا تقوم على الحواس والحدس ولا يمكن بالتالي تقبلها بسهولة؛ وتأخذ المقادير الفيزيائية فيه قيماً منفصلة على خلاف القيم المتصلة التي اعتدنا عليها في الفيزياء التقليدية. وهذا ما يفسر المخاض العسير والطويل الذي دام طيلة الربع الأول من القرن الماضي لنشوء ميكانيك الكم كنظرية فيزيائية متسقة لا تناقض فيها. تكرس كتب عديدة بعض فصولها لدراسة مرحلة المخاض هذه فتعرض ما افترضه فيزيائيو هذه الحقبة المبدعون وما ابتكروه من طرق للتلاؤم مع النتائج التجريبية. لكننا فضلنا القفز على هذه الحقبة التاريخية الغنية واستوحاء مبادئ الميكانيك الكمومي من الواقع الفيزيائي – استقرار ذرة الهدروجين – المتناقض مع الفيزياء التقليدية. عرضنا هذه المبادئ وعبرنا عنها رياضياً في الفصل الأول وبينا أن ثابتة بلانك – الفعل h – هي التي تعين الحد الفاصل بين النظرية الكمومية والنظرية التقليدية. فعندما تكون الأفعال بحدود h فتعالج كمومياً وعندما تكون كبيرة جداً أمامها فتعالج تقليدياً؛ وذلك على غرار سرعة الضوء C التي تعين الحد الفاصل بين الميكانيك التقليدي والميكانيك النسبوي، ميكانيك الأجسام التي تقارب سرعتها سرعة الضوء. إلا أن السؤال يبقى مطروحاً : هل تنطبق قوانين الميكانيك الكمومي على كل الأجسام الجهرية والمجهرية رغم تخفيها في الحالات الجهرية ؟ نظرنا في دراسة مسألة القياس –التفاعل بين جهاز القياس الجهري والنظمة الكمومية المجهرية– إلى جهاز القياس كنظمة كمومية وألمحنا إلى التفاعل مع المحيط المعبر عنه بالتشابك الذي يثبت استمرار السلوك الكمومي في الأبعاد الجهرية ويفتح آفاق بحث بعيدة لم تتبلور بعد في نظرية متكاملة.

طبقنا في الفصل الثاني هذه المبادئ على حالات خاصة يسهل فيها حل معادلة شرودينغر بمتغير واحد، هضبة الكمون وبئره والهزاز التوافقي الذي عالجناه بطريقتي شردوينغر وهايزنبرغ ودرسنا في الفصل الثالث على وجه الخصوص ذرة الهدروجين وقيم الطاقة التي تأخذها. ميزنا، من جهة، بين نوعين من العزوم الزاوية، العزم الناتج عن حركة الإلكترون حول النواة، المسمى بالعزم المداري وإن لم يكن للمدار معنى في ميكانيك الكم، والعزم الصميمي (السبين)المستقل عن الحركة. ولكننا جمعنا بينهما، من جهة أخرى، كمولدات تمثيل زمرة الدورانات في فضاء متجهات الحالة تحقق نفس علاقات التبادل التي تحققها مولدات هذه الزمرة. أتاح ذلك لنا استنباط العبارات التفاضلية للعزم الزاوي المداري بشكل مستقل عن مبدأ التقابل الذي يعرف هذا العزم كجداء متجهي للوضع بالاندفاع رغم أنه يستحيل معرفة هذين المقدارين في

آن واحد. استخلصنا قوانين انحفاظ الاندفاع الخطي والعزم الزاوي المعبر عنهما بانعدام المبادل مع الهاميلتوني من خواص الفضاء الإقليدي المتجانس والمتناحي. كما استخلصنا ثباتها في الميكانيك التقليدي من ذات الخواص. هذا يعني أننا أعرنا اهتماماً خاصاً لنظرية الزمر وتمثيلها، لزمرة الدورانات وزمرة لورانتس بعدها، وأعدنا نسخ ملحقي الفصلين الخامس والسابع من كتاب الميكانيك في آخر هذا المجلد كي يبقى العرض متكاملاً.

عالجنا في الفصل الرابع نظرية الاضطرابات سواء منها المستقلة عن الزمن أو التابعة له وأعطينا تطبيقات عديدة لها، كمفعول زيمان والبنية زائدة الدقة لذرة الهدروجين كما أعطينا لمحة عن الميزر والليزر، الخ. نعتقد أن هذه الفصول الأربعة كافية للتعريف بالميكانيك الكمومي من الناحيتين الصورية والعملية. يمكن اعتمادها كقراءة أولى لهذه النظرية خلال فصل دراسي كامل.

لا يوجه تدريس الرياضيات للفيزيائيين ما يكفي من العناية لدراسة الفضاءات اللامنتهية الأبعاد والمؤثرات الخطية فيها : فضاء هيلبرت لمتجهات الحالة والمؤثرات ذاتية الترافق للمقادير الفيزيائية. تعتبر أغلب كتب ميكانيك الكم المرجعية هذه الدراسة خارجة عن اختصاصها وتمر عليها مرور الكرام نظراً لوجود كتب عديدة تعنى بهذه المواضيع؛ هذا هو حال مرجعنا الأول، كتاب لاندو وليفشيتز، وحال كتاب باولي المنشور في الموسوعة الألمانية للفيزياء Handbuch der Physik عام 1933 والمعاد نشره على الدوام وحال دروسه في زوريخ، أو كتاب ديراك (1932) بطبعاته التالية المتعددة (1982)، وكذا كتب فاينمان وكتاب بلوخنيتسف الخ. يكاد الكتاب الوحيد الذي يخرج عن هذا التقليد هو كتاب ميسيا الذي خصص حيزاً، غير كاف في نظرنا، للإطار الرياضي. أما الكتب الأخرى فكثيراً ما تسيء فهم ثنوي الفضاء الهيلبرتي ولا تعي الفرق في هذا المجال بين الطيف المتصل والطيف المنفصل. لقد خصصنا الفصل الخامس بكامله لتوضيح المفاهيم الرياضية المؤسسة للنظرية الكمومية حتى يتمكن الفيزيائي من التخلص من تعامل يكاد يكون آلياً مع صيغ الميكانيك الكمومي ويشعر بعمق الصلة التي تربط الفيزياء بلغتها الوحيدة الممكنة : الرياضيات. يقول ديراك : "**لا توجد فيزياء بدون رياضيات ولا رياضيات بدون دموع**". لقد وضعنا في آخر الكتاب بعض المراجع التي يمكن الرجوع إليها لاستكمال الدراسة أو البرهان على قضايا لم نبرهنها في عرضنا.

يمكن النظر إلى الفصول الأربعة المتبقية كقراءة ثانية متممة للقراءة الأولى تستغرق هي أيضاً فصلاً دراسياً كاملاً. فقد خصصنا الفصل السادس لدراسة مجموعة من الجسيمات لنجد أن الجسيمات تنقسم إلى صنفين : البوزونات والفيرميونات، متجهة موجة الأولى متناظرة والثانية مضادة التناظر وتخضع لمبدأ الاستبعاد لباولي. لم تستطع الفيزياء إلى الآن إرجاع هذين الصنفين من الجسيمات إلى منشأ واحد. سيلعب هذا الفصل، إضافة إلى أهميته كمفسر لجدول العناصر الدوري، دوراً هاماً في الفيزياء الإحصائية التي خصصنا لها المجلد الخامس.

يعنى الفصل السابع بالبحث عن حلول تقريبية لمعادلة شرودينغر، أولها هو نشر الفعل بدليل قوى h وإهمال القوى الكبيرة بحيث يعطي الحد الأول (القوى صفر) الحل التقليدي والحد الثاني (القوة واحد) الحل الذي اقترحه بور ومن بعده سوميرفيلد قبل نشوء النظرية الكمومية. وثانيها حصر متجهة الحالة في فضاء جزئي من الفضاء الهيلبرتي. أما الفصل الثامن فقد خصص لنظرية الاصطدامات الكمومية، لتبعثر الجسيمات الواردة والجسيمات الهدف سواء كان التبعثر مرناً، لا يغير حالة الجسيمات المتصادمة، أو غير مرن، يغير هذه الحالة بأن يغير مستويات الطاقة (تحريض الذرة وتأيينها) أو أن يستبدل الإلكترون الوارد بأحد إلكترونات الذرة الخ. ولكننا لم ننظر إلى تفكك الجسيمات التي يقع على عاتق نظرية الحقول المكممة دراستها؛ وهي نظرية تجمع بين الميكانيك الكمومي – المعرف بوجود الفعل h – والنسبية الخاصة المعرفة بوجود الثابتة C. لذلك يمكن النظر إلى الفصل التاسع الذي يدرس معادلة ديراك النسبوية كمدخل إلى هذه النظرية. إلا أن ما يهمنا هنا هو معادلة الإلكترون في الحقل الكهرطيسي معالجة نصف كمومية يخضع الإلكترون فيها إلى معادلة ديراك الكمومية والنسبوية ولكن الحقل الكهرطيسي غير مكمم وهي دراسة كافية لاستخلاص البنية الدقيقة لمستويات طاقة ذرة الهدروجين على سبيل المثال وللحصول على معادلة باولي كتقريب لانسبوي لمعادلة ديراك.

# فهرس

**مقدمة الكتاب** ........ III

**مقدمة** ........ VII

**الفصل الأول: أسس الميكانيك الكمومي** ........ 1

**1. مبدأ اللاتحديد لهايزنبرغ Heisenberg** ........ 1

1.1. استقرار ذرة الهدروجين ........ 1

2.1– مبدأ اللاتحديد ........ 2

3.1– انعراج الإلكترونات ........ 5

4.1– الانعراج ........ 7

**2. مبادئ الميكانيك الكمومي** ........ 15

1.2– مبدأ التقابل لبور Bohr ........ 15

2.2– المبدأ الأول – دالة الموجة ........ 16

3.2- المؤثرات ذاتية الترافق (Self adjoint) ........ 18

4.2– معادلة شرودينغر Schrödinger ........ 23

5.2– المؤثرات التفاضلية ........ 25

6.2– باقة الموجة Wave Packet وسرعة الجسيم ........ 26

**3. حساب المؤثرات** ........ 29

1.3- مشتق مؤثر بالنسبة للزمن ........ 29

2.3– جبر المؤثرات ........ 31

3.3– مؤثر الإسقاط أو المسقط Projector ........ 33

**4. القياس في الميكانيك الكمومي** ........ 38

1.4– مشكلة القياس ........ 38

2.4– مؤثر الكثافة ........ 39

3.4– سيرورة القياس المثالي ........ 40

4.4– قطع الاتساق Decoherence ........ 43

**5. تطور النظمة الكمومية** ........ 44

1.5– مؤثر التطور ........ 44

2.5– تمثيل شرودينغر وتمثيل هايزنبرغ ........ 46

3.5- تكامل المسار Path integral ........ 48

4.5- مبدأ الفعل الأصغر ........ 52

5.5- الخلاصة ........ 53

**الفصل الثاني: حل معادلة شرودينغر ........ 57**

**1. أشكال الطيف ........ 57**

1.1- الطيف المنفصل ........ 57

2.1- الطيف المتصل ........ 58

3.1- خواص "الدالة" δ ........ 60

4.1- كثافة التيار ومؤثر السرعة ........ 62

5.1- نشر متجهة الحالة بدليل الموجات المستوية ........ 65

6.1- علاقة اللاتحديد ........ 67

**2. حل معادلة شرودينغر ببعد واحد ........ 71**

1.2- هضبة الكمون، الحالة العامة ........ 71

2.2- متجهة الحالة في جوار النقطتين x ±∞ ........ 74

3.2- بئر الكمون ........ 76

4.2- حاجز الكمون. مفعول النفق Tunneling effect ........ 82

5.2- قفزة الكمون ........ 85

**3. الهزاز التوافقي ........ 87**

1.3- معادلة شرودينغر للهزاز التوافقي ببعد واحد ........ 87

2.3- كثيرات حدود هيرميت Hermite ........ 90

3.3- معادلة شرودينغر بالتمثيل P ........ 95

4.3- طريقة المصفوفات ........ 97

**الفصل الثالث: العزم الزاوي المداري والسبين ........ 101**

**1. العزم الزاوي المداري ........ 101**

1.1- علاقات المبادلة ........ 101

2.1- انحفاظ الاندفاع الخطي والعزم الزاوي المداري ........ 104

3.1- قوانين التناظر ........ 107

4.1- تعيين القيم الخاصة للعزم الزاوي المداري ........ 110

5.1- متجهات العزم الزاوي المداري الخاصة : الدالات التوافقية الكروية ........ 113

6.1- الدالات التوافقية الكروية وكثيرات حدود لوجاندر Legendre ........ 116

7.1– التمثيل التانسوري لزمرة الدورانات SO(3) ........ 119
**2. الحركة في حقل مركزي** ........ 122
1.2– معادلة شرودينغر بالمتغيرات الكروية ........ 122
2.2– حل المعادلة القطرية ........ 124
3.2– حالة جسيم حر $U(r) = 0$ : الموجات الكروية ........ 126
4.2– حالة جسيم حر : الموجات المستوية ........ 129
**3. الحركة في حقل كولومبي – ذرة الهدروجين** ........ 131
1.3- الوحدات الكولومبية ........ 131
2.3– حل المعادلة القطرية ........ 133
3.3- كثيرات حدود لاكير Laguerre ........ 137
4.3– الطيف المتصل ........ 140
**4. العزم الزاوي الداخلي (الصميمي) – السبين** ........ 141
1.4– العزم الزاوي والعزم المغنطيسي ........ 141
2.4– تجربة شتيرن وغيرلاش Stern-Gerlach (1922) ........ 143
3.4– جمع العزوم الزاوية ........ 145
4.4– توصيف الدوران بمصفوفة 2x2. كرة ريمان ........ 148
5.4– الزمرة SU(2) ومصفوفات باولي ........ 151
6.4– فضاء السبينورات والزمرة SL(2) ........ 154
7.4– الجداء التانسوري للفضاءات السبينورية ........ 158
**الفصل الرابع: نظرية الاضطرابات Perturbations** ........ 165
**1. الاضطرابات المستقلة عن الزمن** ........ 165
1.1- ضرورة التقريب ........ 165
2.1– النشر بدليل قوى وسيط λ ........ 166
3.1– اضطراب مستو متدن ........ 171
4.1– الهزاز اللاتوافقي ........ 174
5.1– البنية زائدة الدقة لذرة الهدروجين Hyperfine-structure ........ 176
6.1– تناظر السوية وقاعدة الانتقاء Selection rule ........ 181
7.1– مفعول شتارك Stark ........ 183
**2. رفع التدني** ........ 184
1.2– كسر التناظر ........ 184

2.2- جزيء الأمونياك ........ 185
3.2- مفعول زيمان (Zeeman) في ذرة الهدروجين ........ 188
4.2- هاميلتوني الذرة بوجود حقل مغنطيسي ضعيف ........ 193
5.2- مفعول زيمان في حالة ذرة ما ........ 194
**3. الاضطراب التابع للزمن** ........ 197
1.3- معادلة السعات $C_i$ التفاضلية ........ 197
2.3- التقريب الأولي ........ 198
3.3- حساب احتمال الانتقال بفعل الاضطراب ........ 200
4.3- الاضطراب الثابت أو الدوري ........ 202
5.3- احتمال الانتقال إلى الطيف المتصل ........ 204
6.3- علاقة اللاتحديد بين الطاقة والزمن ........ 205
**4. تطبيقات** ........ 208
1.4- مبدأ الميزر والليزر ........ 208
2.4- إصدار وامتصاص الضوء المستحث Induced ........ 212
**الفصل الخامس: الإطـار الرياضـي** ........ 217
**1. الفضاءات المتجهية المنظمة** ........ 217
1.1- الفضاءات المترية ........ 217
2.1- متراجحات مينكوفسكي وهولدر ........ 220
3.1- التقارب في الفضاءات المترية، الفضاء المتري التام ........ 222
4.1- الفضاءات المتجهية المنظمة (النظيمة) Normed ........ 223
5.1- التطبيقات الخطية في الفضاءات المتجهية النظيمة ........ 227
**2. الفضاءات الهيلبرتية** ........ 230
1.2- الشكل الهرميتي Hermitian form ........ 230
2.2- الفضاءات قبل الهيلبرتية والهيلبرتية ........ 233
3.2- الفضاء الهيلبرتي $\ell_2$ ........ 234
4.2- مبرهنة الإسقاط ........ 239
5.2- ثنوي الفضاء الهيلبرتي ........ 243
6.2- المجموع المباشر الهيلبرتي ........ 246
**3. المؤثرات الخطية في $\mathscr{H}$** ........ 247
1.3- تعريفات، المؤثرات المتراصة ........ 247

2.3– المؤثرات المرافقة Adjoints ........ 249
3.3– المؤثرات ذاتية الترافق المتراصة ........ 252
4.3– المؤثر الإسقاطي – المسقط ........ 254
4. التحلل (التفكيك) الطيفي Spectral decomposition ........ 257
1.4– المؤثرات المغلقة ........ 257
2.4– المؤثر المرافق، المؤثر المتناظر والمؤثر ذاتي الترافق ........ 259
3.4– المؤثران Q و P ........ 260
4.4– المؤثرات الواحدية ........ 263
5.4– التمثيل الطيفي للمؤثرات ذاتية الترافق ........ 265
6.4– التمثيل الطيفي للمؤثر الواحدي ، تمثيل P ........ 268
7.4– مسألة الطيف المتصل ........ 269
5. نظرة سريعة على نظرية التوزيعات Distributions ........ 271
1.5– دالة ديراك δ ........ 271
2.5– دالات القاعدة D و S ........ 273
3.5– التوزيعات 'D والتوزيعات المعتدلة 'S (Tempered) ........ 274
4.5– اشتقاق التوزيعات ........ 275
5.5– تحويل فورييى للتوزيعات ........ 279
6.5– الثلاثية الهيلبرتية ........ 281
**الفصل السادس: الجسيمات المتطابقة والتكميم الثاني** ........ **285**
1. الجسيمات المتطابقة ........ 285
1.1– مبدأ عدم التمييز ........ 285
2.1– مؤثر الاستبدال Exchange – المستبدل ........ 286
3.1– البوزونات والفيرميونات ........ 289
4.1– مبدأ الاستبعاد وجدول العناصر الدوري ........ 290
5.1– المنظر والمنظر المضاد ........ 293
6.1– صيغة متجهة حالة لـ n جسيماً متطابقاً ........ 298
7.1– جبر المتجهات في الفضاء $\mathcal{H}^{\otimes n}$ ........ 300
2. التكميم الثاني ........ 303
1.2– عدد الجسيمات كمقدار فيزيائي ........ 303
2.2– تكميم حقل شرودينغر ........ 304

3.2– مؤثرات الخلق والفناء ........ 305
4.2– الفضاء متعدد الجسيمات، تكميم البوزونات ........ 308
5.2– تكميم الفيرميونات ........ 311
3. المؤثرات في الفضاءات $\mathscr{H}^{\otimes n}$ ........ 312
1.3– متجهات الحالة في $\mathscr{H}^{\otimes n+1}$ و $\mathscr{H}^{\otimes n-1}$ ........ 312
2.3– المؤثرات في الفضاء $\mathscr{H}^{\otimes n}$ ........ 314
3.3– الهاميلتوني في $\mathscr{H}^{\otimes n}$ ........ 316
**الفصل السابع: طرق التقريب** ........ 321
1. التقريب شبه التقليدي ........ 321
1.1– التقريب التقليدي للميكانيك الكمومي ........ 321
2.1– التقريب شبه التقليدي ........ 322
3.1– التقريب شبه التقليدي ببعد واحد ........ 324
4.1– صيغة الوصل في النقاط الحدودية Connection formula ........ 326
5.1– اختراق هضبة كمون ........ 328
6.1– تكميم بور–سومرفلد Bohr-Sommerfeld ........ 330
2. طريقة التغيرات Variational Method ........ 334
1.2– مبدأ الطريقة ........ 334
2.2– حالة القاع لذرة الهليوم ........ 337
3.2– تقريب الحقل المتسق ذاتياً Self consistent ........ 340
4.2– تقريب هارتري، فوك، ديراك Hartree-Fock-Dirac ........ 342
5.2– معادلة فوك – ديراك ........ 345
6.2– الطاقة الذاتية ومعادلة هارتري ........ 346
**الفصل الثامن: نظرية التبعثر Scattering** ........ 349
1. صيغة روذرفورد Rutherford ........ 349
1.1– التصادم التقليدي ........ 349
2.1- المقطع الفعال ........ 351
3.1– صيغة روذرفورد ........ 354
4.1– استخراج صيغة روذرفورد كمومياً ........ 357
2. التبعثر الكمومي ........ 358
1.2– الحلول المقاربة للموجة الكروية ........ 358

2.2– حساب المقطع الفعال بدليل انزياح الطور $\delta_l$ ........ 360
3.2– الشكل التكاملي لحلول معادلة شرودينغر – دالات غرين Green ........ 362
3. **تقريب بورن Born** ........ 367
1.3– حل المعادلة التكاملية بالتكرار ........ 367
2.3– تقريب بورن ........ 370
3.3– تبعثر الإلكترونات المرن في تصادمها مع الذرات ........ 372
4.3– التبعثر المرن للجسيمات البطيئة (تبعثر الإرنان) ........ 375
4. **نظرية التبعثر غير المرن** ........ 380
1.4– التبعثر غير المرن ........ 380
2.4– دالة غرين بدليل المحال $R_\lambda$ ........ 381
3.4– صيغة ليبمان – شفينغر Lippman-Schwinger ........ 384
4.4– حساب المقطع الفعال ........ 387
5.4– تصادم الإلكترونات السريعة مع الذرة ........ 388
5. **المصفوفة S** ........ 389
1.5– التمثيل الوسطي ........ 389
2.5– المصفوفة S ........ 392
3.5– احتمال الانتقال ........ 395
**الفصل التاسع: الميكانيك الكمومي النسبوي** ........ 397
1. **معادلة كلاين – غوردن Klein-Gordon** ........ 397
1.1– تمهيد ........ 397
2.1– معادلة كلاين–غوردن ........ 399
3.1– نشر متجهة الحالة $\psi(x)$ ........ 400
4.1– معادلة الاتصالية ........ 402
2. **معادلة ديراك** ........ 403
1.2– تحويل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية إلى معادلة خطية Linearization ........ 403
2.2– مصفوفات ديراك ........ 405
3.2– صيغة مصفوفات ديراك ........ 409
4.2– حل معادلة ديراك ........ 411
5.2– تفسير الحالات ذات الطاقات السالبة ........ 416

3. معادلة ديراك بوجود حقل خارجي........418
1.3- هاميلتوني الإلكترون في حقل كهرطيسي........418
2.3- معادلة باولي : التقريب اللانسبوي لمعادلة ديراك........420
3.3- التقريب النسبوي لمعادلة ديراك، تحولات فولدي-ويتيوزن Foldy-Wouthuysen........422
4. ذرة الهدروجين النسبوية........430
1.4- النشر بدليل الدالات التوافقية الكروية........430
2.4- الحركة في حقل مركزي........432
3.4- حل المعادلتين القطرتيين في حقل كمون كولومبي........435
4.4- البنية الدقيقة لمستويات طاقة ذرة الهدرجين........437
**ملحق الفصل التاسع**........441
**ثبت المصطلحات**........463
**أسماء العلم**........473
**مراجع الفصل الخامس**........477

# الفصل الأول

## أسس الميكانيك الكمومي


1- مبدأ اللاتحديد لهايزنبرغ Heisenberg ...... 1

2- مبادئ الميكانيك الكمومي ........................ 15

3- حساب المؤثرات ........................................ 29

4- القياس في الميكانيك الكمومي ....................... 38

5- تطور الأنظمة الكمومية .................................. 44

# 1. مبدأ اللاتحديد لهايزنبرغ Heisenberg

## 1.1. استقرار ذرة الهدروجين

إن الأسباب الموجبة لوضع مفاهيم جديدة وطرح فرضيات إضافية هي تعارض النظريات القائمة قبلها والمفاهيم التي بنيت عليها مع الواقع التجريبي الجديد ومع التحليل الدقيق للحادثات الفيزيائية. لا تتفق المبادئ والأسس الجديدة كلياً أو جزئياً مع المبادئ القديمة : إنها، بصورة عامة، بساط يفرشه الباحثون العلميون، أوسع من البساط السابق، لتلقي الواقع التجريبي الجديد بالإضافة إلى كل الوقائع القديمة. وبهذا فالمبادئ الجديدة تقبل ما سبقها كتقريب أولي وتتعارض معها في بعض جوانبها.

رأينا في المجلد الأول كيف دفع فشل تجربة مايكلسون مورلي في تعيين حركة مقرن غاليلي بالنسبة لمقرن غاليلي آخر، في معرفة المتحرك منهما بالنسبة للآخر إلى بناء نظرية النسبية الخاصة التي تقبل الميكانيك النيوتوني كتقريب أولي لها حينما تكون السرع صغيرة أمام سرعة الضوء، وتنقض في ذات الوقت مفهوم الزمن المطلق، الوسيط المشترك غير المتغير من مقرن غاليلي إلى آخر.

لننظر هنا إلى أبسط الذرات وأوسعها انتشاراً في الكون، ذرة الهدروجين المؤلفة من بروتون واحد ذي شحنة كهربائية موجبة ومن إلكترون يقع في جواره ذي شحنة سالبة مساوية بالقيمة المطلقة لشحنة البروتون – $1,6.10^{-19}$ كولون – كتلة البروتون $1,7.10^{-27}$ كغ وكتلة الإلكترون $0,91.10^{-30}$ كغ، وهي أصغر بألفي مرة تقريباً من كتلة البروتون. تتجاذب الشحنتان، في الحقل الكهربائي الذي تنتجه إحداهما، البروتون مثلاً، بقوة هي $\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{r}$ على غرار تفاعل كتلتين، الأرض والشمس مثلاً في حقل التثاقل الذي تحدثه الشمس.

رأينا في الفصل الرابع من كتاب الميكانيك أن مدار كوكب ما P حول الشمس، حول مركز الكتلة تحديداً، يحقق قوانين كبلر. فهو قطع ناقص تقع الشمس S في أحد محرقيه وتمسح الشعاعات المتجهة، الخطوط SP الواصلة بين الشمس والكوكب، سطوحاً تتناسب مع الزمن اللازم لمسحها. وهكذا تتغير سرعة الكوكب بتغير بعده عن الشمس، يتباطأ حين يكون بعيداً عنها ويتسارع حين يقترب منها. رأينا كذلك أن قطر القطع الناقص الكبير يتناسب مع الطاقة الكلية الثابتة للكتلتين المتفاعلتين.

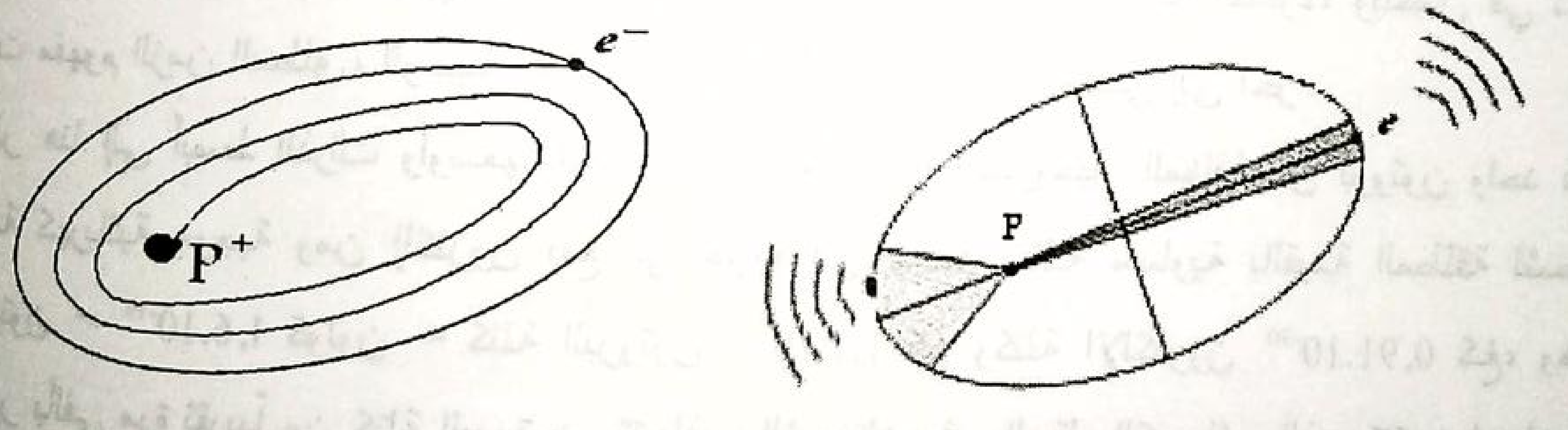
$$2a = \frac{-Gm_1m_2}{E} \qquad (1.1)$$

و E سالبة. يمكننا أن نتصور إذاً حركة الإلكترون حول البروتون مماثلة لحركة كوكب حول الشمس : لا فرق بينهما سوى استبدال الثابتة $Gm_1m_2$ في العلاقة السابقة بالثابتة $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}$ وكتابة القطر الكبير على الشكل

$$2a = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o E} \qquad (1.1)'$$

إلا أننا نعلم من النظرية الكهرطيسية أن الشحنة المتحركة تصدر إشعاعاً، وأن الحقل الكهربائي الذي تحدثه مؤلف من توضيع عدة مركبات أهمها هي تلك الناتجة عن تسارع الشحنة. هذا يعني أن الطاقة السالبة E في '(1.1) ستتناقص باستمرار وبسرعة نتيجة الإشعاع، أن قيمتها المطلقة سترتفع وسيتناقص بالتالي الطول 2a في كل دورة للإلكترون حول البروتون إلى أن ينتهي الأمر بالإلكترون إلى السقوط على البروتون.

هذا هو التحليل الدقيق لدوران الإلكترون حول البروتون كما تمليه علينا مبادئ الفيزياء التقليدية : الميكانيك النيوتوني والكهرطيسية. لكن سقوط الإلكترون على البروتون، عدم استقرار ذرة الهدروجين، مخالف للواقع التجريبي : إن ذرة الهدروجين ذرة مستقرة بل وأكثر الذرات استقراراً. هذا هو السبب الموجب الأول لوضع مبادئ جديدة تتلاءم مع هذا الواقع.




الشكل. 1

## 2.1– مبدأ اللاتحديد

إن منشأ التناقض بين الواقع التجريبي، بين كل الأرصاد على ذرة الهدروجين في الكون، وقوانين الميكانيك التقليدي هو القبول بمفهوم المدار الإلكتروني، بمفهوم المسار. ولكن ما هو مضمون هذا المفهوم في الميكانيك التقليدي ؟ إنه قانون نيوتن الثاني، وبصورة عامة المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية المكافئة له والتي يتوقف حلها على ثوابت – ثابتتين لكل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية – سميناها الشروط البدائية هي معرفة وضع المتحرك $\vec{r}$ وسرعته $\vec{V}$ في لحظة معينة. إن هذه المعرفة في لحظة

معينة هي التي تحدد الوضع والسرعة في كل لحظة أخرى – تليها أو تسبقها لا فرق – وبالتالي المسار. فالمسار هو نتيجة هذه المعرفة وعدم وجوده، عدم صحة النتيجة، يعني عدم صحة المقدمة، عدم معرفة الشروط البدائية. هذا ما يعبر عنه رياضياً عندما نكتب أن $A \Rightarrow B$ يكافئ $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ : الوضع والسرعة في لحظة ما A يحددان المسار B. عدم المسار $\complement B = \bar{B}$ يتضمن عدم تحديد الوضع والسرعة $\bar{A}$. هذا هو مبدأ اللاتحديد :

يستحيل معرفة الوضع والسرعة معاً في لحظة معينة.

يمكن أن نعرف الوضع مثلاً بدقة تامة، ونعني بذلك قياسه بوساطة أجهزة القياس المعروفة وتحديد قيمته وقيمة خطأ القياس حسب دقة الأجهزة المتاحة. إلا أن هذه المعرفة الدقيقة يقابلها جهل تام بقيمة السرعة – وسنتحدث من الآن فصاعداً عن قيمة الاندفاع المتناسب معها – يمكن للاندفاع أخذ كل القيم الممكنة من الصفر إلى اللانهاية، إنه غير محدد إطلاقاً؛ كما أن العكس صحيح : يمكن معرفة الاندفاع بدقة تامة يقابلها جهل تام بالوضع؛ إن معرفة اندفاع الإلكترون بدقة يعني أنه يمكن أن يوجد في أي نقطة من نقاط الحيز من الفضاء الذي نجري فيه التجربة. يمكن الربط بين اللادقة، اللاتحديد، اللايقين في معرفة المقدارين المترافقين $\bar{r}$ و $\bar{p}$ أو معرفة مركباتهما $x$ و $p_x$ كمياً بالعلاقة التالية

$$\Delta x\, \Delta p_x \sim h \tag{1.2}$$

حيث $h \sim$ تعني من رتبة $h$ : $\Delta x\, \Delta p \geqq \alpha h$.

حيث $\Delta x$ و $\Delta p_x$ تعبران عن انزياح $x$ و $p_x$ عن قيمتين محددتين، عن اللايقين في معرفتهما و $h$ ثابتة هي ثابتة بلانك، أبعادها أبعاد فعل $ML^2T^{-1}$ وتساوي $6,626.10^{-34}$ جول–ثانية. إن الطرف الثاني في علاقة التناسب هذه مقدار ثابت منته. نرى إذاً أنه في حال قياس الوضع بدقة تامة $\Delta x = 0$ فإن $\Delta p_x \to \infty$ كي تبقى علاقة التناسب قائمة والعكس صحيح. كما نرى فيها أنه إذا كانت "الأفعال" كبيرة جداً أمام $h$ بحيث نقبل تساوي $h$ مع الصفر فإن اللاتحديد سيلتغي

$$\Delta x\, \Delta p_x \simeq 0 \tag{1.3}$$

وسنستطيع بالتالي قياس الوضع والاندفاع معاً وبدقة تامة $\Delta x = 0$ و $\Delta p_x = 0$ وسنعود إلى الميكانيك التقليدي ومساراته.

إن مبدأ اللاتحديد وتعبيره الرياضي (1.2) هو الذي يحدد إذاً الخط الفاصل بين الميكانيك التقليدي والكمومي : $h << A$ حيث $A$ الفعل الذي اشتققنا منه معادلات لاغرانج والميكانيك تقليدي. أما الميكانيك الكمومي فهو عندما يكون الفعل متناسباً مع $h$ : $A \sim h$.

تترتب على مبدأ اللاتحديد نتائج عديدة سنضعها على شكل موضوعات، يمكننا استشفاف محتواها منذ الآن. إن مفهوم القياس المتزامن للمقادير الفيزيائية مقبول في الفيزياء التقليدية ولكننا نرى هنا أن أسبقية القياس تلعب دوراً هاماً : قياس الوضع وتحديده يجعلنا نجهل كلياً نتيجة قياس الاندفاع والعكس صحيح : إن ترتيب القياس ليس تبادلياً وبالتالي فإن الكائنات الرياضية المعبرة عن هذه المقادير ليست مجرد دالات

سلمية. إنها مؤثرات كالمصفوفات مثلاً و $p_x x \neq xp_x$. ثم إن عدم المعرفة اليقينية، عدم التنبؤ اليقيني بالأحداث الذي يتضمنه الميكانيك التقليدي، يجعل من الميكانيك الكمومي علماً احتمالياً. نستطيع التنبؤ باحتمال – بنسبة مئوية – بوجود الإلكترون في حيز ما، أو باحتمال أخذ اندفاعه هذه القيمة أو تلك. لقد ولى بمجيء الميكانيك الكمومي زمن التحديد – ولنقل فلسفياً زمن الحتمية – الذي سيطر حتى نهاية القرن التاسع عشر والذي تميز بشعار لابلاس "أعطوني الشروط البدائية وسأتنبأ لكم بمستقبل الكون".

وضع بلانك – المؤسس الأول للميكانيك الكمومي – فرضية كم الطاقة Quantum عام 1900 : لا تتغير طاقة الهزاز التوافقي بشكل متصل وإنما بقفزات، كمات Quanta، تتناسب مع الثابتة التي عرفت باسمه h، هي $h\upsilon = \hbar\omega$ وأضعافها، حيث $\upsilon$ دور الهزاز و $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon$ سرعته الزاوية و $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. وقد فعل ذلك لكي تتفق نظرية إشعاع الجسم الأسود الترموديناميكية مع المعطيات التجريبية وتتخلص من الطاقات اللامتناهية – التي لا معنى لها في الفيزياء – المعروفة باسم كارثة تحت البنفسجي. لكن الميكانيك الكمومي الذي نعرضه هنا هو نتاج مخاض عسير دام ربع قرن وجد فيه الفيزيائيون أنفسهم في وضع غير مرض البتة يضطرون معه إلى طرح فرضيات جديدة يناسب وضعها حل مشكلة معينة دون سواها، كالقول مثلاً في دراسة الفيزياء الذرية بوجود مسارات مسموح بها وأخرى ممنوعة، ويتخبطون في جمع هذه الفرضيات والحلول الناتجة عنها في هيكلة واحدة متسقة، لا تناقض فيها، وإقامة نظرية فيزيائية متماسكة خليقة بهذا الاسم، على غرار الميكانيك، النيوتوني والنسبوي، والكهرطيسية. ومما لا شك فيه أن الفرضيات المطروحة والحلول الناجعة التي نتجت عنها دليل على عبقرية واضعيها، إلا أن غياب نظرية شاملة تقوم على أسس واضحة كان مصدر إحباط كبير للفيزيائيين في تلك الحقبة، لعل أفضل ما يعبر عنه تلك الرسالة التي كتبها أحد ألمع الفيزيائيين الشباب آنذاك، باولي Pauli في ربيع عام 1925 قائلاً "والآن فقد ضلت الفيزياء الطريق وأضحت في غاية الصعوبة إلى حد جعلني أتمنى أن أكون ممثلاً سينمائياً هزلياً أو أي شيء آخر وأن أبتعد عن الفيزياء نهائياً". حصل باولي على جائزة نوبل في الفيزياء عام 1945 !

لم تتضح معالم النظرية الكمومية إذاً ولم توضع الأسس التي بنيت عليها إلا في منتصف العقد الثالث من القرن العشرين – بضعة أشهر بعد هذه الرسالة – على أيدي هايزنبرغ، شرودينغر، ديراك (الذي وضع أسس الميكانيك الكمومي النسبوي)، بورن، بور وغيرهم وعلى يدي الرياضي فون نويمان Von Neumann الذي وضع "الأسس الرياضية للميكانيك الكمومي" وهو عنوان الكتاب الذي نشره عام 1932 ثم من لحقهم من مؤسسي نظرية الحقول المكممة وحتى مطلع الستينات.

ما من أحد ينكر الأهمية البالغة التي يكتسيها عرض تطور الأفكار في الفيزياء، علمياً وتربوياً. إلا أننا لا نعتقد أن هذا الكتاب وأمثاله هو المكان المناسب لعرضها. يجب وضع كتب مخصصة لهذا الغرض وإدخاله في التدريس الجامعي بشكل أو بآخر. ولهذا فإننا سنهمله هنا لنعود إلى لب الموضوع.

## 3.1– انعراج الإلكترونات

لنتساءل بعد قبولنا بمبدأ اللاتحديد وباستحالة سير الجسيمات الصغيرة ذات الطاقات المنخفضة – المتناسبة مع ثابتة بلانك – على محارك كما في الميكانيك التقليدي عن كيفية انتقالها من نقطة إلى أخرى في الفضاء ؟

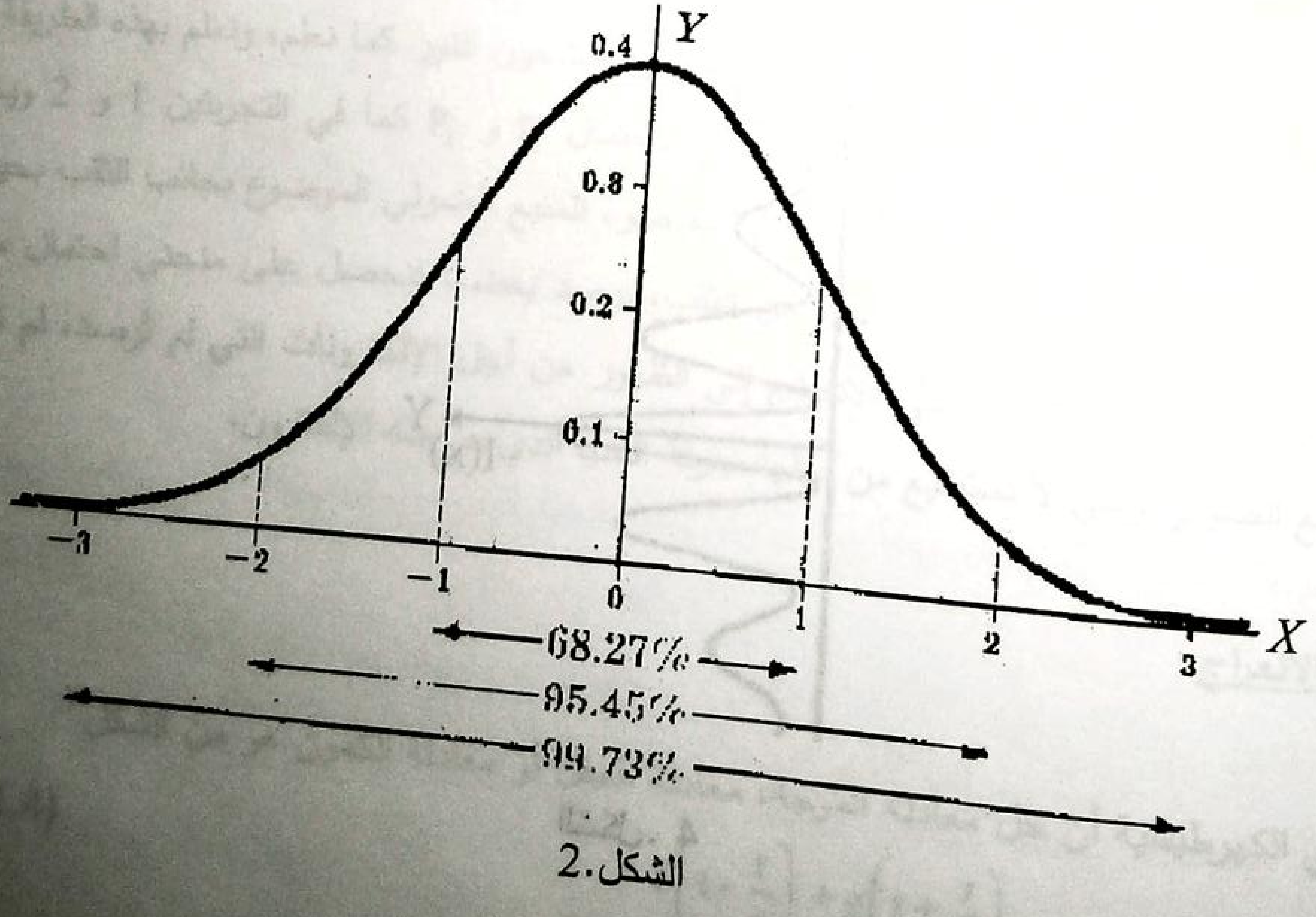
ولنقم للرد على هذا التساؤل بتجربة مماثلة لتجربة يونغ Young الضوئية ولنحلل نتائجها.

ليكن لدينا منبع إلكترونات S – نسميه مدفعاً إلكترونياً – يصدر الإلكترونات على غرار المنبع الضوئي في تجربة يونغ قبالة حاجز E مثقوب بثقبين صغيرين متناظرين بالنسبة لمنبع الإلكترونات وخلفه حاجز آخر E' يوقف الإلكترونات مجهز بمكشاف يعين وضع الإلكترونات وعددها في كل نقطة من نقاطه.

ولنقم بالتجارب التالية :

1- نغلق أحد الثقبين، الثقب 2 مثلاً بحيث لا يمكن عبور الإلكترونات إلى E' إلا عبر الثقب 1. يبين المكشاف أن العدد الأكبر من الإلكترونات قد تجمع حول النقطة $a_1$ الواقعة على استقامة S ووسط الثقب آخذاً في التناقص على يمين ويسار هذه النقطة ليتناهى نحو الصفر عندما نبتعد بما فيه الكفاية عن $a_1$.

إن شكل منحني توزيع الإلكترونات حول النقطة $a_1$ الذي نحصل عليه هو شكل منحني غاوص الإحصائي – شكل جرسي، الشكل.2. يعين عنصر السطح فيه نسبة عدد الإلكترونات في المجال $\Delta X$ إلى عدد الإلكترونات الواردة من S؛ إنه منحني احتمال : لا تقع كل الإلكترونات في المجال الضيق حول $a_1$ الذي يحدده المخروط ذو الرأس S والمولدين المماسين لطرفي الثقب لأن الإلكترونات تصطدم بحافتي الثقب وتحيد عن طريقها محدثة هذا التوزيع الإحصائي.




الشكل.2

## 3.1– انعراج الإلكترونات

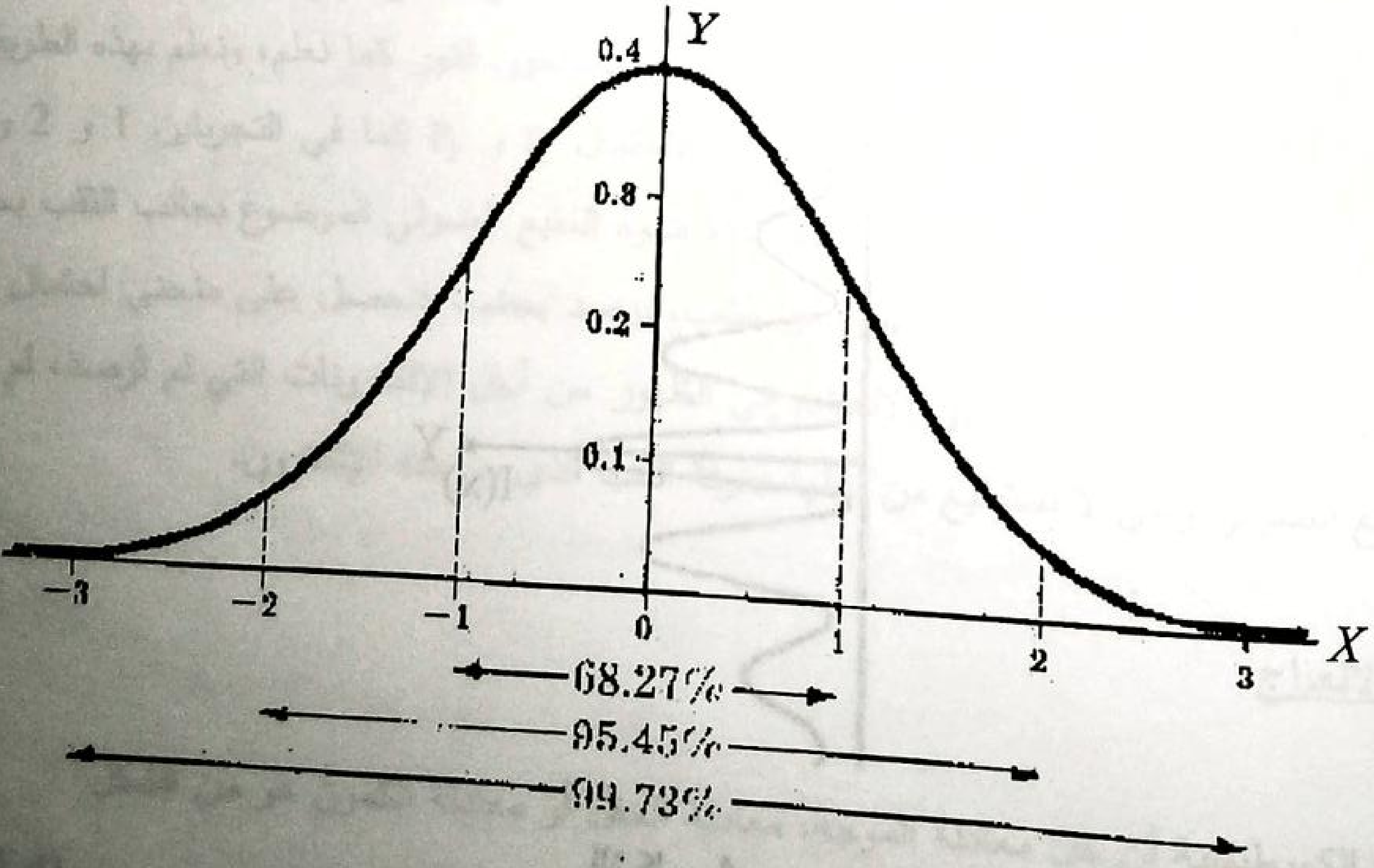
لنتساءل بعد قبولنا بمبدأ اللاتحديد وباستحالة سير الجسيمات الصغيرة ذات الطاقات المنخفضة – المتناسبة مع ثابتة بلانك – على محارك كما في الميكانيك التقليدي عن كيفية انتقالها من نقطة إلى أخرى في الفضاء ؟ ولنقم للرد على هذا التساؤل بتجربة مماثلة لتجربة يونغ Young الضوئية ولنحلل نتائجها.

ليكن لدينا منبع إلكترونات S – نسميه مدفعاً إلكترونياً – يصدر الإلكترونات على غرار المنبع الضوئي في تجربة يونغ قبالة حاجز E مثقوب بثقبين صغيرين متناظرين بالنسبة لمنبع الإلكترونات وخلفه حاجز آخر E' يوقف الإلكترونات مجهز بمكشاف يعين وضع الإلكترونات وعددها في كل نقطة من نقاطه.

ولنقم بالتجارب التالية :

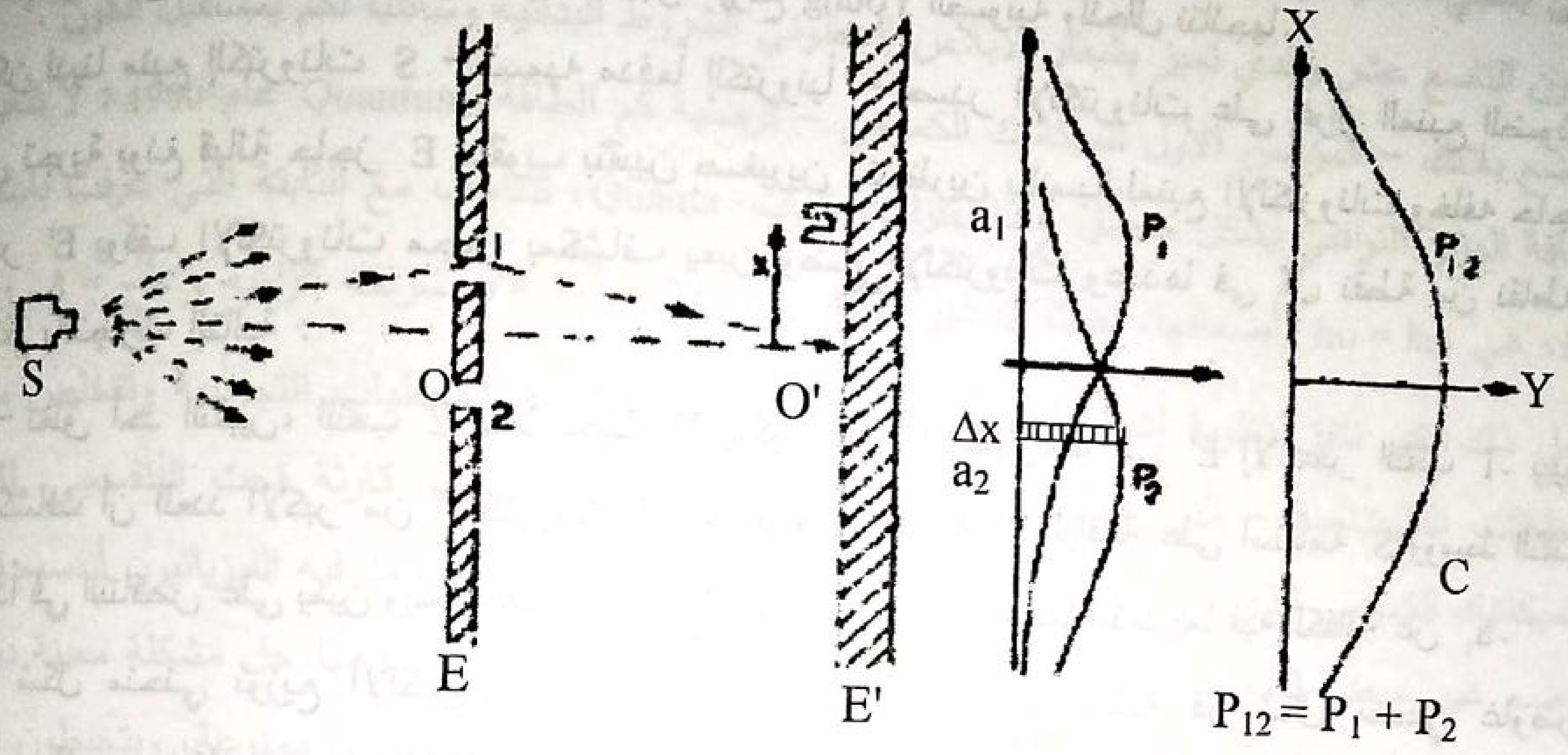
1– نغلق أحد الثقبين، الثقب 2 مثلاً بحيث لا يمكن عبور الإلكترونات إلى E' إلا عبر الثقب 1. يبين المكشاف أن العدد الأكبر من الإلكترونات قد تجمع حول النقطة $a_1$ الواقعة على استقامة S ووسط الثقب آخذاً في التناقص على يمين ويسار هذه النقطة ليتناهى نحو الصفر عندما نبتعد بما فيه الكفاية عن $a_1$.

إن شكل منحني توزيع الإلكترونات حول النقطة $a_1$ الذي نحصل عليه هو شكل منحني غاوص الإحصائي – شكل جرسي، الشكل.2. يعين عنصر السطح فيه نسبة عدد الإلكترونات في المجال $\Delta X$ إلى عدد الإلكترونات الواردة من S؛ إنه منحني احتمال : لا تقع كل الإلكترونات في المجال الضيق حول $a_1$ الذي يحدده المخروط ذو الرأس S والمولدين المماسين لطرفي الثقب لأن الإلكترونات تصطدم بحافتي الثقب وتحيد عن طريقها محدثة هذا التوزيع الإحصائي.



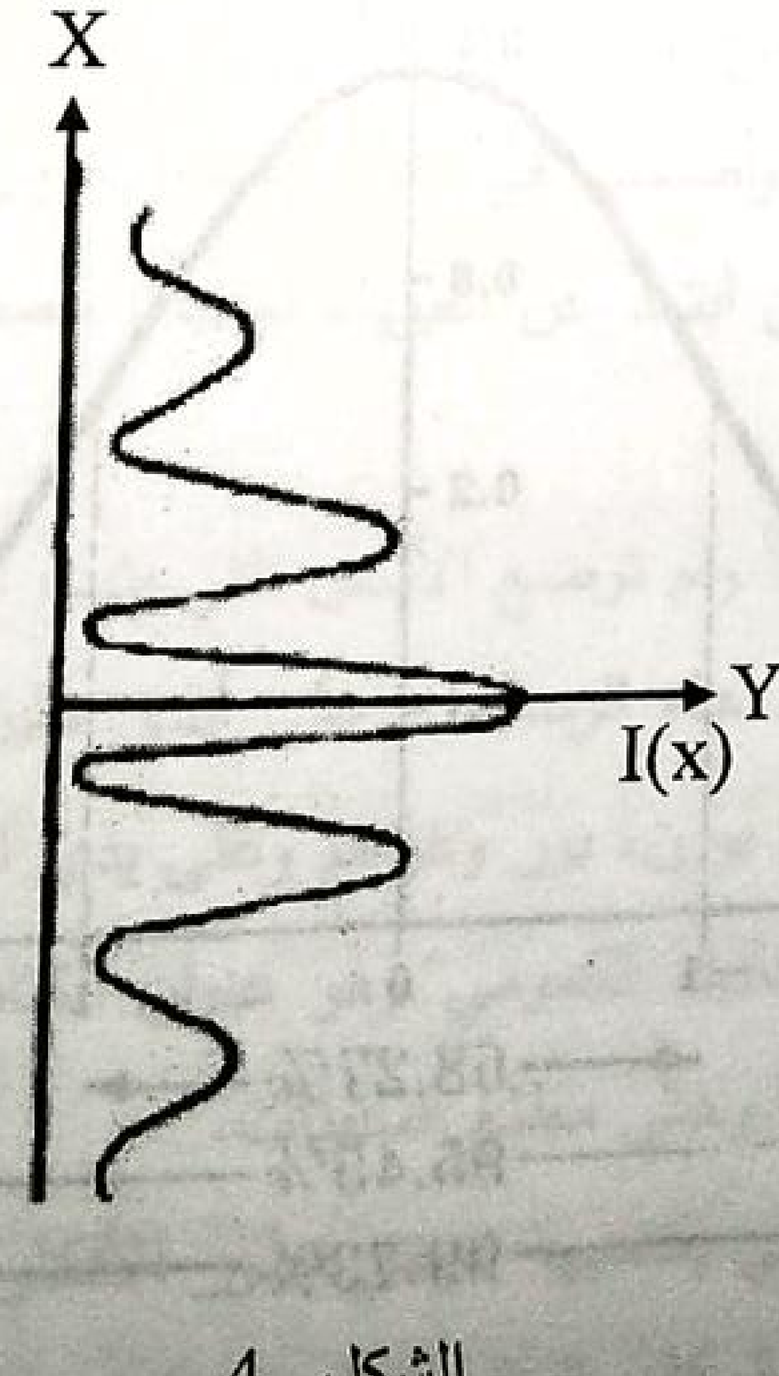

الشكل.2

2- نغلق الثقب الأول 1 بحيث لا يمكن عبور الإلكترونات إلى 'E إلا عبر الثقب 2. تتجمع الإلكترونات هذه المرة حول النقطة $a_2$ نظيرة النقطة $a_1$ بالنسبة للنقطة O الواقعة على استقامة SO العمودي على الحاجزين ونحصل على منحن مطابق للمنحني الأول، نظيره بالنسبة لمحور التناظر SO، الشكل.3.



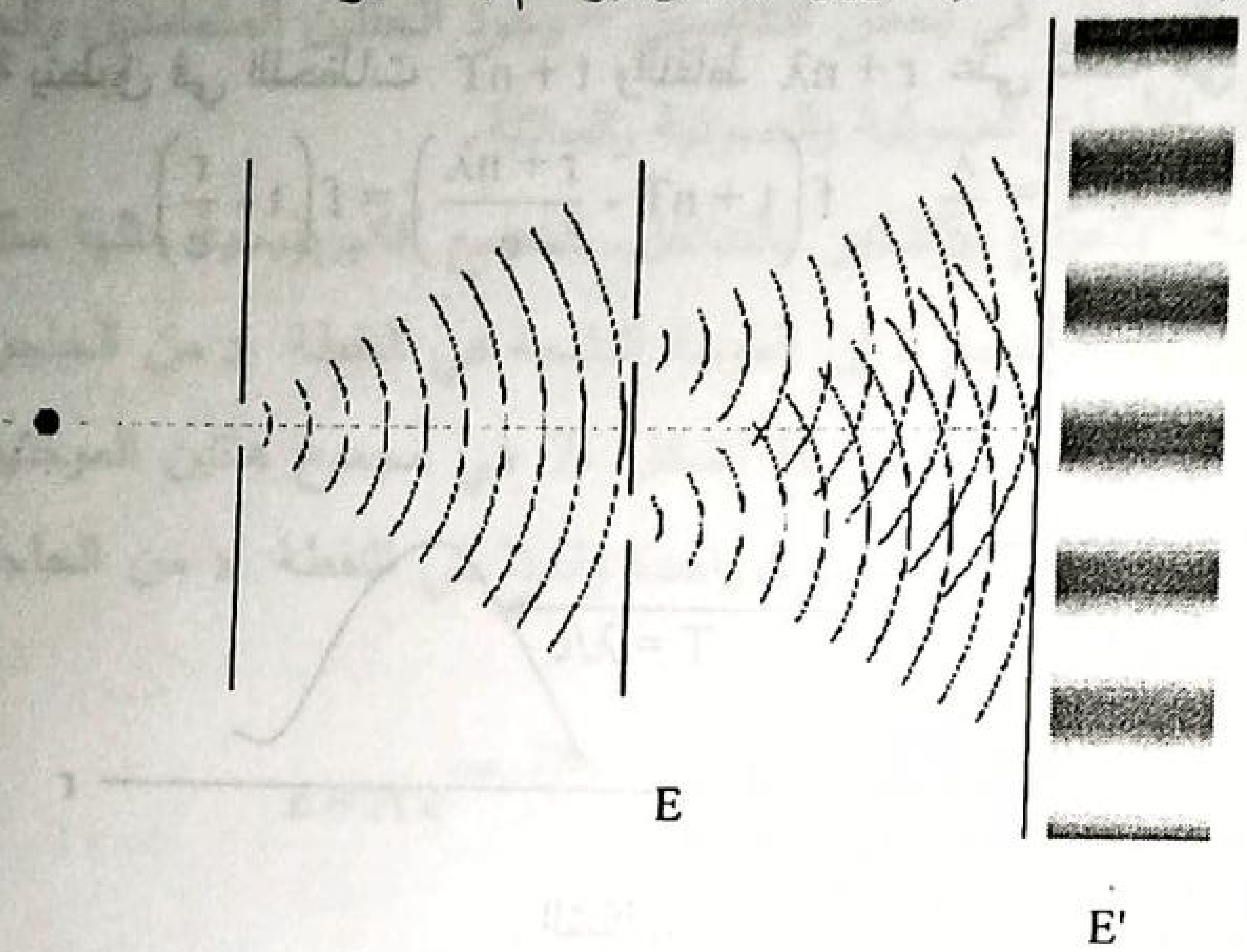

الشكل. 3

3- نفتح الثقبين معاً فنحصل، عوضاً عن المنحني C الذي يجمع الاحتمالين $P_1 + P_2$ والذي نحصل عليه عادة عندما يتعلق الأمر بطلقات بندقية على سبيل المثال، على منحني موجي، منحني الانعراج التالي.




الشكل. 4

نعلم، وقبل إجراء أي حساب أن كل نقطة من سطح الموجة هي نفسها منبع أمواج وهذا ما يحصل تحديداً عندما تتماس الموجة مع الحاجز المثقوب فيصبح كلاً من الثقبين، أو بالأحرى كل نقطة منهما مصدراً للأمواج التي تتداخل فيما بينها لتعطي شكل التداخل المعروف في تجربة يونغ أو شكل الانعراج، الشكل.4. هذا يعني أن الموجة آتية من الثقبين معاً. أو لنقل على الأقل مادام منحني الانعراج الذي حصلنا عليه يمثل نسبة عدد الإلكترونات المتجمعة في مجال معين من الحاجز إلى عدد الإلكترونات الكلي، أننا لا نستطيع معرفة الثقب الذي يمر منه الإلكترون قبل أن يرتطم بالحاجز 'E، الشكل.5.




الشكل. 5

4- ليس من الصعب معرفة الثقب الذي مر منه الإلكترون. يكفي وضع منبع ضوئي على جانب الثقب يتفاعل مع الإلكترون المار من الثقب – يبعثر الإلكترون المشحون النور كما نعلم، ونعلم بهذه الطريقة علم اليقين الثقب الذي مر منه الإلكترون. تعود أشكال الاحتمال $P_1$ و $P_2$ كما في التجربتين 1 و 2 ويختفي منحنى الانعراج اختفاء كلياً. يمكننا التأثير على شدة ضوء المنبع الضوئي الموضوع بجانب الثقب بحيث لا يستطيع التفاعل مع كل الإلكترونات المارة من الثقب، يرصد بعضها فنحصل على منحني احتمال جرسي لها كما في الشكل. 2، يعود منحني الانعراج إلى الظهور من أجل الإلكترونات التي لم تُرصد، لم تتفاعل مع المنبع الضوئي والتي لا نستطيع من أجلها معرفة الثقب الذي مر منه الإلكترون.

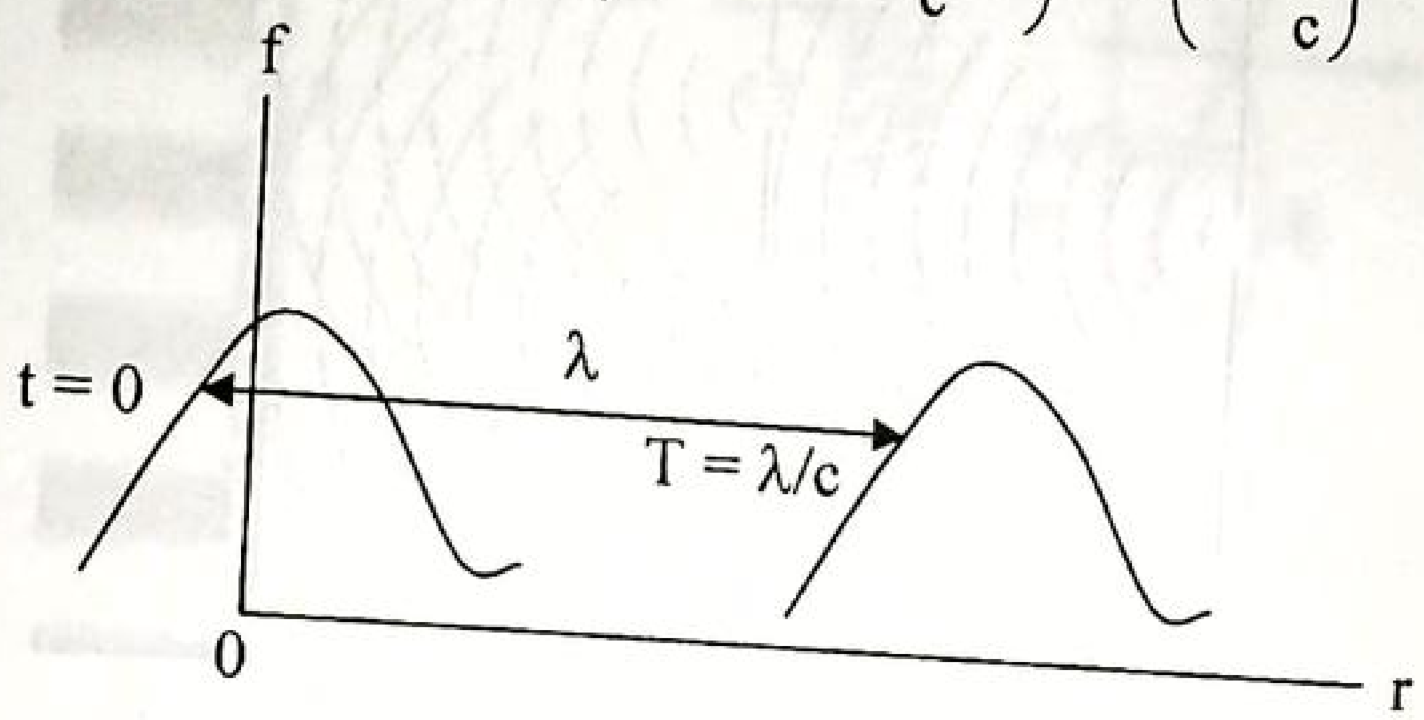
## 4.1- الانعراج

رأينا في الكهرطيسية أن حل معادلة الموجة، معادلة الحقل أو معادلة الكمون هو من الشكل

$$f\left(t-\frac{r}{c}\right)+g\left(t+\frac{r}{c}\right) \qquad (1.4)$$

ولم نأخذ بعين الاعتبار إلا الحل الأول $f\left(t-\frac{r}{c}\right)$ – الكمون المتأخر لأنه الوحيد الذي يعبر عن الواقع الفيزيائي. تعني هذه الدالة أن الراصد – الجهاز اللاقط أو شحنة التجربة – الواقع على بعد r من مصدر الموجة المنطلقة في لحظة ما $(t_0 = 0)$ لا يشعر بوجودها إلا بعد زمن t من انطلاقها، هو الزمن اللازم لحامل الموجة (الضوء هنا) لقطع المسافة r بالسرعة c. إن الموجة دالة دورية بالمتغيرين t و r لا تتغير عندما نضيف مقداراً ما T إلى الزمن ومسافة مقابلة λ إلى r بحيث يكون $T = \frac{\lambda}{c}$، الشكل.6. أي أن شكل الموجة ينطبق في اللحظات $t + nT$ والنقاط $r + n\lambda$ على شكله في اللحظة t والنقطة r.

$$T = \frac{\lambda}{c} \qquad f\left(t + nT - \frac{r + n\lambda}{c}\right) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{1.5}$$




الشكل. 6

يعبر عادة عن الدالات الدورية بسلاسل أو تكاملات فوريي أي بدليل الدالات المثلثاتية – بزاوية θ أو بمقلوبها التردد وأضعافها ولذا يفضل كتابة الدالة (1.5) بدليل السرعة الزاوية $\omega = \frac{2\pi}{T}$ أو بمقلوبها التردد $\upsilon = \frac{1}{\omega} = \frac{T}{2\pi}$ على الشكل التالي

$$f\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) = f\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \tag{1.6}$$

نرمز للمقدار $\frac{2\pi}{\lambda}$ بـ k ونسمي المتجهة $\frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}$ متجهة الموجة، حيث $\vec{e}$ هو اتجاه انتشار الموجة

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e} \tag{1.7}$$

كما نسمي المقدار $\frac{2\pi r}{\lambda}$ فرق الطور ونكتب الموجة على شكل تابع أسي عقدي في أي نقطة من الفضاء على الشكل

$$f\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) = A(\vec{r})e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tag{1.8}$$

تتوقف سعة الموجة $A(\vec{r})$ على بعد النقطة r عن مصدر الموجة وتتناسب بصورة عامة مع $\frac{1}{r}$ ويعبر مربعها $|A(\vec{r})|^2$ عن شدة الموجة.

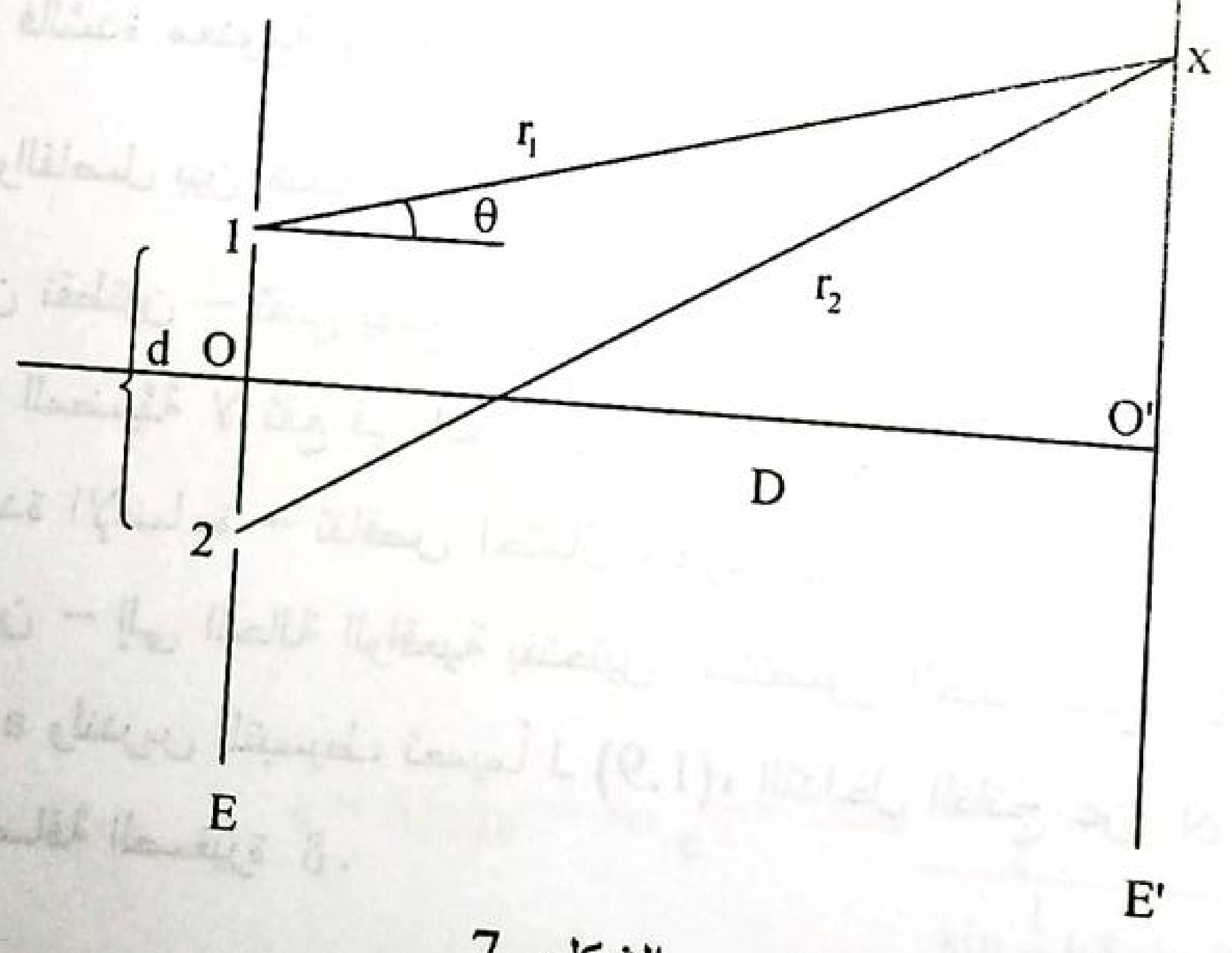
تنتشر الأمواج في كل الاتجاهات في الأوساط المتجانسة على شكل كرات تعين سطوحها المتباعدة عن بعضها بمسافات $n\lambda$ نفس قيمة الدالة – قيمتها العظمى مثلاً. تأخذ هذه السطوح شكل موجات مستوية عندما يصبح القطر $r$ كبيراً جداً. رأينا في حالة الضوء أنها مركبة من الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ المتعامدين والعموديين على منحى الانتشار. إن كونهما متعامدين لا يعني أن اتجاههما ثابت في المستوي سطح الموجة – إنهما ليسا مستقطبين في الحالة العامة. سنقبل من أجل الموجات المستوية ثبات السعة لأن تغيرها من نقطة إلى أخرى $r$، $r + \Delta r$ صغير جداً أمام $r$ الكبيرة جداً.

يصح ما قلناه هنا عندما لا ندخل في بعض التفاصيل – وجود الحقلين المتعامدين والعموديين على منحى الانتشار مثلاً – على كل الأمواج الضوئية والصوتية والسائلة.

a) لنبدأ الآن قبل دراسة الانعراج بالتذكير بالتداخل. تخضع الكهرطيسية مثلها مثل كل الفيزياء التي درسناها حتى الآن إلى مبدأ التوضيع : إن الموجة الناتجة في النقطة $x$ من الحاجز $E'$ عن الموجتين الآتيتين من النقطتين 1 و 2 من الحاجز $E$ الشكل 7. هي مجموع هاتين الموجتين وبما أن منشأهما واحد، سطح الموجة القادمة من $S$، فسعتهما واحدة ولدينا في النقطة $x$ من الحاجز $E'$ البعيد عن $E$ بالمسافة $D$

$$\varepsilon = A\, e^{i(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda})} + A\, e^{i(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda})} = \phi_1 + \phi_2 \qquad (1.9)$$

حيث $\varepsilon$ هو الحقل الكهربائي في النقطة $x$.




الشكل. 7

حيث $d$ هي المسافة الفاصلة بين النقطتين 1 و 2

لدينا

$$r_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

و

$$r_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$$

نكتبهما على الشكل

$$r_{1,2} = D\left(1 + \left(\frac{x \mp d/2}{D}\right)^2\right)^{1/2} \quad ; \quad x \mp d/2 << D \text{ ومنه}$$

$$r_{1,2} = D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x \mp d/2}{D}\right)^2\right)$$

وبالتالي فإن فرق الطريق بين سطحي الموجة في النقطة $x$

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{D}\left((x + d/2)^2 - (x - d/2)^2\right)$$

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{D} \tag{1.10}$$

إن شدة الموجة في $x$ هي جداء (1.9) بمرافقها العقدي

$$|\varepsilon|^2 = I = A^2\left(e^{i(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda})} + e^{i(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}\right)\left(e^{-i(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda})} + e^{-i(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}\right)$$

$$= A^2\left(2 + e^{i(k(r_1 - r_2))} + e^{-ik(r_1 - r_2)}\right)$$

حيث وضعنا $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. ومنه

$$= 2A^2\left(1 + \cos k(r_1 - r_2)\right) = 4A^2\cos^2\left(\frac{kxd}{2D}\right) = |\phi_1 + \phi_2|^2 \tag{1.11}$$

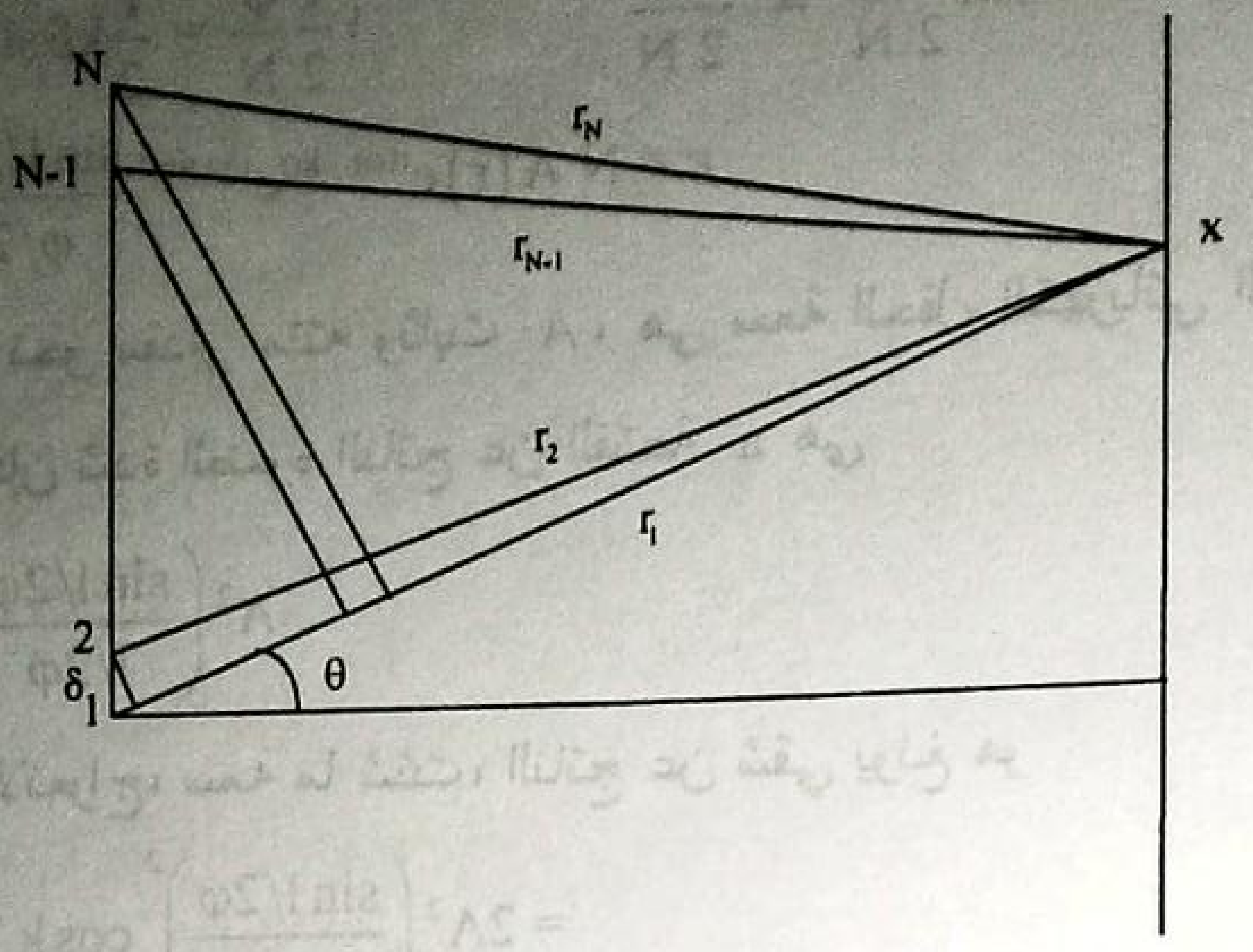
عندما يكون $\frac{kxd}{D} = 2n\pi$ فالشدة أعظمية ونحصل على الأهداب المضيئة؛ أما عندما يكون $\frac{kxd}{D} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ فالشدة معدومة والأهداب مظلمة. تقع الأهداب المضيئة في النقاط $x = n\frac{\lambda D}{d}$ (النقطة $O'$ مضيئة) والفاصل بين هدبين مضيئين متجاورين هو $\Delta x = \frac{\lambda D}{d}$.

b) لا يقع التداخل بين نقطتين – ثقبي يونغ – وإنما بين فتحتين، ويسمى عندئذ انعراج. إنه انعراج منذ البداية لأن النقطة $O'$ المضيئة لا تقع في اتجاه الأشعة، ولعل السبب في هذا التفريق غير المبرر في التسمية هو تناقص شدة الإضاءة – تناقص احتمال وجود الإلكترونات في حالتنا – عندما تنتقل من الحالة المثالية – نقطتين – إلى الحالة الواقعية بفتحتين. سنتصور الفتحة على شكل شق ضيق جداً – نهمل عرضه – طوله $a$ ولندرس للتبسيط، تعميماً لـ (1.9)، التداخل الناتج عن $N$ نقطة متجاورة تفصل بين الواحدة والأخرى المسافة الصغيرة $\delta$.

لدينا

$$r_1 = r_2 + \delta\sin\theta = \ldots = r_N + (N-1)\delta\sin\theta \tag{1.12}$$

حيث $\theta$ هي الزاوية بين اتجاه $r_1$ ومحور التناظر $SOO'$، الشكل.8.




الشكل. 8

سنفترض أن النقاط N واقعة كلها على نفس سطح الموجة أي أن المماس على الكرة التي قطرها Sx في النقطة 1 متطابق مع سطح الكرة ولا يوجد فرق طور بين مختلف النقاط. يمكننا إذاً تعميم العلاقة (1.9) من أجل هذه النقاط وكتابة التوضيع في النقطة x على الشكل

$$\varepsilon = A(r)\left(e^{i(\omega t - kr_1)} + \dots e^{i(\omega t - kr_n)}\right)$$

$$= A(r)e^{i(\omega - kr_1)}\left(1 + e^{ik(r_1 - r_2)} + \dots e^{ik(r_1 - r_n)}\right)$$

ويأخذ (1.12) بعين الاعتبار

$$= A(r)e^{i(\omega t - kr_1)}\left(1 + e^{ik\delta\sin\theta} + \dots e^{ik(N-1)\delta\sin\theta}\right)$$

لكن

$$1 + x^1 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

أي أن القوس يساوي $\frac{1 - e^{ikN\delta\sin\theta}}{1 - e^{ik\delta\sin\theta}}$

ومنه

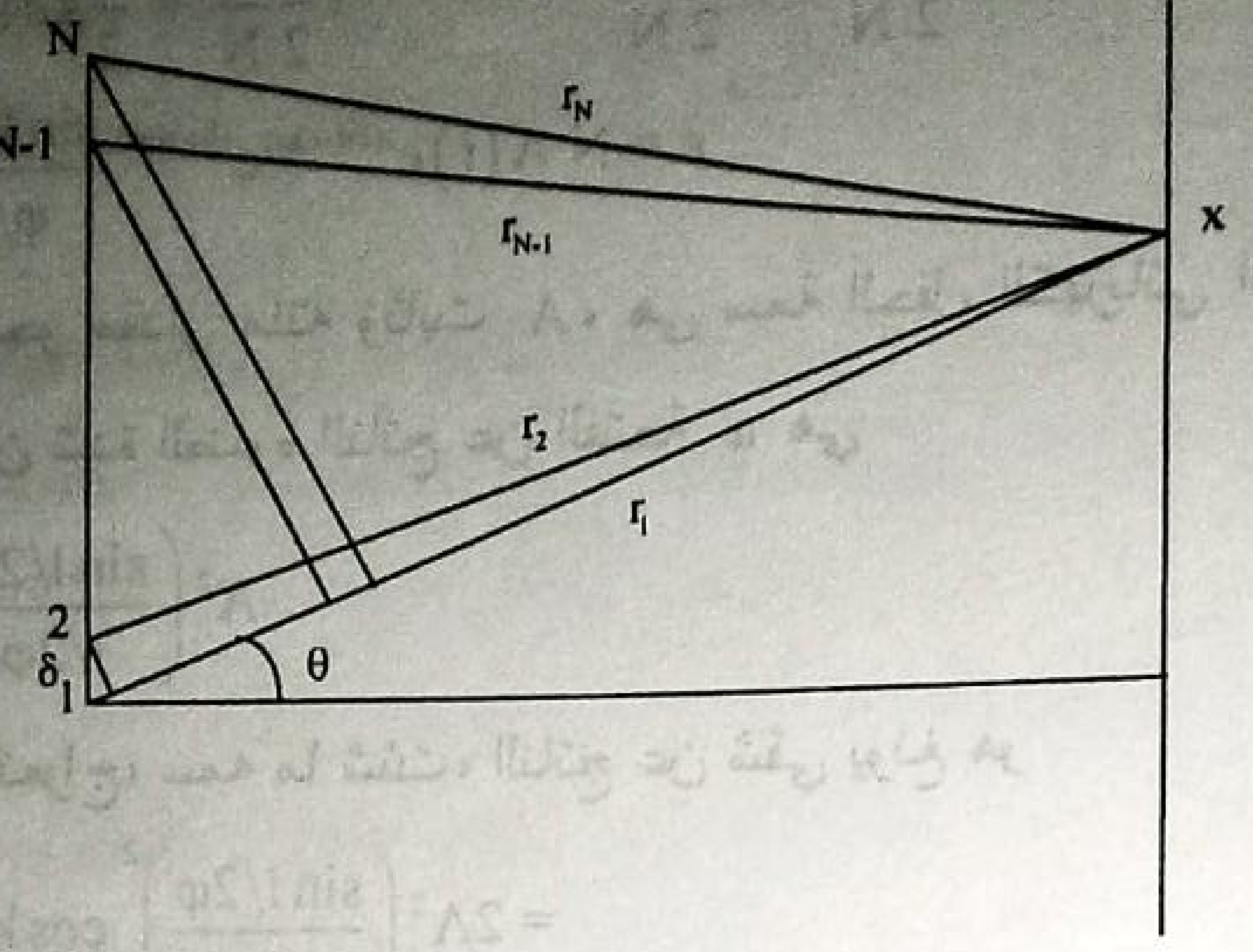
$$\varepsilon = A(r)e^{i(\omega t - kr_1)}\, e^{i\frac{k}{2}(N-1)\delta\sin\theta}\,\frac{\sin\frac{1}{2}kN\delta\sin\theta}{\sin\frac{1}{2}k\delta\sin\theta}$$

أي أن الشدة في النقطة x الناتجة عن N نقطة هي

$$\left(A(r)\frac{\sin 1/2kN\delta\sin\theta}{\sin 1/2k\delta\sin\theta}\right)^2 \qquad (1.12)'$$

عندما يصبح عدد النقاط N كبيراً جداً فإن $N\delta \to a$، حيث a طول الشق. نسمي φ المقدار

$$\varphi = Nk\delta\sin\theta \simeq ak\sin\theta$$




الشكل. 8

سنفترض أن النقاط N واقعة كلها على نفس سطح الموجة أي أن المماس على الكرة التي قطرها Sx في النقطة 1 متطابق مع سطح الكرة ولا يوجد فرق طور بين مختلف النقاط. يمكننا إذاً تعميم العلاقة (1.9) من أجل هذه النقاط وكتابة التوضيع في النقطة x على الشكل

$$\varepsilon = A(r)\left(e^{i(\omega t - kr_1)} + \dots e^{i(\omega t - kr_n)}\right)$$

$$= A(r)e^{i(\omega - kr_1)}\left(1 + e^{ik(r_1 - r_2)} + \dots e^{ik(r_1 - r_n)}\right)$$

وبأخذ (1.12) بعين الاعتبار

$$= A(r)e^{i(\omega t - kr_1)}\left(1 + e^{ik\delta\sin\theta} + \dots e^{ik(N-1)\delta\sin\theta}\right)$$

لكن

$$1 + x^1 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

أي أن القوس يساوي $\frac{1 - e^{ikN\delta\sin\theta}}{1 - e^{ik\delta\sin\theta}}$

ومنه

$$\varepsilon = A(r)e^{i(\omega t - kr_1)}\ e^{i\frac{k}{2}(N-1)\delta\sin\theta}\ \frac{\sin\frac{1}{2}kN\delta\sin\theta}{\sin\frac{1}{2}k\delta\sin\theta}$$

أي أن الشدة في النقطة x الناتجة عن N نقطة هي

$$\left(A(r)\frac{\sin 1/2kN\delta\sin\theta}{\sin 1/2k\delta\sin\theta}\right)^2 \qquad (1.12)'$$

عندما يصبح عدد النقاط N كبيراً جداً فإن $N\delta \to a$، حيث a طول الشق. نسمي φ المقدار

$$\varphi = Nk\delta\sin\theta \simeq ak\sin\theta$$

و

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi}{N} = \frac{1}{2}k\delta\sin\theta \quad ; \quad \sin\frac{1}{2}\frac{\varphi}{N} \simeq \frac{1}{2}\frac{\varphi}{N}$$

ومنه

$$\varepsilon = N\,A(r)\,e^{i(\omega t - kr)}e^{i\frac{1}{2}a\sin\theta}\,\frac{\sin 1/2\varphi}{\varphi/2}$$

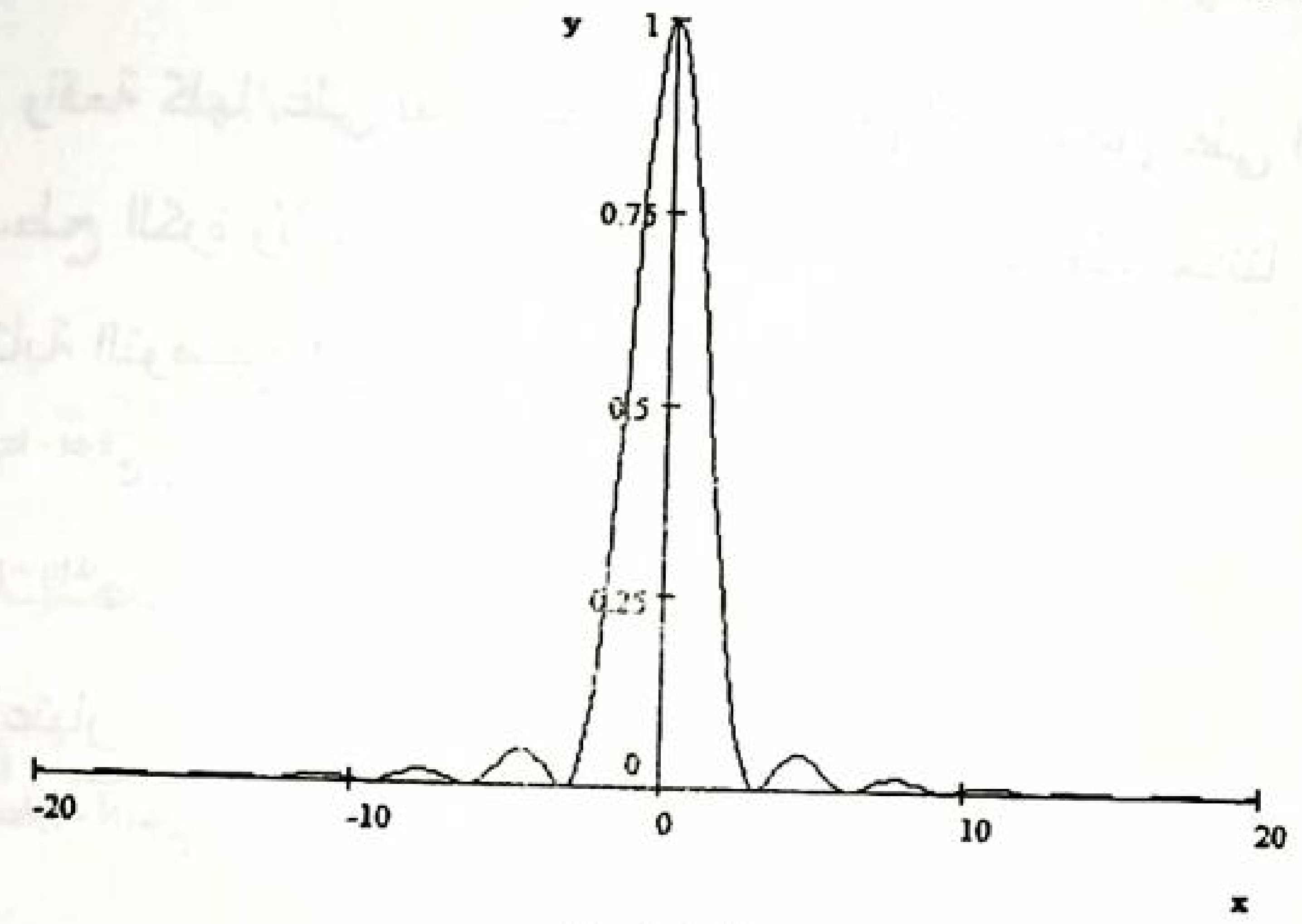
تتناهى السعة $NA(r)$ نحو مقدار منته وثابت $A$، هي سعة الحقل الكهربائي الناتج عن سطح الموجة المماس للشق وبالتالي فإن شدة الضوء الناتج عن الفتحة $a$ هي

$$A^2\left(\frac{\sin 1/2\varphi}{1/2\varphi}\right)^2$$

وهكذا فإن التداخل أو الانعراج، سمه ما شئت، الناتج عن شقي يونغ هو

$$= 2A^2\left(\frac{\sin 1/2\varphi}{1/2\varphi}\right)^2 \cos k\frac{xd}{D} \qquad (1.11)'$$

وهو الذي يعطينا الشكل.9.




الشكل.9

**ملاحظات :**

1- من المعلوم أن صورة التداخل لا تظهر إلا إذا كانت أبعاد الثقب صغيرة، عدداً محدوداً من أطوال الموجة لا يتجاوز المئات. ونريد هنا أن نستبق الأمور لنقول أن طول الموجة الإلكترونية أصغر بكثير من طول الموجة الضوئية بعشرات آلاف المرات. إنها معطاة بالعلاقة

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (1.13)$$

حيث $p$ اندفاع الإلكترون – اندفاع الجسيم أياً كان. وهكذا فإن تجربة فتحتي يونغ التي سنبني عليها النص على مبادئ الميكانيك الكمومي ليست بالممكنة. إنها تجربة ذهنية Gedanken Experiment، بمعنى أنها ممكنة من حيث المبدأ وإن لم تكن محققة تجريبياً على هذا الشكل[1]. أما الواقع التجريبي

---

[1] تسمح التقنيات الحديثة بإجراء التجربة بجزيئات أكبر بكثير من الجسيمات الأولية – الإلكترونات. فقد أجرى فيزيائيون نمساويون هذه التجربة عام 1999 بجزيئات مؤلفة، كل واحدة منها، من حوالي 60 ذرة كربون.

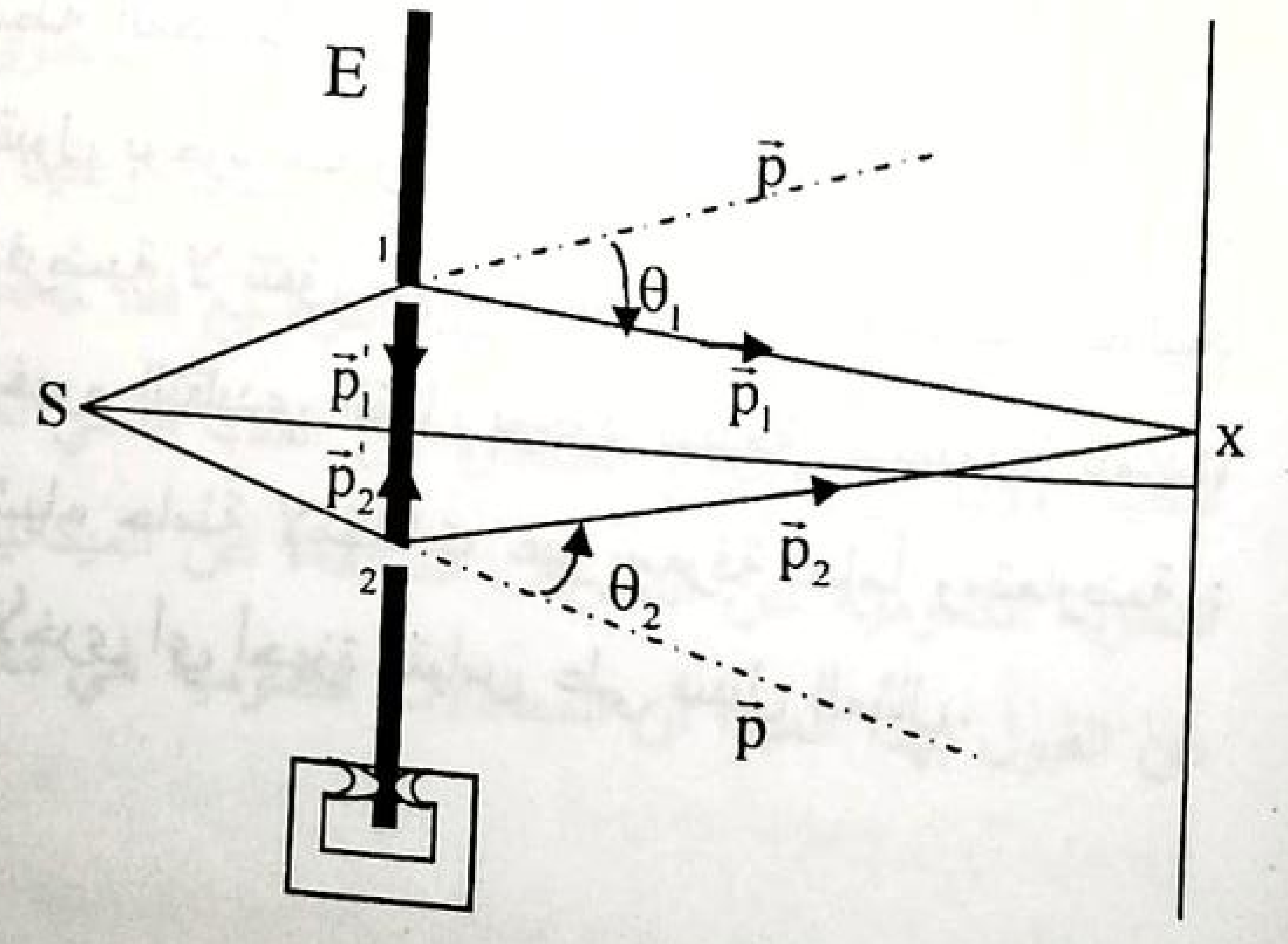
الفعلي فهو أكثر تعقيداً من هذه التجربة المتخيلة. إنه انعراج الإلكترونات في البلورات على سبيل المثال. شاع تعبير التجربة الذهنية كثيراً خلال العقود الأولى من القرن الماضي التي رافقت ولادة الميكانيك الكمومي.

2- إن سلوك الجسيم – الإلكترون – مقيد بطريقة ملاحظتنا له أي بطريقة القياس. فالاحتمال هو مجموع احتمالين $P_1 + P_2$ عندما نرصد مروره عبر الثقبين. والسلوك جسيمي – تقليدي – لكنه سلوك موجي – كمومي إذا لم نقم بهذا الرصد والاحتمال هو مربع (1.9)

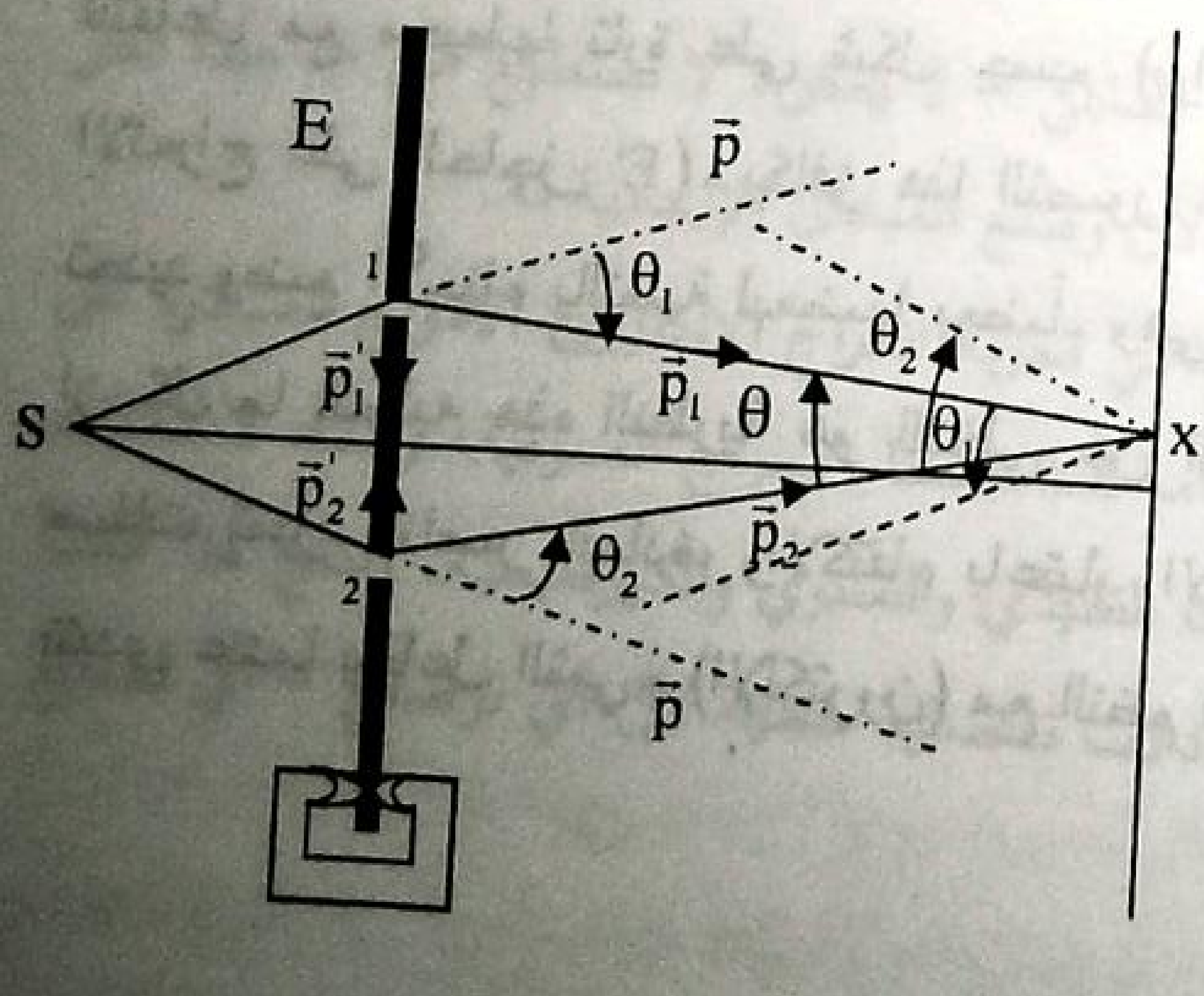
$$P = |\phi_1 + \phi_2|^2 \neq P_1 + P_2 \qquad (1.14)$$

فالقياس، تفاعل الجسيم مع جهاز القياس هو الذي يخرب السلوك الكمومي. يمكننا أن نبين ذلك في تفاعل الإلكترون مع الضوء الذي يبعثره عندما نضع الكاشف أمام الثقب. لكن الوقت لم يحن بعد للدخول في هذه التعقيدات ولذا سنكتفي بالتجربة الذهنية التالية لقياس الوضع والاندفاع : عندما ينعرج الإلكترون عن الاستقامة مع S حين يمر بالثقب فمعنى ذلك أنه اصطدم بحافة الثقب وفقد بالتالي مركبة اندفاعه الموازية لـ E والتي حصل عليها هذا الأخير حسب مبدأ انحفاظ الاندفاع. لنفرض أننا جهزنا الحاجز E بآلية تسمح له بالانزلاق، الشكل. 7'a. وبالتالي سينزلق – لنقل نحو الأسفل بمقدار $\Delta X$ يتناسب مع $\overline{\Delta p} = \vec{p}_1' - \vec{p}_2'$. ولدينا من أجل الزوايا الصغيرة جداً $p_1' = \theta_1 p$ ، $p_2' = \theta_2 p$ و $p$ هو ذاته في 1 و 2 ويساوي حسب (1.13) $p = \frac{h}{\lambda}$ و $\theta_1 - \theta_2$ هي بحدود الزاوية $\theta$ بين الطريقين $x \to 1$ و $x \to 2$ أي بحدود $\frac{d}{D}$. كما يبين الشكل. 7'b عند ابتعاد S إلى اللانهاية، وتوازي اتجاه الإلكترونين الواردين أن $\theta$ تصبح مساوية لـ $\theta_1 - \theta_2$. ومنه

$$\Delta p = |p_1' - p_2'| = |\theta_1 - \theta_2| p = \frac{d}{D}\frac{h}{\lambda} \qquad (1.15)$$



الشكل. 7'a



الشكل. 7'b

أن نستطيع التأكد من أن Δp لكي نستطيع التأكد من أن $p_1$ مثلاً : يجب القيام بقياس أدق من Δp لكي نستطيع التأكد من أن هذا المقدار هو اللادقة في معرفة $p_1$ مثلاً ناتج عن انعراج الإلكترون المنعرج من الثقب 1. يمكننا تغير اندفاع الحاجز E وتحركه نحو الأسفل مثلاً ناتج عن انعراج الإلكترون المنعرج من الثقب 1 أيضاً. رأينا أن هذا القياس يخرب صورة كذلك قياس الوضع، تحديد مجيء الإلكترون من الثقب 1 أيضاً. رأينا أن هذا القياس يخرب صورة التداخل مؤدياً إلى انطباق الهدب المضيء – الهدب ذي الاحتمال الأكبر – مع الهدب المظلم. يجب إذاً أن يقع عدم تحديد في معرفة وضع الثقب بمقدار هو نصف المسافة الفاصلة بين هدبين مضيئين كحد أدنى وإلا لما أمكن القياس ولبقيت صورة التداخل على حالها. ومنه

$$\Delta x \geq \frac{\lambda D}{2d} \quad (1.16)$$

نرى من هاتين العلاقتين أن

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2} \quad (1.17)$$

3- إن مما لاشك فيه أن الإلكترون عندما نرصده خلف E يمر بأحد الثقبين ويمر بكامله، لا تجزئة في شحنته أو كتلته. هذا ما يبينه الرصد. إلا أن جمع الاحتمالات خاطئ. إن هذا الجمع ناتج عن الخيار المستبعد : إما من هذا الثقب، 1، والاحتمال $P_1$ أو من ذاك، 2، والاحتمال $P_2$. أما الخيار الآخر، خيار التداخل فهو اختيار التوفيق؛ اختيار النظر إلى الثقبين معاً وعدم محاولة تحديد الثقب الذي مر منه الإلكترون. لا يجمع هذا الاختيار الاحتمالات – التي لا يريد معرفتها لأنها تخرب الصورة الكمومية – الموجية – وإنما يجمع الموجات $\phi_1$ و $\phi_2$ كما في (1.9) والاحتمال هو $|\phi_1 + \phi_2|^2$ كما في (1.11). إن المظهر الموجي، مثله مثل المظهر الجسيمي، واقع لاشك فيه. ولكن هل يعني ذلك أن الإلكترون قد مر من الثقبين من آن واحد، أو بشكل أكثر دقة من كل نقطة من نقاط الثقبين ؟ أو أنه انقسم ثم تجمع ليشكل الإلكترون المعروف بشحنته وكتلته اللتين يقيسهما الجهاز على الحاجز E أو الحاجز E'؟ يجب توخي الحذر وعدم تصور بنية معقدة لهذا الشيء الذي نسميه إلكترون تجعل أجزاءه تتراكب فيما بينها لتتفاعل مع محيطها تارة على شكل جسيم (بواسطة المكشاف) وتارة أخرى على شكل موجة (صورة الانعراج على الحاجز E'). يكافئ هذا التصور القبول بوجود متغيرات خفية تستطيع على سبيل المثال تحديد وضع الأجزاء بالنسبة لبعضها بعضاً. وهي فرضية لا تتفق مع صياغة النظرية الكمومية الحالية. إن كل ما تتطلبه هذه النظرية هو التخلي عن المفهوم التقليدي القائل بوجود طبيعة "صميمية" للمادة، صفات تميز عناصر المادة، والاكتفاء باعتبار الأشياء حاملة لإمكانات غير معرفة تماماً ومتعارضة : تتبدى عندما يتفاعل الشيء (الإلكترون) مع النظم الأخرى أي أجهزة القياس على سبيل المثال.

## 2. مبادئ الميكانيك الكمومي

### 1.2- مبدأ التقابل لبور Bohr

يختلف الميكانيك الكمومي في علاقته مع الميكانيك التقليدي عن النظريات الفيزيائية الأخرى التي تعمم نظريات سابقة وتقبلها كتقريب أولي ولكنها لا تحتاج إلى هذه النظريات السابقة في صياغتها. فالنسبية الخاصة التي درسناها في الكتاب الأول تحتوي على الميكانيك التقليدي كتقريب أولي لها ولكنها لا تتطلب منه شيئاً في صياغتها. أما الميكانيك الكمومي الذي يحتوي على الميكانيك التقليدي كتقريب أولي له، عندما ننظر إلى $h$ كمتناه في الصغر أمام الأفعال الأخرى، فإنه يتعامل مع هذا الميكانيك لتعيين المقادير الفيزيائية والمتغيرات الديناميكية، الوضع والسرعة مثلاً، التي يمكنها أن تميز الجسيم ولكن الجسيم لا يمتلكها ذاتياً، إنها تتعين نتيجة القياس؛ والقياس بصورة عامة هو تفاعل الجسيم مع جهاز يخضع للميكانيك التقليدي في نهاية المطاف. إن قياس الشحنة أو فرق الكمون هو بتحرك مؤشر أمام لوحة مدرجة وتعيين "مسار" الإلكترون في حجرة ويلسون هو برصد آثار الضباب الذي يخلفه وراءه[2]. وهكذا لا يمكن فصل قوانين الميكانيك الكمومي عن قوانين الميكانيك التقليدي المعبر عنها بالقياس. هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن التنبؤ بنتيجة كمومية هو تنبؤ احتمالي كما رأينا، أي أنه لا ينطبق على جسيم بمفرده وإنما على عينة كبيرة من الجسيمات وكلما كبرت العينة أصبح التنبؤ الإحصائي أقرب إلى اليقين. وهكذا ينص مبدأ التقابل :

"يجب صياغة القوانين الكمومية بحيث تقود في التقريب التقليدي – عندما يصبح عدد الأفعال الكمومية كبيراً جداً – إلى المعادلات التقليدية كقيم وسطية".

وهكذا نكون قد أضفنا إلى مبدأ اللاتحديد، ذي المحتوى السلبي – لا يمكن، لا نستطيع الخ –، مبدأ آخر يضع الإطار لصياغة مبادئ الميكانيك الجديد. وعلينا الآن وضع المبادئ الإيجابية له. أول هذه المبادئ الإيجابية هو مبدأ التوضيع فقد جمعنا في تجربة انعراج الإلكترون الأمواج الصادرة عن الثقب الأول مع الأمواج الصادرة عن الثقب الثاني تماماً كما جمعنا الأمواج الضوئية؛ وبذلك لا تختلف النظرية الكمومية عن النظريات السابقة، عن الميكانيك التقليدي والنسبوي والكهرطيسية. وينتج هنا أيضاً عن القبول بهذا المبدأ أن المعادلات الكمومية هي معادلات تفاضلية خطية لأن أي توضيع – أي تجميع

[2] يأين الجسيم – الإلكترون هنا – عدداً من الذرات أثناء مروره وتصبح هذه الذرات المؤينة مراكز تكثف تتجمع حولها قطيرات مرئية بالعين المجردة تحدد وضع الإلكترون بدقة لا تزيد عن أبعاد الذرة المؤينة.

وإذا كان هذا المبدأ صالحاً لكل الحلول التي تصف الحالات الكمومية فهو مبدأ عام لكل خطي – للحلول هو حل أيضاً. لن نضع هذا المبدأ مبدأ من مبادئ الميكانيك الكمومي فهو مبدأ عام لكل النظريات الفيزيائية[3].

إلا أن هناك فارقاً أساسياً من حيث التطبيق بين الفيزياء التقليدية والميكانيك الكمومي، ذلك أن الشروط البدائية في الفيزياء التقليدية تقيد التوضيع وتلزم باختيار أحد الحلول بينما يتعذر هذا التقييد في الميكانيك الكمومي الذي لا يتوفر على شروط بدائية حسب مبدأ اللاتحديد. إن عملية القياس هي التي تزيل التوضيع في الميكانيك الكمومي كما سنرى في الفقرة 4.

## 2.2– المبدأ الأول – دالة الموجة

رأينا أن الموجة التي تعرفنا بالحالة الديناميكية للإلكترون – أو للجسيم بصورة عامة – هي على غرار الموجة الضوئية دالة تابعة لـ $(\vec{r}, t)$ سنرمز لها من الآن فصاعداً بـ $\psi(\vec{r}, t)$. كما رأينا أن مربع هذه الدالة يعين احتمال وجود الجسيم في النقطة $\vec{r}$ في لحظة معينة $t_o$ – تماماً كما يعين مربع الموجة الضوئية شدة الضوء. معنى ذلك أن $\left|\psi(\vec{r})\right|^2 = \psi(\vec{r})\overline{\psi(\vec{r})}$، حيث تشير العارضة – على المرافق العقدي، هو احتمال الوجود في النقطة $\vec{r}$.

نسمي المقدار $\left|\psi(\vec{r})\right|^2 d\vec{r}$ كثافة احتمال الوجود في عنصر الحجم $d\vec{r}$. وبما أن وجود الجسيم أمر مؤكد فإن الاحتمال الكلي من أجل كل نقاط الفضاء مساو للواحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi(\vec{r})\right|^2 d\vec{r} = 1 \qquad (2.1)$$

نعبر عن هذه العلاقة بقولنا إن الدالة $\psi$ ذات مربع جموع : تكامل هذا المربع على كل الحجم الإقليدي من $-\infty$ إلى $+\infty$ منته – ونقول إن متقارب.

أما كونه مساوٍ للواحد فأمر ثانوي إذ إنه من الممكن دوماً ضرب الدالة $\psi$ بعدد ما بحيث يصبح التكامل مساوياً للواحد ونقول عندئذ إن الدالة منظمة، Normalized.

رأينا من جهة أخرى أن الاحتمال الناتج عن الثقبين – والذي يميز الميكانيك الموجي هو حسب (1.14)

$$P = \left|\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})\right|^2 \qquad (2.2)$$

معنى ذلك أنه إذا كانت كل من الدالتين $\psi_1$ و $\psi_2$ ذات مربع جموع فإن مجموع الدالتين ذو مربع جموع. وواضح أن جداء دالة $\psi$ ذات مربع جموع بعدد عقدي ثابت لا يغير شيئاً من هذه الخاصة وأن الدالة المساوية للصفر ذات مربع جموع. نعبر عن هذا كله بقولنا إن الدالات ذات المربع الجموع تشكل فضاء متجهياً لامتناهي الأبعاد على حقل الأعداد العقدية – تعيين $\psi$ يقتضي معرفة عدد، عدود على الأقل من

---

[3] تشذ نظرية المعايرة التي تعمم نظرية الحقول المكممة عن هذه القاعدة ومعادلاتها – معادلات يانغ وميلس Yang-Milles – معادلات غير خطية لا ينطبق فيها مبدأ التوضيع ويتفاعل فيها الحقل مع ذاته.

متجهات القاعدة. يمكننا النظر إلى العلاقة (2.1) كجداء للمتجهة $\psi$ بذاتها تعرف – مع اختلاف بسيط سنبينه – طويلة المتجهة – نظيم المتجهة norm ونكتبه على الشكل

$$\langle\psi|\psi\rangle \equiv \iiint|\psi(\vec{r})|^2\, d\vec{r} \qquad (2.1)'$$

ونعرف بشكل أعم الجداء السلمي لمتجهتين $\psi_1$ و $\psi_2$ – لدالتين ذات مربع جموع بالعلاقة

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \iiint \bar{\psi}_2(\vec{r})\, \psi_1(\vec{r})\, d\vec{r}$$

ليس هذا الجداء متناظراً بالنسبة للمتجهتين وهو الاختلاف الذي أشرنا إليه :

إن
$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \overline{\langle\psi_1|\psi_2\rangle} \qquad (2.3)$$

إن الجداء ثنائي الخطية بمعنى

$$\begin{cases} \langle\psi_2 + \psi_2'|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle + \langle\psi_2'|\psi_1\rangle \\ \text{و} \\ \langle\psi_2|\psi_1 + \psi_1'\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\psi_1'\rangle \end{cases} \qquad (2.4)$$

وكذلك

$$\langle\psi_2|\lambda\psi_1\rangle = \lambda\langle\psi_2|\psi_1\rangle \qquad (2.5)$$

لكن هذه العلاقة و(2.3) تبينان أن

$$\begin{aligned} \langle\lambda\psi_2|\psi_1\rangle &= \overline{\langle\psi_1|\lambda\psi_2\rangle} = \bar{\lambda}\overline{\langle\psi_1|\psi_2\rangle} \\ &= \bar{\lambda}\langle\psi_2|\psi_1\rangle \end{aligned} \qquad (2.6)$$

أي أن هذا الجداء السلمي خطي من أجل $\langle\psi_1|$، على اليمين، ومضاد الخطية من أجل $|\psi_2\rangle$، على اليسار – إنه خطي ونصف (قسمنا ما بين المعقوفتين Bracket إلى قسمين : القسم الأول ورمزنا للمتجهة بـ $\langle\psi|$ وسميناها ket – حيث الخطية – ورمزنا إلى القسم الأيسر بـ $|\psi\rangle$ حيث الخطية المضادة وسميناها bra. ليس لهذه التسمية أية أهمية سوى كونها شائعة ومسلية !).

نسمي الفضاء المتجهي الذي يتمتع بالصفات المذكورة أعلاه فضاء هيلبرت[4] أو فضاءً هيلبرتياً Hilbert. سنكتب الدالة $\psi$ على الشكل $\langle\psi|$ عندما نريد التركيز على طابعها المتجهي. ونصيغ المبدأ الأول على النحو التالي :

م.1 تتمثل الحالات الديناميكية بمتجهات تنتمي إلى فضاء هيلبرتي نطلق عليها اسم دالة الموجة أو متجهة الحالة.

لنلاحظ أن $\langle\psi|$ هي أفضل تمثيل ممكن لحالة الجسيم ولكنها لا توصف هذه الحالة توصيفاً تاماً وإلا لم يعد ثمة حاجة إلى الاحتمالات في التنبؤ. إن فيها مثلاً العلم اليقين عن بعض المتغيرات الديناميكية للجسيم، لنقل وضعه، ولكنها تتجاهل تماماً اندفاعه الذي لا تعلم عنه شيئاً. قد تبدو هذه الملاحظة تافهة

---

[4] سنعطي في الفصل الخامس المخصص للإطار الرياضي بعض خواص الفضاء الهيلبرتي بالإضافة إلى الحد الأدنى من المطلوب معرفته رياضياً للتعامل مع النظرية الكمومية.

لولا الجدل الذي أثارته مقالة لأنشتاين – بودولسكي وروزن عام 1935 وما طالب به آنشتاين : قولوا لنا إن $\psi$ ليست توصيفاً تاماً Complet.

كان آنشتاين يرفض البنية الاحتمالية للمادة التي ترتكز عليها كل مفاهيم الميكانيك الكمومي ويؤمن بوجود متغيرات خفية (ثبت منذ عام 1986 استحالة وجودها ضمن إطار الميكانيك الكمومي الحالي) تجعل من الميكانيك الكمومي علماً يقينياً كما هو عليه الحال في الفيزياء التقليدية. أما دالة الموجة فتعرف نوعين من الاحتمالات، احتمال وجود الجسيم في حيز من الفضاء أو احتمال تمتعه باندفاع محدد. وهما احتمالان لا يتواءمان نظراً لمبدأ اللاتحديد. أو بتعبير آخر، لا تستطيع متجهة الحالة تعريف المظهر الذي سيبدو عليه الإلكترون : سلوك جسيمي حسب الاحتمال الأول أو سلوك موجي حسب الاحتمال الثاني. إنهما احتمالان يعبران عن إمكانيتين متعارضتين تتمم كل واحدة منهما الأخرى؛ وهذا ما يعبر عنه مبدأ المتمماتية Complementarity لنيلز بور :

يمكن التعبير عن الخواص الفيزيائية لنظمة كمومية بواسطة أزواج من المتغيرات يُحدد أحدهما بدقة على حساب المتغير الآخر : يقابل التعريفَ الدقيق للأول ضياع كلي لتعريف الآخر. تُشكل العزوم المترافقة $\vec{r}$ و $\vec{p}$؛ E و t أحد أوسع الأمثلة انتشاراً لهذا المبدأ وإن لم تكن المثال الوحيد.

## 3.2- المؤثرات ذاتية الترافق (Self adjoint)

لقد أصبح من المستحيل كما قلنا في مطلع هذا البحث التعبير عن المقادير الفيزيائية بدالات عددية لأن الترتيب في قياس مقدارين ما – الوضع والاندفاع – أصبح مهماً حسب مبدأ اللاتحديد. إن الحالة الفيزيائية التي نحصل عليها بقياس أحدهما أولاً ثم بقياس الآخر تختلف عن الحالة الفيزيائية التي نحصل عليها عندما نبدل الترتيب. لابد إذاً من التعبير عن المقادير الفيزيائية بمؤثرات خطية تطبق على المتجهة $|\psi\rangle$ المنتمية إلى الفضاء الهيلبرتي لتعطي متجهة أخرى تنتمي إلى ذات الفضاء. لنرمز للمؤثر، المقابل لمقدار فيزيائي ما بـ A مثلاً، لدينا

$$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle \tag{2.7}$$

وبما أن الفضاء الهيلبرتي لامتناهي الأبعاد فإن A تمثل – عندما نعين متجهات القاعدة – بمصفوفة عدد سطورها وأعمدتها لامنته.

نقول عن متجهة $|\psi\rangle$ إنها متجهة خاصة للمقدار الفيزيائي A وإن قيمتها الخاصة هي a عندما تتحقق العلاقة

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle \tag{2.8}$$

ونعني بها أن نتيجة قياس المقدار الفيزيائي الممثل بـ $A$ عندما يكون الجسيم في الحالة $\langle\psi|$ هي العدد $a$.

لابد أن تكون نتيجة القياس عدداً حقيقياً، لابد من أن يتمتع المؤثر $A$ بصفات محددة :

لنذكر أننا كتبنا (انظر ملحق الفصل الخامس – I، الذي أعدنا نسخه في ملحق الفصل التاسع من هذا الكتاب) الجداء السلمي لمتجهتين $x, y \in E$ حيث $E$ فضاء متجهي على حقل الأعداد السلمية $K$ على شكل تطبيق خطي لـ $E$ في حقل الأعداد السلمية وذلك باستبدالنا بـ $y \in E'$ $Gy$ حيث $E'$ ثنوي الفضاء $E$، أي فضاء التطبيقات الخطية لـ $E$ في $K$. وكتبنا الجداء السلمي على شكل جداء داخلي.

$$y \cdot x = x \cdot y = (x, y) = \langle x|y\rangle$$

حيث $\langle y| = Gy \in E'$.

بينا كذلك عندما نكتب المؤثر $A$ على شكل مصفوفة أي عندما نزود الفضاء $E$ بقاعدة معينة أن المصفوفة الواجب تطبيقها على التطبيق الخطي $\phi \in E'$ هي منقول المصفوفة $A$ أي من أجل

$$x' = Ax$$

$$\phi(x') = \langle\phi|Ax\rangle = \langle\tilde{A}\phi|x\rangle$$

لن نغير هنا، من الناحية الجبرية، إلا أخذ تضاد الخطية في الجداء السلمي في $\mathcal{H}$ بعين الاعتبار وكتابة الجداء السلمي على شكل تطبيق خطي أي من أجل أي متجهتين $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$

$$\langle\psi'|A\psi\rangle = \langle\bar{\tilde{A}}\psi'|\psi\rangle \quad (2.9)$$

تعني هذه الكتابة أننا لا نميز بين الجداء السلمي : $\mathcal{H} \ni \langle\psi|$ و $|\psi'\rangle$ وبين الشكل الخطي : $\mathcal{H} \ni \langle\psi|$ و $\mathcal{H}' \ni |\psi'\rangle$ حيث $\mathcal{H}'$ هو ثنوي الفضاء الهيلبرتي. سنرى في الفصل الخامس أن ثنوي الفضاء الهيلبرتي $\mathcal{H}'$ متطابق مع $\mathcal{H}$ : $\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}$ وعدم التمييز بين الجداء السلمي والشكل الخطي (المسمى جداءً داخلياً) مبرر تماماً مادام الجداء منتهياً.

إن $\bar{\tilde{A}}$ هي المصفوفة المرافقة عقدياً لمنقول المصفوفة $A$. نرمز لهذه المصفوفة بـ $A^\dagger$

$$A^\dagger = \bar{\tilde{A}} = \tilde{\bar{A}} \quad (2.10)$$

ونسميها المصفوفة المرافقة لـ $A$ : كل عنصر من عناصرها $\alpha^i_j$ هو بدليل عناصر $A$، $a^i_j$

$$\alpha^i_j = \overline{a^j_i} \quad (2.10)'$$

ونكتب (2.9) على الشكل

$$\langle\psi'|A\psi\rangle = \langle A^\dagger\psi'|\psi\rangle \quad (2.9)'$$

**تعريف 1 :**

نقول عن مؤثر $A$ في الفضاء الهيلبرتي إنه ذاتي الترافق إذا تحققت العلاقة

$$A^{\dagger} = A \quad (2.11)$$

لتكن $\langle\psi|$ متجهة خاصة للمؤثر A ذاتي الترافق تقابلها القيمة الخاصة a. لدينا حسب $(2.9)'$ و(2.11)

$$\langle\psi|A\psi\rangle = a\langle\psi|\psi\rangle = \langle A\psi|\psi\rangle = \bar{a}\langle\psi|\psi\rangle \quad (2.12)$$

و a عدد حقيقي. ومنه المبدأ الثاني.

م.2 نعبر عن كل مقدار فيزيائي بمؤثر ذاتي الترافق يفعل في الفضاء الهيلبرتي.

ولنلق الآن نظرة أولى سريعة على خواص المؤثرات.

**مبرهنة 1 :**

إن المتجهات الخاصة المقابلة لقيم خاصة مختلفة متعامدة فيما بينها (جداؤها السلمي يساوي الصفر).

لتكن $\langle\psi_1|$ و $\langle\psi_2|$ متجهتين خاصتين تقابلهما القيمتان الخاصتان $a_1$ و $a_2$. لدينا

$$\langle\psi_2|A\psi_1\rangle = a_1\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

ولكنها أيضاً حسب (2.12)

$$\langle A\psi_2|\psi\rangle = a_2\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

و $(a_1 - a_2)\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$ ومنه تعامد $\psi_1$ مع $\psi_2$ : $\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$ لأن $a_2 - a_1 \neq 0$.

تعني هذه المبرهنة أنه من الممكن تجزئة فضاء هيلبرت إلى فضاءات جزئية متعامدة كل واحد منها تعينه إحدى القيم الخاصة لـ A. وإذا كانت كل هذه القيم مختلفة الواحدة عن الأخرى، فتشكل المتجهات الخاصة عندئذ قاعدة متعامدة للفضاء، ومنظمة ($1 = \langle\psi_n|\psi_n\rangle$) نرمز لعناصرها بـ $\langle\psi_1|$، $\langle\psi_2|$ ... $\langle\psi_n|$... بحيث يمكن كتابة أي متجهة $\langle\psi|$ فيه على الشكل

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|\psi_n\rangle \quad (2.13)$$

ونقول في هذه الحالة إن القيم الخاصة غير متدنية nondegenerate. كما نقول إن المتجهات $\langle\psi_n|$ تشكل نظمة تامة. تفترض هذه المحاكمة أن كل القيم الخاصة قيم منفصلة، أن طيف المقدار الفيزيائي المدروس طيف منفصل. سنرجئ إلى ما بعد دراسة الطيف المتصل وإعادة كتابة العلاقة (2.13) والعلاقات التالية الناتجة عنها.

ينتج عن (2.13) أن مربع نظيم المتجهة $\langle\psi|$، مربع الطويلة. يساوي مجموع مربع المركبات $\alpha_n$. لدينا بالفعل :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle\alpha_m\psi_m|\alpha_n\psi_n\rangle = \sum_{n,m}\bar{\alpha}_m\alpha_n\langle\psi_m|\psi_n\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n,m}\bar{\alpha}_m\alpha_n\delta_{mn} \quad (2.14)$$

حيث $\delta_{mn}$ رمز كرونكر المساوي للواحد من أجل $m = n$ : $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1$ وللصفر من أجل $m \neq n$ (المتجهتان متعامدتان) $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = 0$، وحيث استعملنا خاصة نصف الخطية (تضاد الخطية) (2.6).

وإذا كانت متجهة الحالة $|\psi\rangle$ منظمة هي أيضاً : $\langle \psi | \psi \rangle = 1$، فإن

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_n |\alpha_n|^2 \qquad (2.14)'$$

تعني هذه العلاقة أن الطرف الثاني هو مجموع احتمالات وأن $|\alpha_n|^2$ هو احتمال وجود متجهة الحالة $|\psi\rangle$ في الحالة $|\psi_n\rangle$. إن القيمة التي يأخذها A في الحالة $|\psi_n\rangle$ هي القيمة الخاصة $a_n$ ولذا فإن احتمال أخذه هذه القيمة هو $|\alpha_n|^2$ ووسطي قيمة A ونرمز له بـ $\langle A \rangle$ هو تعريفاً مجموع هذه القيم (كل قيمة خاصة مضروبة باحتمال الحصول عليها) ونكتب

$$\langle A \rangle = \sum_n a_n |\alpha_n|^2 \qquad (2.15)$$

إلا أن $A|\psi\rangle = \sum_n a_n \alpha_n |\psi_n\rangle$ وضرب هذه المتجهة على اليسار بـ $\langle \psi|$ هو

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_{n,m} a_n \bar{\alpha}_m \alpha_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle$$

$$= \sum_n a_n |\alpha_n|^2$$

أي أن القيمة الوسطية لـ A هي

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_n a_n |\alpha_n|^2 \qquad (2.16)$$

عندما تكون $|\psi\rangle$ إحدى المتجهات الخاصة لـ A، $|\psi_n\rangle$ مثلاً، فإن كل الاحتمالات $|\alpha_n|^2$ تساوي الصفر ماعدا $|\alpha_n|^2 = 1$؛ والقيمة الخاصة $a_n$ قيمة يقينية.

$$\langle \psi_n | A | \psi_n \rangle = a_n \qquad (2.16)'$$

سنعمم هذه العلاقة التي حصلنا عليها في حالة وجود طيف منفصل ونضع كمبدأ :

م3. إن القيمة الوسطية لدالة ما $F(A)$ بالمتغير A (بالمقدار الفيزيائي (المؤثر)) محددة بالعلاقة

$$\langle F(A) \rangle = \langle \psi | F(A) | \psi \rangle \qquad (2.17)$$

**ملاحظات :**

1- لنلاحظ أنه ليس من الممكن دوماً وجود قاعدة في الفضاء الهيلبرتي مؤلفة من المتجهات الخاصة لمؤثر ذاتي الترافق : يجب أن تكون القيم الخاصة مختلفة عن بعضها ومنه

**تعريف 2 :**

نقول عن مؤثر ذاتي الترافق إنه رصود Observable عندما تكون متجهاته الخاصة قاعدة للفضاء الهيلبرتي، ليس من الضروري أن تكون القيم الخاصة غير متدنية.

2- يمكننا القول وقد عبرنا عن المقادير الفيزيائية بمؤثرات (ذاتية الترافق)، تفعل في الفضاء الهيلبرتي، غير تبادلية بصورة عامة $AB \neq BA$، حالها حال المصفوفات، إن الانتقال من الميكانيك التقليدي إلى الميكانيك الكمومي هو انتقال من الجبر التبادلي، جبر الدالات، إلى الجبر غير التبادلي جبر المؤثرات ولذا فمن الأهمية بمكان معرفة العلاقة بين $AB$ و $BA$.

**تعريف 3 :**
نسمي المقدار $AB - BA$، حيث $A$ و $B$ مؤثران ما، مبادلاً Commutator لهذين المؤثرين ونرمز له بـ $[A, B]$

$$[A, B] = AB - BA \tag{2.18}$$

**مبرهنة 2 :**
عندما يكون لمؤثرين ما متجهة خاصة مشتركة $|\psi\rangle$ فإنهما تبادليان أي أن

$$[A, B] = 0$$

ذلك أن $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ و $B(A|\psi\rangle) = ba|\psi\rangle$ والعددان الحقيقيان تبادليان $A(B|\psi\rangle) = a\,b|\psi\rangle$.

لا يتغير شيء في البرهان عندما نكتب المتجهة الخاصة المشتركة بدليل متجهات قاعدة متعامدة $|\psi_n\rangle$ : $\psi = \sum_n \alpha_n |\psi_n\rangle$. لدينا

$$\alpha_n = \langle \psi_n | \psi \rangle$$

$$\langle \psi_n | A\psi \rangle = \alpha_n a$$

و

$$\langle \psi_n | [A, B] | \psi \rangle = \alpha_n (ab - ba) = 0$$

أي أن $[A, B]|\psi\rangle$ العمودي على كل متجهات القاعدة هو المتجهة صفر ومنه $[A, B] = 0$.

وعلى العكس لدينا

**مبرهنة 3 :**
إن لرصودين تبادليين ذات القاعدة المتعامدة.

لنفرض أن القيم الخاصة $a_n$ لـ $A$ غير متدنية.

لدينا

$$A(B|\psi\rangle) = B\,A|\psi_n\rangle = B\,a_n|\psi_n\rangle$$

حيث $|\psi_n\rangle$ قاعدة متعامدة لـ $\mathscr{H}$، قيم $A$ الخاصة غير متدنية

$$= a_n (B|\psi_n\rangle)$$

أي أن $B|\psi_n\rangle$ متجهة خاصة لـ $A$ وبالقيمة الخاصة $a_n$ هذا يعني أن $B|\psi_n\rangle$ متناسبة مع $|\psi_n\rangle$ :

$$B|\psi_n\rangle = \alpha_n|\psi_n\rangle$$

أو أن $|\psi_n\rangle$ متجهة خاصة لـ B : وهذا أياً كانت المتجهة $|\psi_n\rangle$.

أما إذا كانت القيم الخاصة متدنية، لنفرض أن لـ m متجهة $|\psi_i\rangle$ $i=1,...,m$ ذات القيمة الخاصة $a_n$ (يُبرهن أن عدد المتجهات الخاصة المقابلة لقيمة خاصة ما منته دوماً). نكتب $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i|\psi_i\rangle$ ونطبق محاكمة المبرهنة السابقة.

**تعريف 4 :**

نقول عن مجموعة من المؤثرات الرصودة A ، B،... إنها تشكل مجموعة تامة من الرصودات التبادلية إذا كان لها قاعدة مشتركة ووحيدة في الفضاء الهيلبرتي.

## 4.2- معادلة شرودينغر Schrödinger

وضعنا كمبدأ أول أن حالة الإلكترون، الجسيم أو النظمة الكمومية، تحددها متجهة $|\psi\rangle$ أي أن $|\psi\rangle$ توصف كل خواص النظمة في لحظة ما على أحسن وجه – وإن لم يكن توصيفاً كاملاً كما قلنا – وتحدد خواص النظمة المستقبلية في كل لحظة تليها. تخضع هذه الموجة إذاً إلى معادلة تغير مع الزمن – معادلة تطور، خطية نظراً لقبولنا بمبدأ التوضيع. رأينا أن $|\psi\rangle$ تابعة لـ $\vec{r}$ و t : $|\psi(\vec{r}, t)\rangle$ لذلك فمعادلة تطورها معادلة بمشتقات جزئية بالنسبة للزمن وسنقبل كمبدأ

م4. إن معادلة تطور النظمة الميكانيكية هي

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \qquad (2.19)$$

حيث $\hbar = \frac{h}{2\pi}$، وسنبرر هذه الكتابة لاحقاً، و H مؤثر خطي نسميه هاميلتوني النظمة.

إنها معادلة من الدرجة الأولى بمشتقات $|\psi\rangle$ بالنسبة للزمن؛ وهي كمبدأ، لا تحتاج إلى تبرير وإنما نتأكد من صلاحيتها في مدى قدرتها على تحليل الأحداث وعلى التنبؤ بها. فنحن لم نبرر مثلاً مبدأ نيوتن الثاني، فهو سهل القبول حدسياً : لا تتناسب القوة مع السرعة وإنما مع تغيرها. لكن الأمر مختلف هنا. فشكل المعادلة مجرد، ولا نريد الدخول في التفاصيل التي دفعت شرودينغر إلى وضع هذه المعادلة المستوحاة من الفيزياء الإحصائية، خاصة وأن بعض حجج شرودينغر كانت خاطئة. إنها معادلة موجية والموجة معروفة في الفيزياء التقليدية ولذا فإننا سنعود إلى مبدأ التقابل لتبرير هذه المعادلة.

لننظر إلى الموجة الضوئية على سبيل المثال وإلى الانتقال من الضوء الفيزيائي – الموجي – إلى الضوء الهندسي – المسار على خط مستقيم –، نعبر عن الموجة – الحقل الكهربائي مثلاً – بـ (1.9). سنأخذ هنا المرافق العقدي للموجة ونكتبه على الشكل

$$\varepsilon = A^{-i(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} = a(t)e^{i\frac{2\pi r}{\lambda}}$$

$$\varepsilon = a(t)e^{i\phi} \qquad (2.20)$$

حيث $\phi = \frac{2\pi r}{\lambda}$ هي طور الموجة. لقد فصلنا بين المتغيرين t و $\phi$ لإن الانتقال من الشكل الموجي إلى الشكل الهندسي في الضوء لا يتوقف إلا على الطور. عندما يكون r كبيراً جداً بالنسبة لـ $\lambda$ $r >> \lambda$، $r \simeq N\lambda$ حيث N عدد كبير جداً، فإن $e^{i\phi}$ يصبح مساوياً (وسطياً) للواحد ويزول الطابع الموجي للضوء؛ وعلى العكس يتغير الطور كثيراً – مشتقه كبير – من أجل المسافات القصيرة. لنطبق مبدأ التقابل ونكتب

$$|\psi\rangle = a(t)e^{i\phi}$$

ليس للطور أبعاد ($\phi = \frac{2\pi r}{\lambda}$ في حالة الضوء)، هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن ما يلعب دور المقدار الصغير في الميكانيك الكمومي هو الفعل h. يجب إذاً، كما أشرنا سابقاً، أن يكون h صغيراً جداً أمام الفعل التقليدي S كي ننتقل من الميكانيك الموجي إلى الميكانيك الإقليدي. وهكذا يلعب S و h دور r و $\lambda$ على الترتيب في الطور $\phi$.

$$\phi = \frac{2\pi r}{\lambda} \rightarrow \frac{2\pi S}{h} = \frac{S}{\hbar}$$

وهكذا فإن

$$|\psi\rangle = a(t)e^{i\frac{S}{\hbar}} \qquad (2.21)$$

سنفرض أن الفعل S متغير مع الزمن وأن تغيرات سعة الموجة، $a(t)$، بالنسبة للزمن مهملة. ولذا فإن

$$\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}|\psi\rangle \qquad (2.21)'$$

ولكن الدالة $\frac{\partial S}{\partial t}$ – في الميكانيك التقليدي هي الهاميلتوني (العلاقة (I.6.(3.24)) – المقدار الفيزيائي H. إنه المؤثر H في الميكانيك الكمومي : (لنلاحظ أن السلوك الموجي مرتبط بالطاقة، بالاندفاع بينما يرتبط السلوك الجسيمي بالوضع) ومنه معادلة شرودينغر

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

والمعادلة المكافئة لها

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi| = \langle\psi|H^{\dagger} \qquad (2.19)'$$

عندما ننتقل من الخطي $\langle\psi|$ إلى مضاد الخطية $|\psi\rangle$.

نتحقق بسهولة أن $H$ ذاتي الترافق. وإلا لما كان بإمكاننا القول إنه يعبر عن مقدار فيزيائي : لدينا

$$\langle\psi|\psi\rangle = \text{ثابتـــة} \quad \text{(تساوي الواحد إذا كانت منظمة)}$$

ومنه

$$0 = \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial t} \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| \frac{\partial\psi}{\partial t} \right\rangle$$

وبتطبيق (2.19) و '(2.19)

$$0 = \langle\psi|\frac{i}{\hbar}\left(H^{\dagger} - H\right)|\psi\rangle$$

ومنه

$$H^{\dagger} = H$$

## 5.2- المؤثرات التفاضلية

لنطبق معادلة شرودينغر على موجة مستوية من الشكل $|\psi\rangle = e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ فنحصل على

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hbar\omega|\psi\rangle$$

أي أن الطاقة $\hbar\omega$ هي قيمة خاصة للمؤثر $H$. ونجد بهذه الطريقة فرضية بلانك التي انطلقت منها النظرية الكمومية. لم نعد بحاجة لهذه الفرضية لأنها متضمنة في معادلة شرودينغر. لنلاحظ الآن أن الموجة المستوية مسايرة التغير وأن المقدار السلمي $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$ هو جداء متجهتين بأربعة أبعاد أولاهما $(x^{o}, \vec{r})$ وثانيتهما هي $\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (p^{o}, \vec{p})$ وبما أن $ct \cdot \frac{E}{c}$ هي $\hbar\omega t$. فإن $\vec{p}\cdot\vec{r} = \hbar\vec{k}\cdot\vec{r}$ ومنه

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \qquad (2.22)$$

هذه العلاقة بالقيمة المطلقة هي $p = \frac{h}{\lambda}$ لأن $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$؛ إنها الفرضية التي وضعها دوبروي De Broglie (1923) القائلة بوجود موجة ترتبط بالجسيم معطياً العلاقة بين اندفاع الجسيم وطول الموجة. لنلاحظ، بشكل آخر أن ما تعنيه فرضية بلانك عندما يتعلق الأمر بالموجات الكهرطيسية هو تطابق اندفاع الموجة $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$ مع اندفاع الجسيم المرتبط بها (الفوتون) وهي فرضية آنشتاين في دراسته للمفعول الكهرضوئي. وفي المقابل تعني فرضية دوبروي وجود موجة مرتبطة بالجسيم تماماً كما أن للموجة جسيماً مرتبطاً بها (الفوتون، ومن بعده الفونون عندما يتعلق الأمر بالموجات الصوتية). وهذا هو الواقع التجريبي الذي انطلقنا منه. وهذه هي ثنوية الجسيم – الموجة.

إن تطبيق "وصفات" مبدأ التقابل على كل الميكانيك التقليدي – النيوتوني والنسبوي يغنينا عن فرضية دوبروي كما جعلتنا معادلة شرودينغر "كمبدأ" نستغني عن فرضية بلانك التي أصبحت نتيجة لهذا المبدأ.

نكتب الآن الموجة المستوية $|\psi\rangle$ على الشكل $e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{r})}$. إنها متجهة خاصة للطاقة كما رأينا. حيث مؤثر الطاقة هو $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ وهي كذلك متجهة خاصة للاندفاع وتعطينا الاندفاع $\hbar\vec{k}$ كقيمة خاصة عندما نطبق المؤثر $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ حيث $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}$ هو الغراديان. لدينا

$$\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}|\psi\rangle=\vec{p}|\psi\rangle=\hbar\vec{k}|\psi\rangle$$

وهكذا فإن المؤثرين التفاضليين للمقدارين الفيزيائيين الطاقة والاندفاع هما

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right) \qquad (2.23)$$

رأينا في النسبية الخاصة أن المؤثر التفاضلي $\left(\frac{\partial}{\partial x_o},-\vec{\nabla}\right)$ يكون متجهة رباعية في فضاء مينكوفسكي وبما أننا ضربنا المركبة الأولى بـ $i\hbar$ فإن ضرب المركبات المكانية بنفس المقدار هو الذي يعطينا المؤثر رباعي الأبعاد $\left(E,\vec{P}\right)=\left(cp_o,\vec{P}\right)$ (2.23).

خلاصة القول أن "مبدأ" شرودينغر يحتوي على فرضتي بلانك ودوبروي والفرضية الوحيدة الباقية هي ارتباط الميكانيك الكمومي بالثابتة $\hbar$ التي قابلناها بطول الموجة عند المقارنة بين الضوء الفيزيائي (الموجي) والضوء الهندسي من جهة وبين الميكانيك الكمومي والتقليدي من جهة ثانية.

## 6.2– باقة الموجة Wave Packet وسرعة الجسيم

لنوضح هذا التقابل بين $\omega$ و $E$ وبين $\vec{p}$ و $\vec{k}$ بالعودة إلى الفيزياء الواقعية ونعني بذلك استحالة وجود – استحالة رصد – موجة وحيدة لأنه لا يوجد في الطبيعة موجة بطول موجة محدد تماماً ولأنها إن وجدت فسيتعارض ذلك مع مبدأ النسبية الخاصة إذ يمكن لهذه الموجة أن تنتشر بسرعة أكبر من سرعة الضوء – $c/n$ – في وسط قرينة انكساره أصغر من الواحد. إن ما يرصد فيزيائياً هو قطار أمواج – باقة أمواج. أطوال موجاتها متجاورة ومجاورة لـ $\lambda_o$ بحيث يمكننا أن ننشر $\omega$ التابع لطول الموجة ليس بدليل $\lambda$ وإنما بدليل متجهة الموجة على الشكل :

$$\omega=\omega_o+\left(\vec{k}-\vec{k}_o\right)\frac{d\omega}{d\vec{k}}\bigg|_{\vec{k}=\vec{k}_o} \quad ; \quad \frac{d\omega}{d\vec{k}}=\vec{\nabla}\omega$$

ونكتب الموجة الكلية، قطار الأمواج، على الشكل

$$\varepsilon(\vec{r},t)=e^{i(\vec{k}_o\vec{r}-\omega_o t)}\int_{-\infty}^{+\infty}F\left(\vec{k}\right)e^{i(\vec{k}-\vec{k}_o)(\vec{r}-\frac{d\omega}{d\vec{k}}t)}d\vec{k} \qquad (2.24)$$

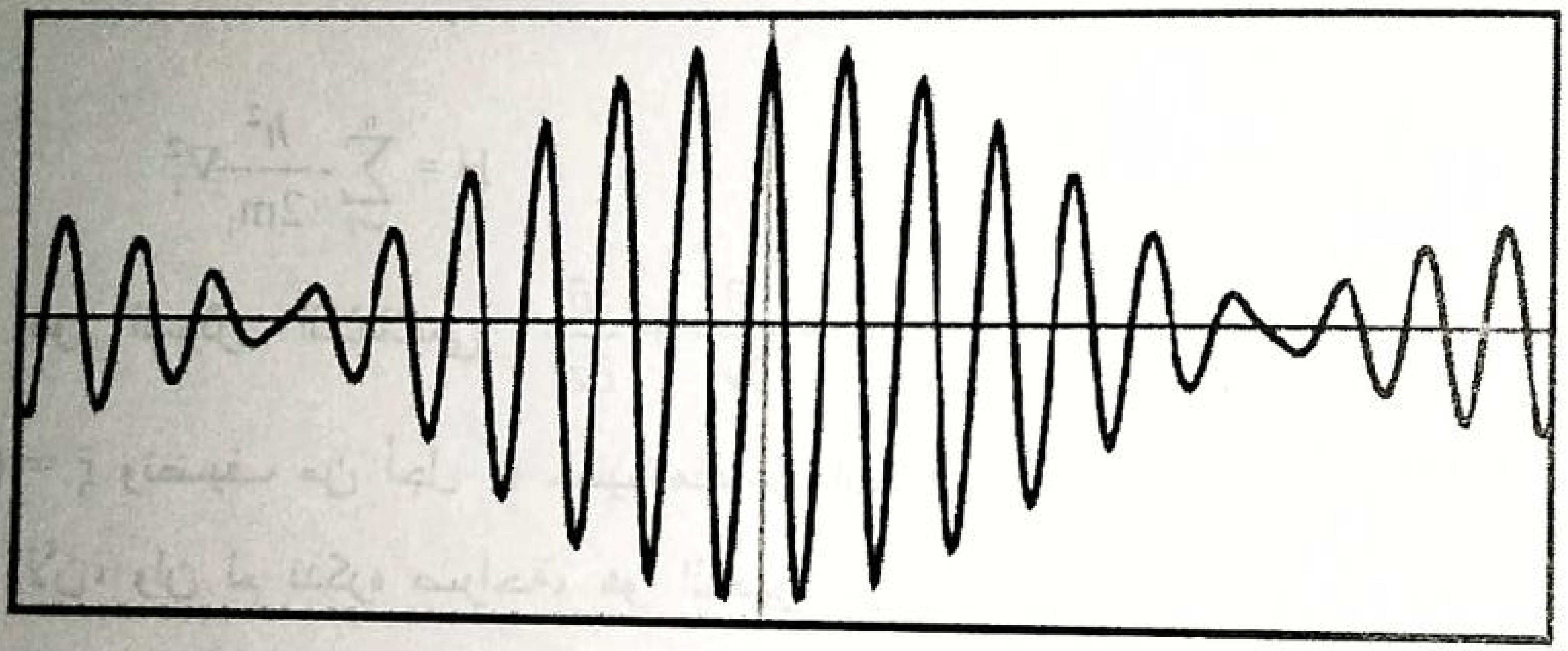
لا يختلف $F(\vec{k})$ عن الصفر إلا في المجال $(\vec{k}_o \pm \Delta\vec{k})$، $\Delta\vec{k} << \vec{k}_o$، بحيث يمكن كتابة $\varepsilon$ على الشكل

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_o \vec{r} - \omega_o t)} \mathscr{F}\left(\vec{r} - \frac{d\omega}{d\vec{k}} t\right)$$

حيث $\mathscr{F}$ ، قيمة التكامل، دالة موجية من الشكل المألوف $f\left(\frac{r}{v} - t\right)$ عندما نكتب $f\left(\frac{r}{v} - t\right) = \mathscr{F}\left(\frac{d\omega}{d\vec{k}}\left(\frac{\vec{r}}{d\omega/d\vec{k}} - t\right)\right)$. وسرعة هذه الموجة هي

$$\vec{v}_g = \frac{d\omega}{d\vec{k}} \qquad (2.25)$$

رمزنا لها بـ $\vec{v}_g$ وتعرف باسم سرعة الزمرة – سرعة باقة الأمواج – لتمييزها عن السرعة – غير الفيزيائية المسماة سرعة الطور $\vec{v}_\phi = \frac{\omega}{\vec{k}}$. وهكذا فإن الموجة (2.24) مؤلفة من موجة تسير بسرعة $\vec{v}_g$ تغطيها موجة مستوية تسير بسرعة $v_\phi$، الشكل.10.



الشكل. 10

وبالعودة إلى فرضية دوبروي نجد أن سرعة الجسيم، سرعة باقة الموجة هي

$$\frac{d\omega}{d\vec{k}} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar\vec{k}}{m} \qquad (2.26)$$

تعطينا مكاملة هذه العلاقة

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} + \text{ثابتة} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \text{ثابتة} \qquad (2.27)$$

تحقق العلاقة (2.27) مبدأ التقابل بإعطائها الطاقة الحركية على الشكل $\frac{p^2}{2m}$ حيث $\vec{p}$ هو $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ وهي بذلك تبرر التعبير عن سرعة الجسيم بسرعة باقة الموجة.

يمكننا أن نسمي هذه الثابتة الطاقة الكامنة للجسيم الحر لأن الجسيم الحر غير خاضع لأي قوة وبالتالي فإن الطاقة الكامنة ثابتة $\left(0 = \vec{F} = -\overline{\nabla U}\right)$. هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن طاقة الموجة المستوية ثابتة (الطرف الأيسر في 2.27) ولكن طول الموجة يتغير من منطقة ذات كمون ثابت إلى منطقة أخرى

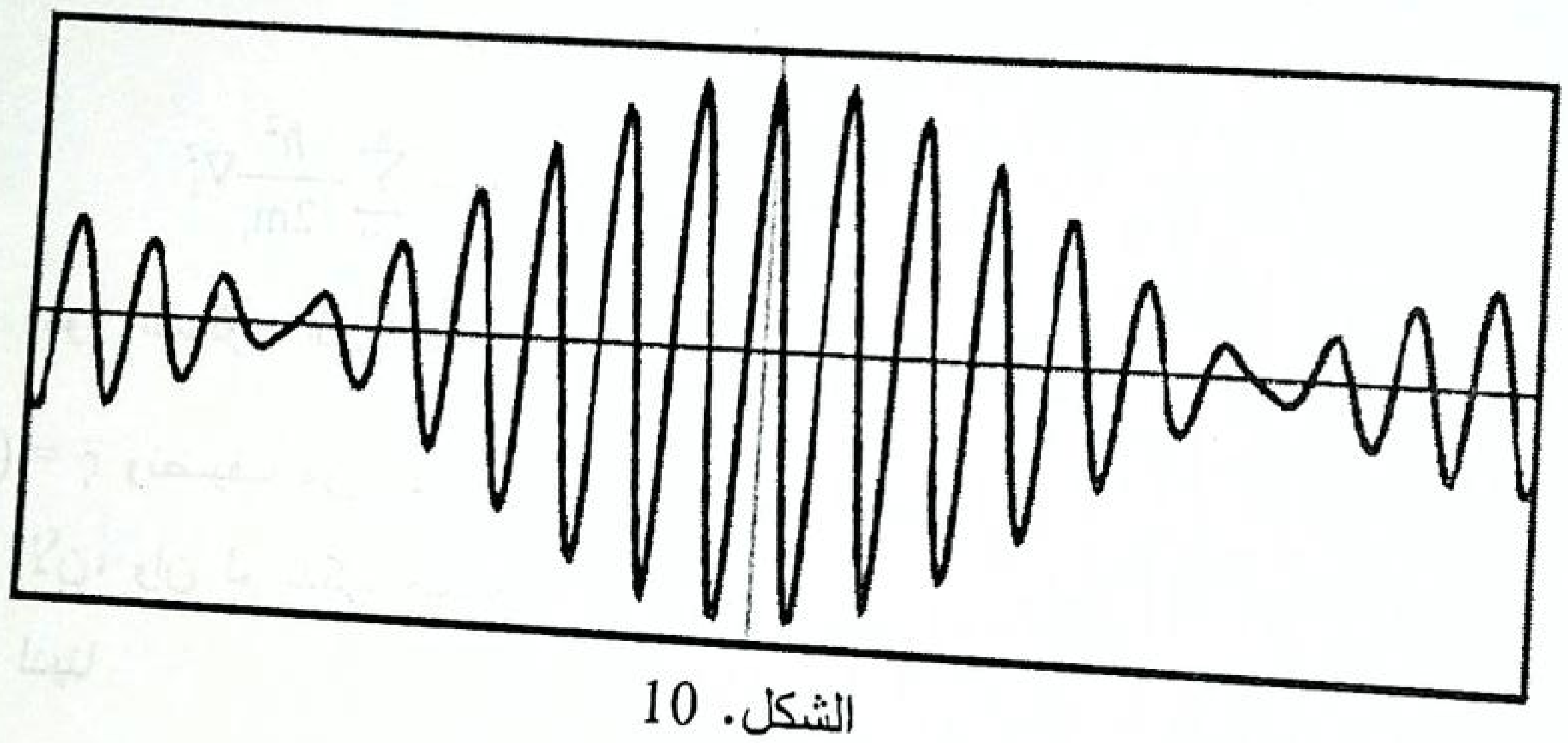
لا يختلف $F(\vec{k})$ عن الصفر إلا في المجال $(\vec{k}_o \pm \Delta\vec{k})$، $\Delta\vec{k} << \vec{k}_o$، بحيث يمكن كتابة $\varepsilon$ على الشكل

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_o \vec{r} - \omega_o t)} \mathscr{F}\left(\vec{r} - \frac{d\omega}{d\vec{k}} t\right)$$

حيث $\mathscr{F}$ ، قيمة التكامل، دالة موجية من الشكل المألوف $f\left(\frac{r}{v} - t\right)$ عندما نكتب $\mathscr{F}\left(\frac{d\omega}{d\vec{k}}\left(\frac{\vec{r}}{d\omega/d\vec{k}} - t\right)\right) = f\left(\frac{r}{v} - t\right)$. وسرعة هذه الموجة هي

$$\vec{v}_g = \frac{d\omega}{d\vec{k}} \tag{2.25}$$

رمزنا لها بـ $\vec{v}_g$ وتعرف باسم سرعة الزمرة – سرعة باقة الأمواج – لتمييزها عن السرعة – غير الفيزيائية المسماة سرعة الطور $\vec{v}_\phi = \frac{\omega}{\vec{k}}$. وهكذا فإن الموجة (2.24) مؤلفة من موجة تسير بسرعة $\vec{v}_g$ تغطيها موجة مستوية تسير بسرعة $v_\phi$، الشكل.10.



الشكل. 10

وبالعودة إلى فرضية دوبروي نجد أن سرعة الجسيم، سرعة باقة الموجة هي

$$\frac{d\omega}{d\vec{k}} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar\vec{k}}{m} \tag{2.26}$$

تعطينا مكاملة هذه العلاقة

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} + \text{ثابتة} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \text{ثابتة} \tag{2.27}$$

تحقق العلاقة (2.27) مبدأ التقابل بإعطائها الطاقة الحركية على الشكل $\frac{p^2}{2m}$ حيث $\vec{p}$ هو $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ وهي بذلك تبرر التعبير عن سرعة الجسيم بسرعة باقة الموجة.

يمكننا أن نسمي هذه الثابتة الطاقة الكامنة للجسيم الحر لأن الجسيم الحر غير خاضع لأي قوة وبالتالي فإن الطاقة الكامنة ثابتة $(0 = \vec{F} = -\vec{\nabla}U)$. هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن طاقة الموجة المستوية ثابتة (الطرف الأيسر في 2.27) ولكن طول الموجة يتغير من منطقة ذات كمون ثابت إلى منطقة أخرى

على الحر الجسيم معادلة ونكتب أيضاً ثابتاً (2.27) في الأيمن الطرف يبقى بحيث أيضاً ثابت كمونها الشكل

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(\vec{r}) \qquad (2.27)'$$

إنها حل معادلة شرودينغر التفاضلية التالية من أجل الجسيم الحر

$$\frac{i\hbar\partial|\psi\rangle}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2|\psi\rangle \qquad (2.28)$$

لأن المؤثر $\frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ حسب (2.23) حيث $\nabla^2$ (المؤثر اللابلاسي) هو تطبيق المؤثر $\vec{\nabla}$ (غراديان) مرتين : إن اللابلاسي هو تباعد أو تفرق divergence الغراديان.

يمكننا الآن إعطاء صيغة الهاميلتوني كموثر من أجل أي نظمة ميكانيكية كمومية انطلاقاً من (2.23) ومبدأ التقابل وكتابة معادلة شرودينغر من أجل هذه النظمة :

لدينا في الإحداثيات الديكارتية من أجل نظمة مؤلفة من n جسيم حر (غير متفاعلة) حسب مبدأ التوضيع

$$H = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 \qquad (2.28)'$$

حيث $\nabla_i^2$ هو المؤثر اللابلاسي $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial y_i^2} + \frac{\partial}{\partial z_i^2}$ من أجل الجسيم i ذي الأحداثيات $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ونضيف من أجل n جسيم متفاعل الطاقة الكامنة $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n)$ التقليدية، لأن ما فعلناه حتى الآن، وإن لم نذكره صراحة، هو التعبير عن المؤثر المقابل للوضع بالمتجهة التي تعين الوضع ذاته. لدينا

$$H = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n) \qquad (2.28)''$$

هذا من أجل الإحداثيات الديكارتية. أما من أجل الإحداثيات العامة، فقد عرفنا الاندفاعات (العزوم) العامة بـ $p_k = \frac{\partial}{\partial q^k}$؛ كل ما علينا فعله هو أن نأخذ الهاميلتوني التقليدي – إن كان للمسألة الكمومية المطروحة مقابل تقليدي – $H(q^k, p_k; t)$ ونكتبه بالاستعانة بـ (2.23) و $q^k \to q^k$ (مؤثر الوضع تقليدي) على الشكل

$$H\left(q^k, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^k}, t\right)$$

ونكتب معادلة شرودينغر بدالة الموجة $|\psi(q^k, t)\rangle$ في فضاء ذي n بعداً $k = 1, 2, \dots, n$ عدد الإحداثيات العامة المستقلة (عوضاً عن الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة $\vec{r}$) على النحو التالي

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(q^1, \dots q^n; t)\rangle = H\left(q^1 \dots q^k; \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^1} \dots \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^n}; t\right)|\psi\rangle \qquad (2.29)$$

## 3. حساب المؤثرات

### 1.3- مشتق مؤثر بالنسبة للزمن

يعني الاشتقاق العلم بقيمة المقدار الذي نريد اشتقاقه في لحظتين متقاربتين، بوضع الجسم على سبيل المثال في هاتين اللحظتين، والحصول على مشتقه، على سرعته، إذا كانت دالة المقدار موضع الاعتبار قابلة للاشتقاق. نعلم أن هذا ممكن في الميكانيك التقليدي ولكن الاشتقاق يفقد معناه في الميكانيك الكمومي لأن قيم المقادير الفيزيائية ليست متصلة بصورة عامة وبالتالي ليست قابلة للاشتقاق. لكننا عرفنا في (2.17) القيمة الوسطية لدالة ما $F(A)$ بالمتغير $A$ (بالمقدار الفيزيائي، المؤثر $A$) ولذلك سنعرف هنا مشتق $F(A)$، وبصورة خاصة مشتق $A$ بالذات بالقول إن مشتق $A$ بالنسبة للزمن هو مؤثر قيمته الوسطية تساوي لمشتق القيمة الوسطية لـ $A$ بالنسبة للزمن أو بعبارة أخرى

**تعريف 5** :

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle A \rangle \qquad (3.1)$$

وهذا يساوي حسب (2.17) وحسب معادلة شرودينغر ((2.19)، '(2.19))

$$= \frac{\partial}{\partial t}\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle +\frac{i}{\hbar}H^{\dagger}\psi | A | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi | A | -\frac{i}{\hbar}H\psi \rangle$$

ومنه، نظراً لأن $H$ ذاتي الترافق

$$= \langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}(HA - AH)\psi \rangle$$

وأخيراً

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, A] \qquad (3.2)$$

لا تختلف هذه العلاقة عن العلاقة ((6.(3.9)) و '(6.(3.9)) من كتاب الميكانيك إلا باستبدال لامتي بواسون $\{\,,\,\}$ بالمبادل $[\,,\,]$ مضروباً بـ $\frac{i}{\hbar}$. كما لا يختلف عن قولنا هنا، إنه في حالة كون $A$ غير تابع مباشرة للزمن – ونعني بذلك أن $\langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} | \psi \rangle = 0$ – فإن المؤثر $A$ ثابت مع الزمن، بمعنى التعريف (3.1) دوماً، إذا كان مبادله مع الهاميلتوني مساوياً للصفر، إن $A$ مقدار منحفظ :

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle A \rangle = 0 \qquad (3.3)$$

ومنه الوصفة الجديدة التي يمليها علينا مبدأ التقابل، مبدأ التماثل بين الميكانيك التقليدي والميكانيك الكمومي : قابلنا كل مقدار فيزيائي بمؤثر ذاتي الترافق، وأعطينا لهذه المؤثرات شكل مؤثر تفاضلي

الهاملتوني مثلاً، الشكل الذي وضعناه $q \to q$ ، $\bar{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla$ ، $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ولكل دالة بهذه المؤثرات، بالمبادل بين المؤثرين عليه في (2.29). والوصفة الجديدة هي مقابلة كل لامتي بواسون مضروبة $\frac{\hbar}{i}$ المقابلين للمقدارين الفيزيائيين f و g في لامتي بواسون.

لقد وجدنا على سبيل المثال $(3.10)_{8,9}$.I.6) أن

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j \qquad (3.4)$$

لدينا هنا

$$[q^i, q^j] = [p_i, p_j] = 0 \qquad (3.5)$$

$$[p_i, q^j] = \frac{\hbar}{i}\delta_i^j$$

و لسنا في حقيقة الأمر بحاجة إلى مبدأ التقابل وإلى تعريف لامتي بواسون وما يتبعها من مبرهنات للبرهان على العلاقتين (3.4) و(3.5) وما يتبعهما أيضاً فـ $q^iq^j = q^jq^i$ لأننا اعتبرنا المقدار q عدداً و

$$p_ip_j \simeq \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial q^i} \simeq p_jp_i$$

لأن الاشتقاق الجزئي الثاني بمتغيرين لا يتوقف على ترتيب الاشتقاق.

ثم إن تطبيق المؤثر التفاضلي (3.5) على دالة ما $f(q^1..q^n; p_1...p_n;t)$ هو تعريفاً

$$[p_i, q^j]f = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^i}(q^jf) - q^j\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^i}f$$

$$= \frac{\hbar}{i}\delta_i^jf + \frac{\hbar}{i}q^j\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\hbar}{i}q^j\frac{\partial f}{\partial q^i}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\delta_i^jf(q^1...q^n; p_1...p_n; t)$$

ومنه (3.5).

إن استبدال $q^j$ في (3.5) بأي دالة F تابعة للمتغيرات $(t, p_j, q^j)$ لا يغير في هذا البرهان شيئاً سوى استبدال بـ $\frac{\partial}{\partial q^i}q^j$ الذي أعطانا $\frac{\hbar}{i}\delta_i^j$ المشتق $\frac{\partial F}{\partial q^i}$ أما الحدان الأخيران فيصبحان

$$\frac{\hbar}{i}F\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\hbar}{i}F\frac{\partial f}{\partial q^i} = 0$$

ومنه

$$[p_i, F] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial F}{\partial q^i} \qquad (3.6)$$

وهي العلاقة $(3.20)_6$.6) من كتاب الميكانيك.

تبين العلاقة (3.5) أنه يمكن بسهولة الانتقال من توصيف q بالعدد q و p بالمؤثر $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ وهو التوصيف المسمى تمثيل الوضع إلى تمثيل الاندفاع حيث p هو العدد p و q مؤثر تفاضلي. يكفي لذلك وضع $q^j$ مكان $p_i$ في المبادل فنحصل على $q^j = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p_j}$ أو

وضعناه الشكل الذي الهاميلتوني مثلاً، ولكل دالة بهذه المؤثرات، $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ، $\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ ، $q \to q$ بالمبادل بين المؤثرين مضروبة $\frac{\hbar}{i}$ بالمبادل بين المؤثرين

عليه في (2.29). والوصفة الجديدة هي مقابلة كل لامتي بواسون

المقابلين للمقدارين الفيزيائيين $f$ و $g$ في لامتي بواسون.

لقد وجدنا على سبيل المثال $(I.6.(3.10)_{8,9})$ أن

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j \qquad (3.4)$$

لدينا هنا

$$[q^i, q^j] = [p_i, p_j] = 0 \qquad (3.5)$$

$$[p_i, q^j] = \frac{\hbar}{i}\delta_i^j$$

و لسنا في حقيقة الأمر بحاجة إلى مبدأ التقابل وإلى تعريف لامتي بواسون وما يتبعها من مبرهنات للبرهان على العلاقتين (3.4) و(3.5) وما يتبعهما أيضاً فـ $q^iq^j = q^jq^i$ لأننا اعتبرنا المقدار $q$ عدداً و

$$p_ip_j \simeq \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial q^i} \simeq p_jp_i$$

لأن الاشتقاق الجزئي الثاني بمتغيرين لا يتوقف على ترتيب الاشتقاق.

ثم إن تطبيق المؤثر التفاضلي (3.5) على دالة ما $f(q^1..q^n; p_1...p_n;t)$ هو تعريفاً

$$[p_i, q^j]f = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^i}(q^jf) - q^j\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^i}f$$

$$= \frac{\hbar}{i}\delta_i^jf + \frac{\hbar}{i}q^j\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\hbar}{i}q^j\frac{\partial f}{\partial q^i}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\delta_i^jf(q^1...q^n; p_1...p_n; t)$$

ومنه (3.5).

إن استبدال $q^j$ في (3.5) بأي دالة $F$ تابعة للمتغيرات $(t, p_j, q^j)$ لا يغير في هذا البرهان شيئاً سوى استبدال بـ $\frac{\partial}{\partial q^i}q^j$ الذي أعطانا $\frac{\hbar}{i}\delta_i^j$ المشتق $\frac{\partial F}{\partial q^i}$ أما الحدان الأخيران فيصبحان

$$\frac{\hbar}{i}F\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\hbar}{i}F\frac{\partial f}{\partial q^i} = 0$$

ومنه

$$[p_i, F] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial F}{\partial q^i} \qquad (3.6)$$

وهي العلاقة $(6.(3.20)_6)$ من كتاب الميكانيك.

تبين العلاقة (3.5) أنه يمكن بسهولة الانتقال من توصيف $q$ بالعدد $q$ و $p$ بالمؤثر $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ وهو التوصيف المسمى تمثيل الوضع إلى تمثيل الاندفاع حيث $p$ هو العدد $p$ و $q$ مؤثر تفاضلي. يكفي لذلك وضع $q^j$ مكان $p_i$ في المبادل فنحصل على $q^j = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p_j}$ أو

$$q^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} \qquad (3.7)$$

وعلى العلاقة المقابلة لـ (3.6)

$$\left[q^i, F\right] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_j} \qquad (3.8)$$

## 2.3– جبر المؤثرات

بينا في الرقم السابق أهمية التقابل بين المبادل ولامتي بواسون للحصول مباشرة على بعض النتائج. كما بينا أنه من الممكن الوصول إلى هذه النتائج انطلاقاً من تعريف المبادل. وفي الواقع فإن المؤثرات الخطية في فضاء متجهي منظم ما، E، فضاء هيلبرت في حالتنا تشكل فضاءً متجهياً لأنه من الممكن تعريف جمع المؤثرات – جمع المصفوفات – وضربها بعدد واعتبار المؤثر المعدوم الحيادي في هذا الفضاء أي أن

$$\begin{cases} (A, B) \rightarrow A + B = B + A \\ (\lambda, A) : \lambda(A) = \lambda A \\ A + 0 = 0 + A = A \end{cases} \qquad (3.9)$$

أضفنا إلى بنية الفضاء المتجهي هذه بنية أخرى هي بنية الحلقة إذ عرفنا جداء مؤثرين

$$A, B \rightarrow A \circ B = A \cdot B = AB \qquad (3.10)$$

حيث . أو ∘ تعني حصيلة التركيب (العنصر الحيادي في هذه الحلقة هو I المصفوفة الواحدية).

$$AI = IA \qquad (3.11)$$

تسمى الكيانات الرياضية التي تتمتع في آن واحد بصفات الفضاء المتجهي وبصفات الحلقة جبراً وهكذا فإن المؤثرات الخطية تشكل جبراً إلا أنه غير تبادلي لأن

$$AB \neq BA \qquad (3.12)$$

وهكذا عرفنا المبادل

$$[A, B] = AB - BA \qquad (3.12)'$$

نرى بسهولة أن

$$[A, B] = -[B, A] \qquad (3.13)$$

و

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \qquad (3.14)$$

$$[A, BC] = ABC - BCA + BAC - BAC \qquad (3.15)$$

و

حيث أضفنا وطرحنا المقدار BAC

$$= [A, B]C + B[A, C]$$

و

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \qquad (3.16)$$

تسمى هذه المتطابقة بمتطابقة جاكوبي، برهانها مباشر هنا ولكنه اقتضى منا القيام ببعض الحسابات للبرهان عليها عندما تعلق الأمر بلامات بواسون التقليدية والمقابلة للمبادلات الكمومية.

لدينا أيضاً

$$[A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A, B] B^{n-s-1} \qquad (3.17)$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل $n = 2$ حسب (3.15) مع $B = C$. لنفرض إذاً أنها صحيحة من أجل n-1 ولنبرهن صحتها من أجل n (البرهان بالتراجع الاستدلالي). سنسمي $\beta = B^{n-1}$ ونطبق (3.15)

$$[A, B^n] = [A, \beta B] = [A, \beta]B + \beta[A, B]$$

ولكن العلاقة (3.17) صحيحة فرضاً من أجل n-1 :

$$[A, \beta] = [A, B^{n-1}] = \sum_{s=0}^{n-2} B^s [A, B] B^{n-s-2}$$

وبالتبديل في العلاقة السابقة

$$[A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-2} B^s [A, B] B^{n-s-1} + B^{n-1}[A, B]$$

فنحصل على (3.17).

لنطبق العلاقة (3.17) من أجل $A = q$ و $B = p$، لدينا بأخذ (3.5) بعين الاعتبار $[q, p] = i\hbar$

$$[q, p^n] = n\, i\, \hbar\, p^{n-1}$$

ونتحقق من هذه النتيجة من صحة العلاقة (3.8) عندما يكون F كثير حدود بـ p وبصورة عامة عندما تكون F دالة متصلة بـ p لأنه يمكن تقريبها بكثير حدود.

والخلاصة أنه يمكن باستعمال جبر المؤثرات الوصول إلى كل النتائج التي أعطيناها من غير الرجوع إلى مبدأ التقابل وإلى جبر لامات بواسون. وما جبر المؤثرات إلا جبر المصفوفات عندما نحدد قاعدة (غير منتهية في حالتنا) للفضاء المتجهي.

عرفنا منقول المؤثر $\tilde{A}$ ومن ثم المؤثر المرافق $\bar{A}$ ومن بعده المؤثر ذاتي الترافق – المقادير الفيزيائية –

$$\bar{\tilde{A}} = A^{\dagger} = A \qquad (2.9\text{–}2.11)$$

يبقى علينا أن ننظر إلى المؤثر الذي يحفظ الجداء السلمي في الفضاء الهيلبرتي على غرار ما فعلناه في انحفاظ الجداء السلمي في الفضاء الإقليدي $\tilde{\Lambda} = \Lambda^{-1}$ وفي فضاء مينكوفسكي $\Lambda^{-1} = G\tilde{\Lambda}G$ حيث G التانسور المتري. ليكن لدينا المتجهان $\psi$ و $\phi$ في فضاء هيلبرت وليكن A المؤثر الذي يحفظ الجداء السلمي

$$\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$$

لكن $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$

و $\langle \phi' | = \langle \phi | A^{\dagger}$

ومنه $\langle \phi | A^{\dagger} A | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$

يجب إذاً لانحفاظ الجداء السلمي أن يكون

$$A^{\dagger} A = I$$

أو

$$A^{\dagger} = A^{-1} \qquad (3.18)$$

ونقول عندئذ إن المؤثر واحدي unitary.

## 3.3– مؤثر الإسقاط أو المسقط Projector

أقمنا دراسة المتجهات في الفضاء الفيزيائي العادي بأبعاده الثلاثة على ركيزتين أساسيتين للهندسة الإقليدية، أولاهما موضوعة التوازي والمبرهنة الناتجة عنها – والمكافئة لها – القائلة بوجود مسقط عمودي وحيد من نقطة ما في الفضاء على أحد مستوياته، أو من نقطة في المستوي على أحد مستقيماته. وثانيتهما تزويد الفضاء بجداء سلمي يعرف، من بين ما يعرفه، طول المتجهة والتعامد بين متجهتين. تعمم هاتان الركيزتان إلى الفضاءات الإقليدية ذات الأبعاد المنتهية، ولنرمز لها بـ $R^n$. نعرف في $R^n$ وضع النقطة M بإعطاء إحداثياتها الديكارتية $x^1, x^2, ... x^n$ في هذا الفضاء، أي بتعريف المتجهة $OM = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$ حيث $e_i$ متجهات القاعدة المتعامدة $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$. نعرف في هذا الفضاء المسقط العمودي الوحيد على الفضاء المتجهي الجزئي $R^m$ $(m < n)$ بأنه المتجهة $Om = \sum_{i=1}^{m} x^i e_i$ ونكتب المتجهة OM على الشكل

$$OM = Om + mM$$

حيث $mM = \sum_{i=m+1}^{n} x^i e_i$ ، $Om \perp mM$.

نحصل على Om بواسطة المؤثر، المسقط P، $P(OM) = Om$ و P هي المصفوفة القطرية، عناصر القطر فيها تساوي الواحد حتى السطر m وتساوي الصفر بعد ذلك

$$P = m\begin{pmatrix} 1\dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots\dots & 1 & \dots & 0 \\ 0\dots & 0 & 0\dots & \\ & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

إن المتجهة mM العمودية على Om عمودية على أي متجهة تنتمي إلى الفضاء الجزئي $R^m$ : نكتب

من أجل أي $y \in R^m \quad y = \sum_{i=1}^{m} y^i e_i$

$$\left\langle \sum_{i=m+1}^{n} x^i e_i \middle| \sum_{i=1}^{m} y^i e_i \right\rangle = 0 \qquad (3.19)_م$$

أو

$$\langle OM - Om | R^m \rangle = 0$$

تشير م إلى كون $R^n$ منتهي الأبعاد.

ونقول إن $R^n$ هو الجمع المباشر لـ $R^m$ و $R^{n-m}$ ونكتب

$$R^n = R^{n-m} \oplus R^m$$

ما من شيء يمنعنا من تكرار هذه العملية على كل من الفضائين $R^m$ و $R^{n-m}$ لنصل في نهاية الأمر إلى كتابة $R^n$ على شكل جمع مباشر لـ n فضاءً متجهياً بعد الواحد منها يساوي الواحد ونكتب

$$R^n = \bigoplus_n R$$

إن الفضاءات الإقليدية $\mathbb{C}^n$ المقامة على حقل الأعداد العقدية تماثل الفضاءات الإقليدية $R^{2n}$ المقامة على حقل الأعداد الحقيقية ولا تضيف شيئاً إلى ما ذكرناه به حتى الآن.

أما الفضاء الهيلبرتي فهو فضاء أقليدي لا متناهي الأبعاد على حقل الأعداد العقدية، ويصح عليه كل ما قلناه هنا وإن لم يكن الانتقال من الأبعاد المنتهية إلى الأبعاد غير المنتهية أمراً مباشراً أو محققاً في كل الأحوال.

يمكن البرهان على سبيل المثال، عندما يكون لدينا فضاء جزئي $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{H}$، أنه من الممكن كتابة أي متجهة $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ على الشكل $|\psi\rangle - |\phi\rangle + |\phi\rangle$ حيث $|\phi\rangle$ هي المتجهة الوحيدة المنتمية إلى $\mathscr{F}_1$ والتي تحقق العلاقة

$$\langle \psi - \phi | \phi' \rangle = 0 \qquad (3.19)$$

نحصل على Om بواسطة المؤثر، المسقط P، $P(OM) = Om$ و P هي المصفوفة القطرية، عناصر القطر فيها تساوي الواحد حتى السطر m وتساوي الصفر بعد ذلك

$$P = m\begin{pmatrix} 1\dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots\dots & 1 & \dots & 0 \\ 0\dots & 0 & 0\dots & \\ & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(حيث يشير m فوق المصفوفة إلى العمود m)

إن المتجهة mM العمودية على Om عمودية على أي متجهة تنتمي إلى الفضاء الجزئي $R^m$ : نكتب

من أجل أي $y \in R^m$ $\quad y = \sum_{i=1}^{m} y^i e_i$

$$\left\langle \sum_{i=m+1}^{n} x^i e_i \middle| \sum_{i=1}^{m} y^i e_i \right\rangle = 0 \qquad (3.19)_P$$

أو

$$\langle OM - Om | R^m \rangle = 0$$

تشير م إلى كون $R^n$ منتهي الأبعاد.

ونقول إن $R^n$ هو الجمع المباشر لـ $R^m$ و $R^{n-m}$ ونكتب

$$R^n = R^{n-m} \oplus R^m$$

ما من شيء يمنعنا من تكرار هذه العملية على كل من الفضائين $R^m$ و $R^{n-m}$ لنصل في نهاية الأمر إلى كتابة $R^n$ على شكل جمع مباشر لـ n فضاءً متجهياً بعد الواحد منها يساوي الواحد ونكتب

$$R^n = \oplus_n R$$

إن الفضاءات الإقليدية $\mathbb{C}^n$ المقامة على حقل الأعداد العقدية تماثل الفضاءات الإقليدية $R^{2n}$ المقامة على حقل الأعداد الحقيقية ولا تضيف شيئاً إلى ما ذكرّنا به حتى الآن.

أما الفضاء الهيلبرتي فهو فضاء أقليدي لا متناهي الأبعاد على حقل الأعداد العقدية، ويصح عليه كل ما قلناه هنا وإن لم يكن الانتقال من الأبعاد المنتهية إلى الأبعاد غير المنتهية أمراً مباشراً أو محققاً في كل الأحوال.

يمكن البرهان على سبيل المثال، عندما يكون لدينا فضاء جزئي $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{H}$، أنه من الممكن كتابة أي متجهة $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ على الشكل $|\phi\rangle + |\psi\rangle - |\phi\rangle$ حيث $|\phi\rangle$ هي المتجهة الوحيدة المنتمية إلى $\mathscr{F}_1$ والتي تحقق العلاقة

$$\langle \psi - \phi | \phi' \rangle = 0 \qquad (3.19)$$

أياً كانت المتجهة $\mathscr{F}_1 \ni |\phi'\rangle$ ( $\mathscr{F}_1$ يقابل $R^m$ في مثلنا أعلاه و $\psi - \phi$ تقابل $OM - Om = mM$ العمودي على $R^m$). إن $|\phi\rangle$ هي المقسط الوحيد لـ $|\psi\rangle$ على الفضاء الجزئي $\mathscr{F}_1$ و $|\psi - \phi\rangle$ عمودي على هذا الفضاء. نكتب

$$|\phi\rangle = P_1|\psi\rangle \tag{3.20}$$

و $P_1$ هو المؤثر الخطي (مصفوفة لامنتهية هنا) الذي يتيح لنا كتابة $\mathscr{H}$ على شكل جمع مباشر لفضائين جزئيين متعامدين $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_{\perp_1}$.

$$\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_{\perp_1} = 0$$

إن المتجهة 0 هي المتجهة الوحيدة التي تنتمي إلى كلا الفضائين و

$$\mathscr{H} = \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_{\perp_1} \tag{3.21}$$

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + |\psi - \phi\rangle = P_1|\psi\rangle + (I - P_1)|\psi\rangle \tag{3.22}$$

حيث $I$ هو المسقِط الوحدة : المصفوفة القطرية، كل عناصر القطر فيها تساوي 1.

وهنا أيضاً ما من شيء يمنعنا من تكرار هذه العملية على كل من الفضائين المتعامدين $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_{\perp_1}$ وكتابة $\mathscr{H}$ على شكل جمع مباشر لعدة فضاءات جزئية متعامدة :

$$\mathscr{H} = \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 + \dots \mathscr{F}_m \equiv \bigoplus_{i=1}^{m} \mathscr{F}_i \tag{3.21'}$$

$$|\psi\rangle = P_1|\psi\rangle + P_2|\psi\rangle + \dots P_m|\psi\rangle = (P_1 + P_2 + \dots P_m)|\psi\rangle \tag{3.22'}$$

حيث $P_i$ هو مسقِط $|\psi\rangle$ على $\mathscr{F}_i$ $i = 1, 2 \dots m$ و

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = I$$

<u>قضية 1</u> :

إن المسقط $P$ مؤثر ذاتي الترافق يحقق العلاقة $P^2 = P$ فهو متطابق القوة (Idempotent)، قيمه الخاصة هي 1 أو صفر؛ إن جداء مسقطين $P_iP_j$ ليس مسقطاً إلا إذا كان المسقطان تبادليين : $[P_i, P_j] = 0$ لنأخذ المسقط $P_i$ على الفضاء الجزئي $\mathscr{F}_i$؛ لدينا، من أجل أي متجهتين $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ ومسقطيهما $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ على $\mathscr{F}_i$، العلاقة

$$\langle\psi_2|P_i|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\phi_1\rangle = \langle\psi_2 - \phi_2 + \phi_2|\phi_1\rangle$$
$$= \langle\phi_2|\phi_1\rangle$$

لأن $|\psi_2 - \phi_2\rangle$ عمودي على $|\phi_1\rangle$ حسب (3.19)، ولنفس السبب $|\phi_2\rangle$ عمودي $|\psi_1 - \phi_1\rangle$ والجداء هو

$$= \langle\phi_2|\psi_1\rangle$$

أو

$$= \langle P_i\psi_2|\psi_1\rangle$$

تبين مقارنة الطرف الأول والأخير في هذه العلاقات أن

$$P_i = P_i^{\dagger}$$

أيا كانت المتجهة $|\phi'\rangle \in \mathcal{F}_1$ ( $\mathcal{F}_1$ يقابل $R^m$ في مثلنا أعلاه و $\phi - \psi$ تقابل $OM - Om = mM$ العمودي على $R^m$). إن $|\phi\rangle$ هي المسقط الوحيد لـ $|\psi\rangle$ على الفضاء الجزئي $\mathcal{F}_1$ و $|\psi - \phi\rangle$ عمودي على هذا الفضاء. نكتب

$$|\phi\rangle = P_1|\psi\rangle \qquad (3.20)$$

و $P_1$ هو المؤثر الخطي (مصفوفة لامنتهية هنا) الذي يتيح لنا كتابة $\mathcal{H}$ على شكل جمع مباشر لفضائين جزئيين متعامدين $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_{\perp_1}$.

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_{\perp_1} = 0$$

إن المتجهة 0 هي المتجهة الوحيدة التي تنتمي إلى كلا الفضائين و

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_{\perp_1} \qquad (3.21)$$

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + |\psi - \phi\rangle = P_1|\psi\rangle + (I - P_1)|\psi\rangle \qquad (3.22)$$

حيث I هو المسقِط الوحدة : المصفوفة القطرية، كل عناصر القطر فيها تساوي 1.

وهنا أيضاً ما من شيء يمنعنا من تكرار هذه العملية على كل من الفضائين المتعامدين $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_{\perp_1}$ وكتابة $\mathcal{H}$ على شكل جمع مباشر لعدة فضاءات جزئية متعامدة :

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 + \dots \mathcal{F}_m \equiv \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i \qquad (3.21)'$$

$$|\psi\rangle = P_1|\psi\rangle + P_2|\psi\rangle + \dots P_m|\psi\rangle = (P_1 + P_2 + \dots P_m)|\psi\rangle \qquad (3.22)'$$

حيث $P_i$ هو مسقِط $|\psi\rangle$ على $\mathcal{F}_i$ $i = 1, 2 \dots m$ و

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = I$$

<u>قضية 1</u> :

إن المسقط P مؤثر ذاتي الترافق يحقق العلاقة $P^2 = P$ فهو متطابق القوة (Idempotent)، قيمه الخاصة هي 1 أو صفر ؛ إن جداء مسقطين $P_iP_j$ ليس مسقطاً إلا إذا كان المسقطان تبادليين : $[P_i, P_j] = 0$

لنأخذ المسقط $P_i$ على الفضاء الجزئي $\mathcal{F}_i$ ؛ لدينا، من أجل أي متجهتين $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ ومسقطيهما $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ على $\mathcal{F}_i$، العلاقة

$$\langle\psi_2|P_i|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\phi_1\rangle = \langle\psi_2 - \phi_2 + \phi_2|\phi_1\rangle$$
$$= \langle\phi_2|\phi_1\rangle$$

لأن $|\psi_2 - \phi_2\rangle$ عمودي على $|\phi_1\rangle$ حسب (3.19)، ولنفس السبب $|\phi_2\rangle$ عمودي $|\psi_1 - \phi_1\rangle$ والجداء هو

$$= \langle\phi_2|\psi_1\rangle$$

أو

$$= \langle P_i\psi_2|\psi_1\rangle$$

تبين مقارنة الطرف الأول والأخير في هذه العلاقات أن

$$P_i = P_i^\dagger$$

واضح كذلك من التعريف أنه إذا انتمت $|\psi\rangle$ إلى $\mathcal{F}_i$ أي إذا كانت من الشكل $|\phi\rangle$ فإن $P_i|\psi\rangle = P_i|\phi\rangle = |\phi\rangle$ و $|\phi\rangle$ متجهة خاصة لـ $P_i$ والقيمة الخاصة هي 1. أما إذا انتمت $|\psi\rangle$ إلى $\mathcal{F}_{\perp_i}$ فالمؤثر على هذا الفضاء يساوي $I$ ولكنه حسب '(3.21) هو $I - P_i$ ومنه $P_i = 0$ وقيمه الخاصة تساوي الصفر. إن $|\phi\rangle = |\phi\rangle$

$$P_i^2|\psi\rangle = P_i\left(P_i|\psi\rangle\right) = P_i|\phi\rangle = |\phi\rangle$$

$$= P_i|\psi\rangle$$

و

$$P_i^2 = P_i \tag{3.23}$$

إنها الخاصة التي تميز مؤثر الإسقاط.

لدينا أخيراً

$$\left(P_iP_j\right)^2 = P_iP_jP_iP_j$$

$$= P_iP_iP_jP_j$$

لأن $P_iP_j$ تبادليان؛ وحسب خاصة تطابق القوة لكل من $P_i$ و $P_j$

$$= P_iP_j$$

أي أن $P_iP_j$ مسقط هو أيضاً لأنه ذاتي الترافق :

$$\left(P_iP_j\right)^\dagger = \left(\widetilde{\overline{P_iP_j}}\right) = \tilde{\bar{P}}_j\tilde{\bar{P}}_i = P_j^\dagger P_i^\dagger$$

$$= P_jP_i$$

لأن كلاً مهما ذاتي الترافق و $= P_iP_j$

لأنهما تبادليان.

لنلاحظ أنه في حالة تعامد الفضائين الجزئيين $\mathcal{F}_i$ و $\mathcal{F}_j$ فإن المسقط $P_iP_j = 0$ ونقول عندئذ إن المسقطين متعامدان. أما إذا كان أحد الفضائين حاوياً للآخر، $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ مثلاً، فإن $P_iP_j = P_i$.

ولدينا بصورة أعم القضية التالية :

**<u>قضية 2</u> :**

لتكن لدينا المسقطات ... $P_i, P_j, P_k,$ على الفضاءات الجزئية المتعامدة ... $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k,$. إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون المجموع ...$P_i + P_j + P_k$ مسقطاً هو أن تكون هذه المسقطات متعامدة زوجاً زوجاً. وهي تسقط المتجهة $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ على الفضاء الجزئي ... $\mathcal{F}_i \oplus \mathcal{F}_j \oplus \mathcal{F}_k$ المؤلف من المجموع المباشر لهذه الفضاءات.

إن الشرط كاف حسب تعريفنا لمؤثرات الإسقاط المتعامدة وعلينا لإثبات لزومه البرهان عليه من أجل مسقطين لا على التعيين، $P_i$ و $P_j$ مثلاً. إن $P_i + P_j$ ذاتي الترافق ويجب لكي يحقق الخاصة المميزة (3.23) أن يكون

$$P_iP_j + P_jP_i = 0 \tag{3.24}$$

لنضرب هذه العلاقة من اليسار بـ $P_i$ فنحصل على

$$P_i^2 P_j + P_i P_j P_i = 0$$

وبضربها من اليمين نحصل على

$$P_i P_j P_i + P_j P_i^2 = 0$$

ترينا هاتان العلاقتان أن

$$P_j P_i = P_i P_j$$

وترينا (3.24) $2P_iP_j = 0$ أنهما متعامدان وهو المطلوب.

نستخلص إذاً مما سبق، وإن لم نبرهن بعد على (3.19)، أنه ينطبق على الفضاء الهيلبرتي في حالة الطيف المنفصل كل ما نعرفه عن الفضاءات الإقليدية المنظمة normed، حيث النظيم $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right]^{1/2}$ معين بالجداء السلمي للمتجهات بذاتها. سنرمز لمتجهات القاعدة المتعامدة في الفضاء الهيلبرتي بالرمز $|i\rangle$ $i = 1,2,\ldots\infty$ وللجداء السلمي لمتجهتين متعامدتين بالرمز $\delta_{ij} = \langle i|j\rangle$

وسنكتب المسقط $P_i$ على الفضاء $\mathcal{F}_i$ ذي البعد n على الشكل

$$P_i = \sum_{i=1}^{n}|i\rangle\langle i|$$

الذي يعطينا مسقط المتجهة $|\psi\rangle$ على الفضاء الجزئي $\mathcal{F}_i$ ولنسمه $|\phi_i\rangle$ :

$$|\phi_i\rangle = P_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}|i\rangle\langle i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i|i\rangle \qquad (3.25)$$

حيث $\langle i|\psi\rangle = \alpha_i$ هو مسقط المتجهة $|\psi\rangle$، مركبتها، على المتجهة $|i\rangle$ في $\mathcal{F}_i$. سنكتب مجموع الفضاءات الجزئية المتعامدة التي يتكون منها $\mathcal{H}$ على الشكل

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{N}\mathcal{F}_i$$

ومجموع المساقط على هذه الفضاءات على الشكل

$$\sum P_i = I \qquad (3.26)$$

إن بعض أو كل هذه الفضاءات الجزئية ذو أبعاد لامتناهية ونكتب في حال كون كل واحد منها ذا بعد واحد، أي أنه مكون من إحدى متجهات القاعدة $|i\rangle$ على الشكل

$$\sum_{i=1}^{\infty}P_i = I = \sum_{i=1}^{\infty}|i\rangle\langle i| \qquad (3.27)$$

سنرجئ إلى الفصل الخامس المخصص للإطار الرياضي دراسة حالة الطيف المتصل، حالة الفضاء غير العدود، إلا أنه يمكننا القبول منذ الآن وبدون برهان المقابل للعلاقة (3.27) على شكل تكامل

$$\int dP_q = I = \int|q\rangle\, dq\, \langle q| \qquad (3.28)$$

$\delta_{ij} = \langle i|j \rangle$ أما علاقة التعامد $\langle i|j \rangle$ قاعدة الفضاء غير العدود.

حيث $dP$ هي كثافة الاسقاط وحيث $\langle q|$ قاعدة الفضاء غير العدود. أما علاقة التعامد

فتستبدل بالعلاقة

$$\delta(q - q') = \langle q|q' \rangle \qquad (3.29)$$

$\delta(q - q')$ هي "دالة" ديراك المعرفة، من أجل أي دالة $f(q')$، بالعلاقة

$$\int f(q)\, \delta(q - q')\, dq = f(q') \qquad (3.30)$$

وقياسه إلى تحليل الطيف المتصل وقياسه إلى تحليل الطيف

لنلاحظ منذ الآن أنه يمكن في كثير من الأحيان إعادة تحليل الطيف المتصل وقياسه إلى تحليل الطيف المنفصل وقياسه. وذلك بالنظر إليه كحالة حدية لتحليل الطيف المنفصل بأن نتصور النظمة الكمومية التي تعطي الطيف المتصل، على سبيل المثال نظمة تصادم الجسيمات وتبعثرها، كنظمة موضوعة في صندوق كمون تعكس جدرانه متجهات الموجة بحيث يصبح الطيف منفصلاً نتيجة الشروط على الحدود التي يقتضيها الانعكاس على جدران الصندوق؛ ومن ثم جعل أبعاد الصندوق تتناهى نحو اللانهاية للحصول على الطيف المتصل. ستعفينا هذه الملاحظة من تعقيد الأمور وقصر محاكمتنا فيما يلي على الطيف المنفصل. لنفرض الآن أن متجهات القاعدة $\langle i|$ هي متجهات خاصة للمؤثر A تقابلها القيم الخاصة $a_i$؛ نكتب A مستعينين بـ (3.27) على الشكل

$$A = AI = \sum_i A|i\rangle\langle i| = \sum_i |i\rangle\, a_i \langle i| \qquad (3.30)$$

ونستعين بـ (3.28) عندما تكون المتجهات $\langle q|$ متجهات خاصة للمؤثر A تقابلها "القيم الخاصة" q على الشكل

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} q\, dP_q \qquad (3.31)$$

## 4. القياس في الميكانيك الكمومي

### 1.4– مشكلة القياس

لا تزال مشكلة القياس في الميكانيك الكمومي من أعقد المشاكل التي تواجهها النظرية الكمومية، لأنها تطرح مسائل عديدة لم يجب على بعضها حتى الآن. نعلم من تجربة ثقبي يونغ أن القياس، معرفة الثقب الذي يمر منه الإلكترون (النظمة الكمومية) يخرب السلوك الكمومي، الموجي، بمعنى أنه يعيدنا من الحالة الموجية التي هي توضيع $\langle \phi_1| + \langle \phi_2|$ والاحتمال المرتبط بها الذي يعطي صورة التداخل (1.14) $\left|\langle \phi_1| + \langle \phi_2|\right|^2$ إلى الحالة التقليدية حيث الاحتمال هو $|\phi_i|^2 = P_i$ ، $i = 1,2$. أو بتعبير آخر ينقلنا من توضيع موجتيين إلى حالة يبقى فيها، حسب وضع جهاز القياس أمام الثقب 1 أو الثقب 2، موجة واحدة

مستقلة. تصح هذه المحاكمة على متجهة حالة مؤلفة من توضيع (جمع) عدد ما من متجهات الحالة ينقلها القياس إلى موجة واحدة أو عدد مختزل من الأمواج المستقلة تخضع للإدراك الحسي المعبر عنه بجهاز قياس جهري. يسمى هذا الانتقال نتيجة القياس باختزال باقة الموجة Reduction أو بانطواء الموجة Collapse. ما هي ميكانيكية هذا الاختزال ؟ أو بشكل آخر كيف يجري التفاعل بين جهاز القياس والنظمة الكمومية، بين جملتين لا تخضعان لنفس القوانين ؟ أم أنه من الممكن اعتبار كل الفيزياء الجهرية، ومن ضمنها أجهزة القياس، خاضعة للميكانيك الكمومي وإن كان هذا الخضوع غير باد للعيان نظراً لكبر الأفعال الجهرية أمام الفعل الكمومي $\hbar$. أو على العكس اعتبار الفيزياء المجهرية، الكمومية، جزءاً من الفيزياء الجهرية واعتبار طابعها الاحتمالي الذي يمليه مبدأ اللاتحديد، اللايقين لهايزنبرغ ناتج عن جهلنا ببعض متغيرات الحالة – الوسطاء الخفية كما سماها آنشتاين؟ صحيح أنه تبين تجريبياً منذ عام 1986 استحالة وجود هذه الوسطاء في إطار النظرية الكمومية الحالية ولكن هذا لم يغلق الباب أمام التساؤلات. إن كل ما يمكننا قوله حتى الآن هو أنه يستحيل على الراصد، المجرب، السيطرة على التفاعل بين جهاز القياس وموجة الحالة، ولنرمز لها بـ $|\psi\rangle$، أو مراقبته، أو بتعبير آخر إن الأمر قد أصبح عشوائياً وإن متجهة الحالة $|\psi\rangle$ لم تعد تمثل النظمة الكمومية : لقد انتقل الوضع من الميكانيك الكمومي إلى الإحصاء الكمومي.

## 2.4– مؤثر الكثافة

نسمي متجهة الحالة $|\psi\rangle$ التي توصف النظمة الكمومية أحسن توصيف حالة نقية Pure إلا أنه قد يطرأ ألا تكون معرفة هذه الحالة متاحة وألا تكون ضرورية في المعالجة الإحصائية، على غرار ما يقع في دراسة الترموديناميك والنظرية الحركية للغازات على وجه التحديد حيث لا نستطيع معرفة الخواص الديناميكية لكل جزيء على حده ولا نحتاج إلى هذه المعرفة في دراسة الخواص الجماعية، درجة الحرارة والضغط، الخ. لمجموعة الجزيئات موضع البحث.إن أداة الدراسة الجماعية للنظمات الكمومية، أداة دراستها الإحصائية هي مؤثر الكثافة الذي سنتعرض له بالتفصيل في كتاب الفيزياء الإحصائية القادم مكتفين هنا بالإلماح إليه في نطاق تحليل سيرورة القياس في الميكانيك الكمومي.

ليكن لدينا عدد لامنته من متجهات الحالة، ولنرمز لها بـ $|i\rangle$، التي توصف نفس النظمة الكمومية، وليكن $p_i$ احتمال وجود هذه النظمة في الحالة $|i\rangle$. نقول عندئذ أن النظمة معدة في حالة مزيج من الحالات mixed states مقارنة بحالة إعدادها في حالة نقية $|\psi\rangle$، واحتمال يساوي الواحد لهذه الحالة – حالة الميكانيك الكمومي.

مستقلة. تصح هذه المحاكمة على متجهة حالة مؤلفة من توضيع (جمع) عدد ما من متجهات الحالة ينقلها القياس إلى موجة واحدة أو عدد مختزل من الأمواج المستقلة تخضع للإدراك الحسي المعبر عنه بجهاز قياس جهري. يسمى هذا الانتقال نتيجة القياس باختزال باقة الموجة Reduction أو بانطواء الموجة Collapse. ما هي ميكانيكية هذا الاختزال ؟ أو بشكل آخر كيف يجري التفاعل بين جهاز القياس والنظمة الكمومية، بين جملتين لا تخضعان لنفس القوانين ؟ أم أنه من الممكن اعتبار كل الفيزياء الجهرية، ومن ضمنها أجهزة القياس، خاضعة للميكانيك الكمومي وإن كان هذا الخضوع غير باد للعيان نظراً لكبر الأفعال الجهرية أمام الفعل الكمومي $\hbar$. أو على العكس اعتبار الفيزياء المجهرية، الكمومية، جزءاً من الفيزياء الجهرية واعتبار طابعها الاحتمالي الذي يمليه مبدأ اللاتحديد، اللايقين لهايزنبرغ ناتج عن جهلنا ببعض متغيرات الحالة – الوسطاء الخفية كما سماها آنشتاين؟ صحيح أنه تبين تجريبياً منذ عام 1986 استحالة وجود هذه الوسطاء في إطار النظرية الكمومية الحالية ولكن هذا لم يغلق الباب أمام التساؤلات. إن كل ما يمكننا قوله حتى الآن هو أنه يستحيل على الراصد، المجرب، السيطرة على التفاعل بين جهاز القياس وموجة الحالة، ولنرمز لها بـ $\langle\psi|$، أو مراقبته، أو بتعبير آخر إن الأمر قد أصبح عشوائياً وإن متجهة الحالة $\langle\psi|$ لم تعد تمثل النظمة الكمومية : لقد انتقل الوضع من الميكانيك الكمومي إلى الإحصاء الكمومي.

## 2.4– مؤثر الكثافة

نسمي متجهة الحالة $\langle\psi|$ التي توصف النظمة الكمومية أحسن توصيف حالة نقية Pure إلا أنه قد يطرأ ألا تكون معرفة هذه الحالة متاحة وألا تكون ضرورية في المعالجة الإحصائية، على غرار ما يقع في دراسة الترموديناميك والنظرية الحركية للغازات على وجه التحديد حيث لا نستطيع معرفة الخواص الديناميكية لكل جزيء على حده ولا نحتاج إلى هذه المعرفة في دراسة الخواص الجماعية، درجة الحرارة والضغط، الخ. لمجموعة الجزيئات موضع البحث.إن أداة الدراسة الجماعية للنظمات الكمومية، أداة دراستها الإحصائية هي مؤثر الكثافة الذي سنتعرض له بالتفصيل في كتاب الفيزياء الإحصائية القادم مكتفين هنا بالإلماح إليه في نطاق تحليل سيرورة القياس في الميكانيك الكمومي.

ليكن لدينا عدد لامنته من متجهات الحالة، ولنرمز لها بـ $\langle i|$، التي توصف نفس النظمة الكمومية، وليكن $p_i$ احتمال وجود هذه النظمة في الحالة $\langle i|$. نقول عندئذ أن النظمة معدة في حالة مزيج من الحالات mixed states مقارنة بحالة إعدادها في حالة نقية $\langle\psi|$، واحتمال يساوي الواحد لهذه الحالة – حالة الميكانيك الكمومي.

نسمي مؤثر الكثافة أو مصفوفة الكثافة المؤثر التالي

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} |i\rangle\, p_i\, \langle i| \tag{4.1}$$

إنه المؤثر الذي يعين التوزيع الإحصائي للحالات الممكنة ولذا يسمى أيضاً بالمؤثر الإحصائي.

**قضية 3 :**

إن القيمة الوسطية $\langle A\rangle$ لمؤثر ما، لمقدار فيزيائي ما، معطاة بالعلاقة

$$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}\rho A \tag{4.2}$$

حيث $\mathrm{Tr}$ ترمز لأثر المصفوفة $\rho A$، مجموع العناصر القطرية فيها.

لدينا

$$\mathrm{Tr}\rho A = \sum_i p_i \mathrm{Tr}\left(|i\rangle\langle i|A\right)$$

لكن $|i\rangle\langle i|$ هو المسقِط على المتجهة $\langle i|$، رمزنا له بـ $P_i$ في (3.27) و $P_i = P_i^2$

ويصبح $\mathrm{Tr}$

$$\mathrm{Tr}\left(|i\rangle\langle i|A\right) = \mathrm{Tr}P_iA = \mathrm{Tr}P_i^2A$$
$$= \mathrm{Tr}P_iAP_i$$

لأن $\mathrm{Tr}$ تبادلي : $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ ؛ $\mathrm{Tr}P_i\left(P_iA\right) = \mathrm{Tr}P_iAP_i$

$$= \mathrm{Tr}|i\rangle\langle i|A|i\rangle\langle i|$$

إن $\langle i|A|i\rangle$ هو عنصر المصفوفة $A_{ii}$ والمسقط $|i\rangle\langle i|$ هو المصفوفة التي كل عناصرها مساوية للصفر ماعدا العنصر القطري $(ii)$ المساوي للواحد و $\mathrm{Tr}|i\rangle\langle i| = 1$. لدينا أخيراً

$$\mathrm{Tr}\rho A = \sum_i p_i \langle i|A|i\rangle$$

هنا، $p_i$ إنها $|i\rangle \equiv |\psi_i\rangle$ إلى احتمال وجود متجهة الحالة في الحالة $|\alpha_i|^2$ رمزنا في العلاقة (2.16) بـ $|\alpha_i|^2$ وبـ $a_i$ للمقدار $A_{ii}$، قيمة المؤثر $A$ الخاصة عندما يوجد في الحالة $|i\rangle$ وبالتالي فإن $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}\rho A$ وهو المطلوب.

## 3.4– سيرورة القياس المثالي

لتكن النظمة الكمومية في الحالة النقية $|\psi\rangle$ وليكن جهاز القياس في الحالة $|\phi_0\rangle$. ننظر إلى جهاز القياس كنظمة كمومية. يوصف الجداء $|\psi\rangle|\phi_0\rangle$ حالة الجملة المؤلفة من النظمة الكمومية (الإلكترون) وجهاز القياس. إن هذا الجداء هو جداء تانسوري لمتجهتين تنتمي الأولى إلى الفضاء الهيلبرتي للنظمة الكمومية والثانية إلى الفضاء الهيلبرتي لجهاز القياس التقليدي، ولكننا لن ندخل في هذه التفاصيل هنا. إن

طيف جهاز القياس طيف متصل وقيمه الخاصة متصلة ولكننا سنفرض هنا مستعينين بملاحظة آخر الفقرة 3 أنه طيف منفصل لتسهيل الكتابة، كما سنفرض أنه من الممكن كتابة $|\psi\rangle$ بدليل المتجهات الخاصة لمؤثر ذي طيف منفصل A $\psi = \sum_i a_i|\psi_i\rangle$ حيث $A|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle$. ونسمي القياس في هذه الحالة بالقياس المثالي أو قياس فون نويمان. يقع التفاعل بين النظمة الكمومية وجهاز القياس ويتحول الجداء $|\psi\rangle|\phi_o\rangle$ مع الزمن إلى الجداء

$$|\psi\rangle|\phi_o\rangle \xrightarrow{t} \sum_i a_i|\psi_i\rangle|\phi_i\rangle \tag{4.3}$$

حيث $|\phi_i\rangle$ هي متجهة حالة جهاز القياس التي تقابل القيمة $a_i$ للمؤثر A و $|\psi\rangle$ هي كما كانت في البدء توضيع عدد لامنته من المتجهات $|\psi_i\rangle$. نسمي هذا الانتقال (4.3) مرحلة ما قبل القياس. تليها مرحلة تخريب السلوك الكمومي، تخريب التوضيع وتحول الحالة النقية $|\psi\rangle$ إلى حالة عشوائية يعينها مؤثر الكثافة الإحصائي

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty}|\psi_i\rangle\, p_i\, \langle\psi_i| \tag{4.4}$$

لنكرر هنا أن تخريب التوضيع هو الانتقال من الحالة الكمومية الموجية، من حالة جمع السعات وأخذ مربع مجموعها لتعيين الاحتمال إلى الحالة التقليدية حيث مربع السعة – شدة الموجة – هو الذي يعين الاحتمال. ولنلاحظ كذلك أن التوضيع الكمومي يعني جمع حالات متناقضة من وجهة النظر التقليدية؛ ففي تجربة ثقبي يونغ على سبيل المثال يعني التوضيع عندما ننظر النظمة الكمومية كجسيم وليس كموجة أن الإلكترون قد مر من الثقبين في آن واحد رغم أننا نعلم أن الإلكترون لا يمر إلا من واحد منهما وأنه لا يتجزأ. يعرف هذا التوضيع لحالتين متناقضتين باسم حالة قطة شرودينغر : إنها حية أو ميتة والتوضيع يعني أنها حية وميتة في آن واحد. وهكذا فإن تخريب التوضيع أساسي للقيام بالقياس بواسطة جهاز تقليدي بطبيعة الحال. يقع القياس، وهي المرحلة الثالثة والأخيرة، عندما يؤشر الجهاز إلى القيمة المقابلة لقيمة المؤثر A عندما تكون النظمة في الحالة $|\psi_n\rangle$ أي عندما يكون الجهاز في الحالة $|\phi_n\rangle$. تقابل هذه المرحلة انطواء الموجة

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_n\rangle \tag{4.5}$$

إن الانتقال من الحالة $|\psi\rangle$ إلى الحالة $|\psi_n\rangle$ انتقال لا نعزوه لسبب، إنه لا سببي. لقد ركزنا في المناقشة على قياس مؤثر واحد A وعلى طيف غير متدن له؛ إلا أنه ما من شيء يمنع من النظر إلى مجموعة تامة من الرصودات التبادلية والتركيز على الانتقال من $|\psi\rangle$ إلى فضاء جزئي $\mathcal{F}_n$ تحدده المتجهات التي يأخذ فيها أحد المؤثرات الرصودة نفس القيمة (طيف متدن). ليكن $P_n$ المسقط على $\mathcal{F}_n$ ونكتب انطواء الموجة، اختزالها على الشكل

$$|\psi\rangle \rightarrow P_n|\psi\rangle \tag{4.6}$$

المعروف باسم مبدأ اختزال الموجة.

سنضع إذاً مبدأ القياس التالي في الميكانيك الكمومي المعروف باسم مبدأ اختزال الموجة. لمجموعة تامة من الرصودات التبادلية التي أعطت قيماً خاصة تقابل الفضاء الجزئي $\mathcal{F}_n$ بـ $\langle P_n|\psi\rangle$ :

م.5 : تتمثل حالة النظمة الكمومية مباشرة بعد القياس المثالي لمجموعة تامة من الرصودات التبادلية التي أعطت قيماً خاصة تقابل الفضاء الجزئي $\mathcal{F}_n$ بـ $\langle P_n|\psi\rangle$ :

لتكن المؤثرات A، B،... مجموعة الرصودات التبادلية ولتكن $a_n$، $b_m$،... القيم التي حددها القياس المثالي آنف الذكر. سنقبل كمبدأ

م.6 : إن حالة النظمة الكمومية مباشرة بعد القياس المثالي معينة تماماً – حالة نقية بهذه المقادير ونكتبها على الشكل $\langle ... ,a_n, b_m|$.

كلازمة للمبدأ السابق.

يمكن النظر إلى هذا المبدأ كلازمة للمبدأ السابق.

وهكذا نرى أن القياس في الميكانيك الكمومي يلعب دورين مختلفين بالنسبة للماضي وللمستقبل فهو يتحقق من احتمال الحصول على مختلف النتائج التي تتنبأ بها متجهة الحالة الناتجة عن قياس ماضٍ والتي خضعت إلى معادلة شرودينغر، أما بالنسبة للمستقبل فهو يعد متجهة حالة نقية جديدة تعينها نتائج قياس مجموعة تامة من الرصودات التبادلية – التي يمكن قياسها في آن واحد.

لننظر الآن إلى ترجح نتيجة القياس بالنسبة للقيمة الوسطية لأي من الرصودات التبادلية، A مثلاً عندما يكون في الحالة $\langle\psi_n|$ عند انطواء الموجة. نقيس هذا الترجح كما في كل الحالات الإحصائية بالانحراف التربيعي الوسطي، أو التباين Variance $\Delta A$ المعرف بـ

$$(\Delta A)^2 = \left\langle \left(A - \langle A\rangle\right)^2 \right\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \qquad (4.7)$$

ولدينا حسب م.3 (العلاقتان (2.16) و (2.17))

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi_n|A^2|\psi_n\rangle - \left(\langle\psi_n|A|\psi_n\rangle\right)^2$$

$$= \langle A\psi_n|A\psi_n\rangle - \left(\langle\psi_n|A\psi_n\rangle\right)^2$$

إن الحد الأول في الطرف الأيمن هو مربع طويلة (نظيم) المتجهة $\langle A\psi_n|$ (مضروباً بنظيم $\langle\psi_n|$ = 1 $(\langle\psi_n|\psi_n\rangle)$ والحد الثاني هو مربع الجداء السلمي لهاتين المتجهتين والفرق بينهما $\geq 0$ حسب متراجحة كوشي–شفارتز ولا يقع التساوي إلا إذا كانت المتجهتان $\langle A|\psi_n$ و $\langle\psi_n|$ متناسبتين؛ أي عندما تكون $\langle\psi_n|$ متجهة خاصة لـ A $\langle A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$ والترجح في هذه الحالة يساوي الصفر والقيم التي يأخذها A قيم يقينية، مؤكدة :

$$(\Delta A)^2 = 0$$

<u>ملاحظة</u> :

نقول عن قياس فون نويمان كما أوردناه إنه مثالي لأن جهاز القياس قد أفسد الحالة الديناميكية للنظمة الكمومية إلى أقل حد ممكن؛ يمكن إجراء حسابات عديدة لإعادة قياس ما إلى القياس المثالي عندما ينتقل

الجداء $|\psi\rangle|\phi_o\rangle$ إلى $\sum_n \alpha_n |\chi_n\rangle|\phi_n\rangle$ حيث المتجهات $|\chi_n\rangle$ غير متعامدة على سبيل المثال. ولكننا سنفرض دوماً أننا في حالة قياس مثالي.

## 4.4 – قطع الاتساق Decoherence

أدخل حديثاً على سيرورة القياس مفهوم جديد هو قطع الاتساق. يدخل هذا المفهوم، بالإضافة إلى تفاعل النظمة الكمومية مع جهاز القياس، التفاعل مع المحيط، مع كل الكون إن شئنا، بحيث تصبح حالة الموجة الكمومية جداء ثلاث متجهات حالة، متجهة حالة النظمة الكمومية $|\psi\rangle$ ومتجهة حالة الجهاز $|\phi\rangle$ ومتجهة حالة المحيط $|e\rangle$ – الجداء التانسوري لثلاث متجهات تنتمي إلى ثلاثة فضاءات هيلبرتية مختلفة. إن ما يعيق تداخل العناصر المختلفة $|\psi_n\rangle$، المكونة بالتوضيع لـ $|\psi\rangle$، أي ما يمنعها تحديداً من السلوك الموجي هو تفاعلها مع المحيط ككل وليس مع جهاز القياس وحده. لا يولد قطع الاتساق انطواء الموجة – اختزال باقة الموجة – ولكنه يفسر حدوثه بالقول إن الطبيعة الكمومية للنظمة تتسرب إلى المحيط بحيث تتحول متجهة الحالة النقية إلى مزيج من الحالات وتنفصل المتجهات $|\psi_n\rangle$ عن بعضها نتيجة تفاعلها مع المحيط بحيث يستحيل عليها العودة إلى التوضيع وإلى صورة التداخل تماماً على غرار ما يحصل عندما نضع كاشف الإلكترونات الضوئي أمام أحد ثقبي يونغ. وهكذا فسيرورة القياس لا عكوسة irreversible. وهي بطبيعة الحال غير قابلة للاستعادة لأن القياس أدى إلى ظهور متجهة حالة جديدة تختلف اختلافاً جذرياً عن الحالة البدائية $|\psi\rangle$، ولعل الاستعادة الممكنة هي قياس الوضع، لأن مؤثر الوضع هو العدد الذي يقيسه كما رأينا ولأنه من الضروري أن ينتج قياس ثان للوضع بعد زمن قصير من القياس الأول مقداراً قريباً من المقدار الأول لأنه لا يمكن تصور انتقال الجسيمات بسرعة فائقة قد تتجاوز سرعة الضوء وتناقض النسبية الخاصة.

إلا أن قطع الاتساق لا يفسر حدوث المرحلة الأخيرة، انطواء الموجة ولكنه يعطينا مثالاً تجريبياً على تفاعل متجهات الحالة التي لم تعد متسقة مع المحيط، على تشابكها مع جهاز القياس ومع المحيط بصورة عامة. يطلق على هذا التشابك اسم Entanglement.

جرى قياس انطواء متجهة حالة مؤلفة من توضيع حالتين للمرة الأولى عام 1996 وذلك بإدخال ذرات الروبيديوم Rubidium المكونة من توضيع حالتين في فجوة ممتلئة بالأمواج المكروية. يختلف تأثير هاتين الحالتين على طور حقل الموجة المكروية الذي يصبح نتيجة تفاعله مع الذرات توضيعاً لحالتين بطورين مختلفين. إلا أن تبادل الطاقة بين الحقل ومحيطه يعيد هاتين الحالتين إلى حالة وحيدة decohrence : يختزل باقة الموجة. تلعب نظرية قطع الاتساق دوراً هاماً في المعلوماتية الكمومية ونظام التعمية فيها.

الجداء $\langle\phi_o|\psi\rangle$ إلى $\sum_n \alpha_n|\chi_n\rangle|\phi_n\rangle$ حيث المتجهات $|\chi_n\rangle$ غير متعامدة على سبيل المثال. ولكننا سنفرض دوماً أننا في حالة قياس مثالي.

## 4.4- قطع الاتساق Decoherence

أدخل حديثاً على سيرورة القياس مفهوم جديد هو قطع الاتساق. يدخل هذا المفهوم، بالإضافة إلى تفاعل النظمة الكمومية مع جهاز القياس، التفاعل مع المحيط، مع كل الكون إن شئنا، بحيث تصبح حالة الموجة الكمومية جداء ثلاث متجهات حالة، متجهة حالة النظمة الكمومية $|\psi\rangle$ ومتجهة حالة الجهاز $|\phi\rangle$ ومتجهة حالة المحيط $|e\rangle$ – الجداء التانسوري لثلاث متجهات تنتمي إلى ثلاثة فضاءات هيلبرتية مختلفة. إن ما يعيق تداخل العناصر المختلفة $|\psi_n\rangle$، المكونة بالتوضيع لـ $|\psi\rangle$، أي ما يمنعها تحديداً من السلوك الموجي هو تفاعلها مع المحيط ككل وليس مع جهاز القياس وحده. لا يولد قطع الاتساق انطواء الموجة – اختزال باقة الموجة – ولكنه يفسر حدوثه بالقول إن الطبيعة الكمومية للنظمة تتسرب إلى المحيط بحيث تتحول متجهة الحالة النقية إلى مزيج من الحالات وتنفصل المتجهات $|\psi_n\rangle$ عن بعضها نتيجة تفاعلها مع المحيط بحيث يستحيل عليها العودة إلى التوضيع وإلى صورة التداخل تماماً على غرار ما يحصل عندما نضع كاشف الإلكترونات الضوئي أمام أحد ثقبي يونغ. وهكذا فسيرورة القياس لا عكوسة irreversible. وهي بطبيعة الحال غير قابلة للاستعادة لأن القياس أدى إلى ظهور متجهة حالة جديدة تختلف اختلافاً جذرياً عن الحالة البدائية $|\psi\rangle$، ولعل الاستعادة الممكنة هي قياس الوضع، لأن مؤثر الوضع هو العدد الذي يقيسه كما رأينا ولأنه من الضروري أن ينتج قياس ثان للوضع بعد زمن قصير من القياس الأول مقداراً قريباً من المقدار الأول لأنه لا يمكن تصور انتقال الجسيمات بسرعة فائقة قد تتجاوز سرعة الضوء وتناقض النسبية الخاصة.

إلا أن قطع الاتساق لا يفسر حدوث المرحلة الأخيرة، انطواء الموجة ولكنه يعطينا مثالاً تجريبياً على تفاعل متجهات الحالة التي لم تعد متسقة مع المحيط، على تشابكها مع جهاز القياس ومع المحيط بصورة عامة. يطلق على هذا التشابك اسم Entanglement.

جرى قياس انطواء متجهة حالة مؤلفة من توضيع حالتين للمرة الأولى عام 1996 وذلك بإدخال ذرات الروبيديوم Rubidium المكونة من توضيع حالتين في فجوة ممتلئة بالأمواج المكروية. يختلف تأثير هاتين الحالتين على طور حقل الموجة المكروية الذي يصبح نتيجة تفاعله مع الذرات توضيعاً لحالتين بطورين مختلفين. إلا أن تبادل الطاقة بين الحقل ومحيطه يعيد هاتين الحالتين إلى حالة وحيدة decohrence: يختزل باقة الموجة. تلعب نظرية قطع الاتساق دوراً هاماً في المعلوماتية الكمومية ونظام التعمية فيها.

## 1.5- مؤثر التطور

كتبنا معادلة شرودينغر، المعادلة التفاضلية بمشتقات $|\psi(q,t)\rangle$ بالنسبة للزمن $t$ وللوضع العام $q$، على الشكل (2.28) و (2.29). يمكننا انطلاقاً من هذه المعادلة إيجاد المعادلة التي يخضع لها المؤثر الذي ينقل متجهة الحالة من اللحظة $t_o$، $|\psi(t_o)\rangle$ إلى اللحظة $t$، $|\psi(t)\rangle$. يطلق على هذا المؤثر اسم مؤثر التطور ويرمز له بـ $U(t,t_o)$ :

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_o)|\psi(t_o)\rangle \qquad (5.1)$$

لدينا بتطبيق معادلة شرودينغر على هذه العلاقة

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_o)|\psi(t_o)\rangle$$

ومن جهة ثانية

$$= H|\psi(t)\rangle = HU(t,t_o)|\psi(t_o)\rangle$$

ومنه

$$i\hbar\frac{dU(t,t_o)}{dt} = H\,U(t,t_o) \qquad (5.2)$$

يحقق المؤثر $U$ إضافة إلى هذه المعادلة التفاضلية (معادلة شرودينغر)، الشروط التالية (آخذين $t_o = 0$ مبدأ لقياس الزمن).

$$U(t_1+t_2) = U(t_1)U(t_2) \qquad (5.3)_1$$

$$U(t) = U(t+0) = U(t)U(0) \qquad (5.3)_2$$

ومنه

$$U(0) = I$$

لدينا كذلك

$$U(-t) = U^{-1}(t) \qquad (5.3)_3$$

لأن

$$U(-t)U(t) = U(-t+t) = U(0) = I$$

نقول عن مؤثر يحقق هذه الشروط الثلاثة إنه مؤثر بوسيط واحد، وهو مؤثر تبادلي لأن

$$U(t_1+t_2) = U(t_2+t_1) = U(t_2)U(t_1)$$
$$= U(t_1)U(t_2)$$

حسب الشرط الأول. يبين هذا الشرط أيضاً باشتقاق $U(T)$ حيث $T = t + t_1$ بالنسبة لـ $t_1$، ثم جعل $t_1$ مساوية للصفر أن

$$\frac{dT}{dt_1} = 1 \quad , \quad \frac{dU(T)}{dT}\frac{dT}{dt_1} = U(t)\frac{dU(t_1)}{dt_1}\bigg|_{t_1=0}$$

أو

$$\frac{dU(t)}{dt} = U(t)U'(0)$$

ومنه، بالمكاملة

$$U(t) = e^{tU'(0)}$$

لكن معادلة شرودينغر (5.2) تبين لنا أن $U'(0) = -\frac{i}{\hbar}H$ ومنه، بفرض $H$ مستقلاً عن الزمن

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \tag{5.4}$$

$$U^{-1}(t) = U^{\dagger}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH} \tag{5.4'}$$

أي أن مولد المؤثر $U$، بوسيط واحد هو المؤثر $H$.

صادفنا في الميكانيك التقليدي هذا النوع من المؤثرات (مصفوفات منتهية) بوسيط واحد. انظر (ملحق الفصل السابع من الكتاب I الذي أعدنا نسخه في ملحق الفصل التاسع من هذا الكتاب). نكتب (5.4) ككل دالة أسية من أجل $t$ صغيرة على الشكل

$$U(t) = I - \frac{i}{\hbar}Ht + \dots \tag{5.5}$$

نرى بسهولة من جديد أن $U$ مؤثر واحدي حسب (5.5)

$$U^{\dagger}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H^{\dagger}t} = U^{-1}(t)$$

ذلك أن $H$ ذاتي الترافق $H = H^{\dagger}$. إن كون $U$ واحدياً أمر طبيعي لأن احتمال وجود النظمة يساوي الواحد في الميكانيك الكمومي غير النسبوي الذي لا يدخل فيه فناء الجسيمات

$$\langle\psi(t_o)|\psi(t_o)\rangle = \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle U\psi(t_o)|U\psi(t_o)\rangle$$
$$= \langle\psi(t_o)|U^{\dagger}U|\psi(t_o)\rangle$$

و

$$U^{\dagger}U = I \tag{5.6}$$

**تعريف 6 :**

نقول عن حالات نظمة تأخذ الطاقة فيها قيماً محددة إنها حالات مستقرة.

لدينا من معادلة شرودينغر $E_n$ ومتجهات حالات النظمة $|\psi_n\rangle$ هي متجهات خاصة للطاقة بقيم خاصة

$$i\hbar\frac{\partial|\psi_n\rangle}{\partial t} = H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

ومنه

$$Ln|\psi_n\rangle = -\frac{i}{\hbar}E_n t$$

و

$$|\psi_n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n(q)\rangle \quad (5.7)$$

حيث $\varphi_n(q)$ ثابتة بالنسبة للزمن. ونكون على هذا الشكل قد كتبنا المتجهة الخاصة على شكل جداء يتوقف الحد الأول منه على الزمن والثاني على الوضع ونكتب متجهة الحالة أياً كانت بدليل متجهات الحالات المستقرة

$$|\psi(t,q)\rangle \equiv |\psi\rangle = \sum_n a_n|\psi_n\rangle = \sum_n a_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n(q)\rangle \quad (5.7)'$$

تربنا العلاقة $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ أن $|\psi_n(q)\rangle$ متجهات خاصة لمؤثر التطور وقيمها الخاصة $e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$

$$U|\psi_n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi_n\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}Ht + \frac{1}{2\hbar^2}H^2t^2 + \dots\right)|\psi_n\rangle$$
$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}E_n t + \frac{1}{2\hbar^2}E_n^2t^2 + \dots\right)|\psi_n\rangle \quad (5.8)$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\psi_n\rangle$$

## 2.5- تمثيل شرودينغر وتمثيل هايزنبرغ

نقول عندما نوصف التطور الزمني لـ $|\psi(t)\rangle$ باستعمال مؤثر التطور كما عرفناه في (5.1) إننا أمام تمثيل شرودينغر لتطور متجهة الحالة. ليس هذا التوصيف هو الوحيد الممكن : يمكننا تصور تمثيل آخر تبقى فيه متجهة الحالة ثابتة بالنسبة للزمن ويعبر تغير المؤثرات بالنسبة للزمن عن تطور النظمة الكمومية. يسمى هذا التمثيل تمثيل هايزنبرغ. سنرمز بـ S و H لمختلف متجهات الحالة وللمؤثرات في تمثيل شرودينغر وتمثيل هايزنبرغ على الترتيب ونكتب (5.1) على الشكل

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t,t_o)|\psi_S(t_o)\rangle \quad (5.1)'$$

ولدينا في اللحظة t مثلاً متجهة الحالة

$$A_S|\psi_S(t)\rangle = |\phi_S(t)\rangle$$

الناتجة عن المؤثر $A_S$ في اللحظة t. أما في تمثيل هايزنبرغ فإن متجهة الحالة لا تتغير بالنسبة للزمن

$$\psi_H(t) = |\psi_S(t_o)\rangle = U^{-1}|\psi(t)\rangle \quad (5.9)$$

ليكن $A_H$ المؤثر المتغير بالنسبة للزمن في تمثيل هايزنبرغ والمقابل لـ $A_S$. وحسب العلاقة (5.9) فإن

$$A_H|\psi_H(t)\rangle = |\phi_H(t)\rangle = U^{-1}|\phi_S(t)\rangle$$
$$= U^{-1}A_S|\psi_S(t)\rangle = U^{-1}A_S U|\psi_H(t)\rangle$$

ومنه

$$A_H = U^{-1}A_S U \qquad (5.10)$$

ومن أجل $t = t_o$ ، $U = I$ و

$$A_H(t_o) = A_S(t_o)$$

(5.10) صحيحة من أجل أي مؤثر وصحيحة إذاً بالنسبة للهاميلتوني

$$H_H = U^{-1}H_S U \qquad (5.10)'$$

يعطي اشتقاق (5.10) بالنسبة للزمن آخذين بعين الاعتبار (5.4) و '(5.4)

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}H\,U^{-1}A_S U + U^{-1}\frac{\partial A_S}{\partial t}U - \frac{i}{\hbar}U^{-1}A_S H\,U$$

ثم بملاحظة أن $[U, H] = 0$ وبوضع $U^{-1}U = UU^{-1} = I$ بين $H$ و $A_S$

$$= \frac{i}{\hbar}U^{-1}H\,U\,U^{-1}A_S\,U + U^{-1}\frac{\partial A_S}{\partial t}U - \frac{i}{\hbar}U^{-1}A_S U\,U^{-1}H\,U$$

$$= \frac{i}{\hbar}H_H A_H + U^{-1}\frac{\partial A_S}{\partial t}U - \frac{i}{\hbar}A_H H_H$$

الذي نكتبه على الشكل

$$i\hbar\frac{dA_H}{dt} = [A_H, H_H] + i\hbar\frac{\partial A_H}{\partial t} \qquad (5.11)$$

مع الشرط البدائي $A_H(t_o) = A_S(t_o)$ . إنها العلاقة (3.2) التي عرفنا بمقتضاها مشتق مؤثر بالنسبة للزمن الناتج عن تغير $\langle\psi|$ بالنسبة للزمن. إن القيمة الوسطية لـ $A_H$ هي

$$\langle\psi_H|A_H|\psi_H\rangle = \langle\psi_S(t_o)|A_H|\psi_S(t_o)\rangle$$

ومشتق هذه القيمة الوسطية

$$\frac{d\langle A_H\rangle}{dt} = \langle\psi(t_o)|\frac{dA_H}{dt}|\psi(t_o)\rangle$$

$$= \left\langle\frac{dA_H}{dt}\right\rangle$$

ونجد من جديد التعريف الذي أعطيناه لمشتق مؤثر بالنسبة للزمن (3.1).

تكمن أهمية تمثيل هايزنبرغ بالعلاقة (5.11) في التماثل الصوري بين الميكانيك الكمومي والميكانيك التقليدي الذي عبرنا عنه بالهيكلة اللاغرانجية أو الهاميلتونية. وجدنا أننا ننتقل صورياً من الميكانيك التقليدي إلى الميكانيك الكمومي باستبدال لامتي بواسون بالمبادل مضروباً بـ $\frac{i}{\hbar}$. نجد هنا انطلاقاً من (5.11) و (3.8) و (3.6) على سبيل المثال من أجل المؤثرين $q^i$ و $p_i$

$$i\hbar\frac{dq^i}{dt}=\left[q^i,H\right]=i\hbar\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (5.12)$$

وكذلك

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (5.13)$$

أي أننا نحصل على معادلات هاملتون القانونية بالمؤثرات. إن هذا التقابل بين الميكانيك التقليدي (بالدالات) والميكانيك الكمومي بالمؤثرات جعل مؤسسي هذا التمثيل، هايزنبرغ، بورن وجوردان يطلقون عليه اسم ميكانيك المصفوفات وهو يأخذ بعين الاعتبار الطابع الجسيمي للنظمة الكمومية. أما تمثيل شرودينغر فإنه يلح على طابعه الموجي والتمثيلان متكافئان تماماً.

تبين العلاقة (5.11) أنه عندما لا يكون المؤثر $A_H$ تابعاً مباشرة للزمن فإن انحفاظه، ثباته بالنسبة للزمن يعني أنه تبادلي مع $H_H$

$$\left[A_H, H_H\right]=0$$

تماماً كما هو عليه الحال في الميكانيك التقليدي. لنلاحظ أن $\left[A_H, H_H\right]=0$ يكافئ $\left[A_S, H_S\right]=0$ لأن كل المبادلات تبقى على حالها في الانتقال من تمثيل إلى آخر بمعنى أنه إذا كان $\left[A_H, B_H\right]=D_H$ فإن $\left[A_S, B_S\right]=D_s$ و $D_H=U^{-1}D_SU$ .

## 3.5– تكامل المسار Path integral

يمكن بالإضافة إلى هذين التمثيلين المتكافئين، الموجي لشرودينغر وميكانيك المصفوفات لهايزنبرغ القائم على استبدال المبادلات (مضروبة بـ $\frac{i}{\hbar}$) بلامات بواسون، الانطلاق من مفهوم جديد يأخذ وجهتي النظر هاتين بعين الاعتبار. فهو يقبل المنطلق الموجي الذي يعبر عنه مبدأ هويغنز، الذي استندنا إليه لتفسير السلوك الموجي وبصورة خاصة لتفسير الضوء الفيزيائي، القائل بأن كل نقطة من نقاط سطح الموجة (النقاط التي لها نفس السعة في لحظة معينة) هي في واقع الأمر منبع نقطي يصدر موجة جديدة – يشع الضوء في كل الاتجاهات. سنقبل إذاً أن بإمكان الجسيم الكمومي المنطلق من نقطة ما في لحظة ما $t_o$، $q(t_o)$ أخذ كل الطرق، كل المسارات الممكنة للوصول إلى نقطة آخرى $q(t)$ بعد فاصل زمني $t-t_o$. وهكذا فإن سعة الانتقال من متجهة الحالة في اللحظة $t_o$ ونرمز لها بـ $|q(t_o)\rangle$، إلى متجهة الحالة $|q(t)\rangle$ التي عبرنا عنها بواسطة مؤثر التطور $U(t,t_o)$ : $\langle q(t)|U(t,t_o)|q(t_o)\rangle$ هي بالجمع على كل المسارات، بالتكامل على كل المسارات، وهو ما يطلق عليه اسم تكامل المسار. وضع فاينمان هذه الطريقة المكافئة للتمثيلين السابقين في أطروحته للدكتوراه عام 1942 وطبقها بشكل خاص بعد عشرة أعوام على نظرية الحقول المكممة التي لن نتعرض لها في هذا الكتاب. لهذه الطريقة ميزات عديدة في

$$i\hbar \frac{dq^i}{dt} = \left[q^i, H\right] = i\hbar \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{5.12}$$

وكذلك

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{5.13}$$

أي أننا نحصل على معادلات هاملتون القانونية بالمؤثرات. إن هذا التقابل بين الميكانيك التقليدي (بالدالات) والميكانيك الكمومي بالمؤثرات جعل مؤسسي هذا التمثيل، هايزنبرغ، بورن وجوردان يطلقون عليه اسم ميكانيك المصفوفات وهو يأخذ بعين الاعتبار الطابع الجسيمي للنظمة الكمومية. أما تمثيل شرودينغر فإنه يلح على طابعه الموجي والتمثيلان متكافئان تماماً.

تبين العلاقة (5.11) أنه عندما لا يكون المؤثر $A_H$ تابعاً مباشرة للزمن فإن انحفاظه، ثباته بالنسبة للزمن يعني أنه تبادلي مع $H_H$

$$\left[A_H, H_H\right] = 0$$

تماماً كما هو عليه الحال في الميكانيك التقليدي. لنلاحظ أن $\left[A_H, H_H\right] = 0$ يكافئ $\left[A_S, H_S\right] = 0$ لأن كل المبادلات تبقى على حالها في الانتقال من تمثيل إلى آخر بمعنى أنه إذا كان $\left[A_H, B_H\right] = D_H$ فإن $\left[A_S, B_S\right] = D_s$ و $D_H = U^{-1} D_S U$.

## 3.5– تكامل المسار Path integral

يمكن بالإضافة إلى هذين التمثيلين المتكافئين، الموجي لشرودينغر وميكانيك المصفوفات لهايزنبرغ القائم على استبدال المبادلات (مضروبة بـ $\frac{i}{\hbar}$) بلامات بواسون، الانطلاق من مفهوم جديد يأخذ وجهتي النظر هاتين بعين الاعتبار. فهو يقبل المنطلق الموجي الذي يعبر عنه مبدأ هويغنز، الذي استندنا إليه لتفسير السلوك الموجي وبصورة خاصة لتفسير الضوء الفيزيائي، القائل بأن كل نقطة من نقاط سطح الموجة (النقاط التي لها نفس السعة في لحظة معينة) هي في واقع الأمر منبع نقطي يصدر موجة جديدة – يشع الضوء في كل الاتجاهات. سنقبل إذاً أن بإمكان الجسيم الكمومي المنطلق من نقطة ما في لحظة ما $t_o$، $q(t_o)$ أخذ كل الطرق، كل المسارات الممكنة للوصول إلى نقطة آخرى $q(t)$ بعد فاصل زمني $t - t_o$. وهكذا فإن سعة الانتقال من متجهة الحالة في اللحظة $t_o$ ونرمز لها بـ $|q(t_o)\rangle$، إلى متجهة الحالة $|q(t)\rangle$ التي عبرنا عنها بواسطة مؤثر التطور $U(t, t_o)$ : $\langle q(t)|U(t, t_o)|q(t_o)\rangle$ هي بالجمع على كل المسارات، بالتكامل على كل المسارات، وهو ما يطلق عليه اسم تكامل المسار. وضع فاينمان هذه الطريقة المكافئة للتمثيلين السابقين في أطروحته للدكتوراه عام 1942 وطبقها بشكل خاص بعد عشرة أعوام على نظرية الحقول المكممة التي لن نتعرض لها في هذا الكتاب. لهذه الطريقة ميزات عديدة في

الميكانيك الكمومي والميكانيك الإحصائي الكمومي خاصة عندما يعجز تمثيل هايزنبرغ على تعيين المبادلات : ليس لكل عزم في الميكانيك التقليدي عزم مرافق وبالتالي لا توجد لامتان لهما على غرار $\{q, p\}$. سنتعرض بالتفصيل حين ندرس تصادم الجسيمات إلى ناشر فاينمان Propagator مكتفين هنا، في إطار عرضنا لمبادئ الميكانيك الكمومي إعطاء لمحة عن هذه النظرية[5].

نعبر رياضياً عن مبدأ هويغنز بالانتقال من المعادلة التفاضلية إلى المعادلة التكاملية المقابلة لها والتي تكامل على كل السعات على النحو التالي :

لنرمز بـ D للمؤثر التفاضلي على دالة ما، على متجهة الحالة هنا والتي نرمز لها بالرمز $|q(t)\rangle$، حيث q الوضع في فضاء الهيئة بـ n بعداً، إلا أنه لا يغير في المحاكمة شيئاً النظر إليه على أنه ببعد واحد. لنكتب المعادلة التفاضلية على الشكل

$$D|q(t)\rangle = V(q)|q(t)\rangle \qquad (5.14)$$

حيث، في معادلة شرودينغر، $D = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\hbar^2}{2m^2}\nabla^2$ و $V(q)$ هو الكمون.

إن (5.14) معادلة تفاضلية جزئية بطرف ثان. نسمي "دالة" غرين ونرمز لها بـ $G(q, t)$ الدالة التي تحقق المعادلة التفاضلية التالية

$$DG(q - q_o, t - t_o) = \delta(q - q_o)\delta(t - t_o) \qquad (5.15)$$

بحيث يمكننا كتابة حل المعادلة (5.14) على شكل تكامل :

$$|q(t)\rangle = |q(t_o)\rangle + \int G(q - q_1, t - t_1)V(q_1)|q_1(t_1)\rangle dq_1 dt_1 \qquad (5.16)$$

عندما نطبق المؤثر التفاضلي D على طرفي هذه المعادلة، آخذين تعريف دالة غرين بعين الاعتبار، نحصل على المعادلة (5.14).

نسمي المقدار التالي، ونرمز له بـ $K(q, t; q_1, t_1)$، نواة التكامل

$$K(q, t; q_1, t_1) = G(q - q_1, t - t_1)V(q_1) \qquad (5.17)$$

وهو يعبر عن سعة الانتقال في اللحظة $t_1$ من الحالة $q_1(t_1)$ إلى الحالة $q(t)$ ويعبر تكامله على كل النقاط $q_1$ في نفس اللحظة عن مبدأ هويغنز. يمكننا تطبيق نفس المحاكمة على متجهة $|q_1(t_1)\rangle$ التي نحصل عليها من كل النقاط $q_2$ المشعة في نفس اللحظة $t_2$ والتعبير عن سعة الانتقال من الحالة $|q_2(t_2)\rangle$ إلى الحالة $|q_1(t_1)\rangle$ بسعة الانتقال

$$K_2(q_1, t_1; q_2, t_2) = G(q_1 - q_2, t_1 - t_2)V(q_2)$$

وكتابة (5.16) على الشكل

$$q(t) = |q(t_o)\rangle + \int K_1(q, t; q_1, t_1)\, K_2(q_1, t_1; q_2, t_2)\, dq_1 dt_1 dq_2 dt_2$$

---

[5] انظر كتاب فاينمان وهيبس الذي يعرض كل الميكانيك الكمومي حسب هذه الطريقة
Feynman and Hebbs : Path Integral and Quantum Mechanics

وهكذا دواليك. $\langle q(t)|$ نواة التكامل، ويمكننا كتابته على غرار يقابل مؤثر التطور، كونه سعة الانتقال من $|q(t_o)\rangle$ إلى $\langle q(t)|$ النواة كجداء N مؤثر، N نواة على الشكل

$$U(t, t_o) = \prod_{m=1}^{N} U(t_m, t_{m-1}) \tag{5.18}$$

حيث $t_{m-1} = t_o$ و $t_N = t$ ونأخذ الفترة $t_m - t_{m-1} = \varepsilon$ حيث $\varepsilon$ زمن قصير كيفما نشاء. لنلاحظ أن (5.18) ناتجة، بغض النظر عن تعريفنا لمؤثر التطور كنواة، عن خاصة هذا المؤثر – كزمرة بوسيط واحد –، عن الشرط الأول في (5.3) الذي نضعه على الشكل

$$U(t_o, t_o + 2\varepsilon) = U(t_o, t_o + \varepsilon)U(t_o + \varepsilon, t_o + 2\varepsilon)$$

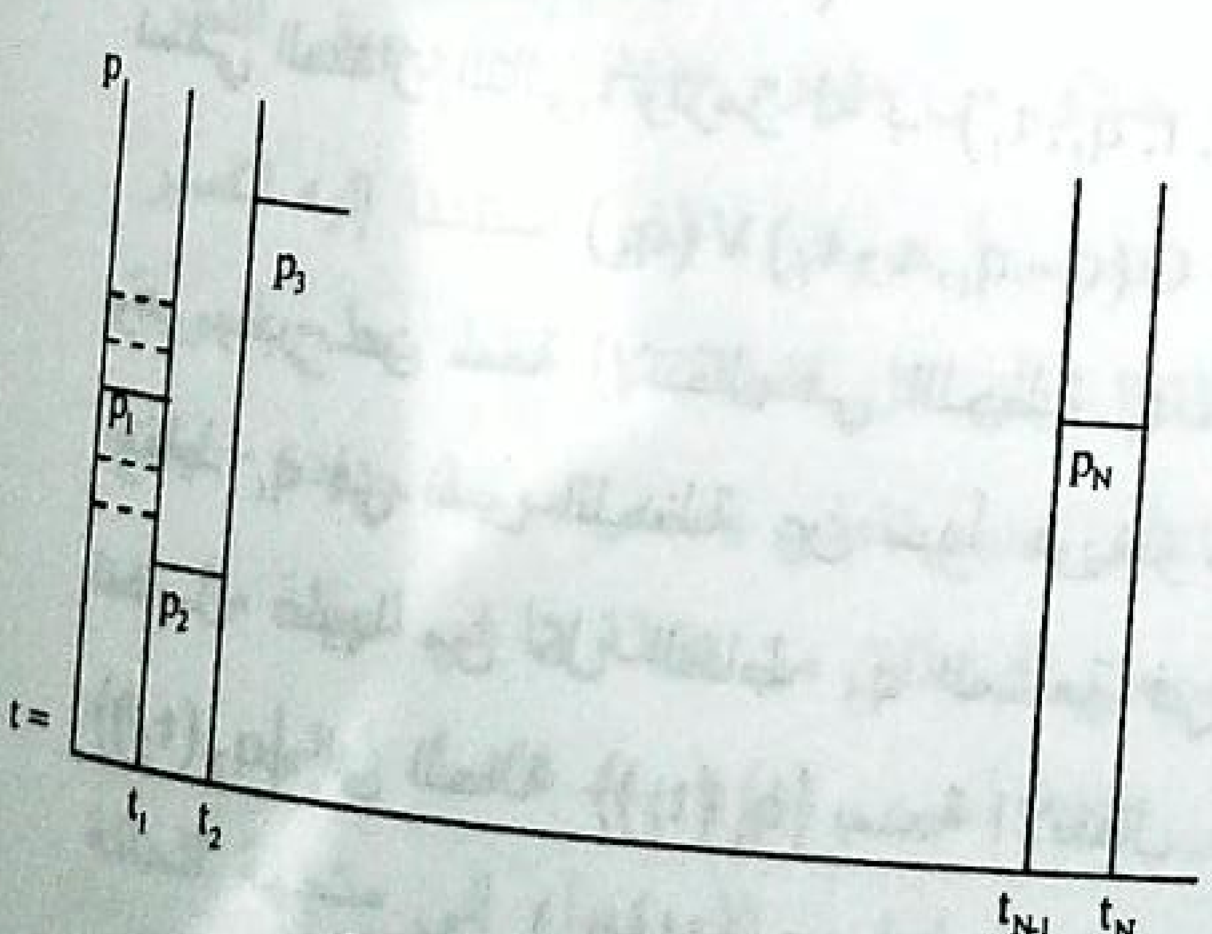
لنضع بين كل حدين من الجداء (5.18) المؤثر الوحدة $I = \int |q_m\rangle\langle q_m| dq_m$. ولنحسب سعة الانتقال من $|q(t_o)\rangle$ إلى $\langle q(t)|$ فنحصل من أجل الحدين الأولين على

$$\langle q(t)|U(t, t_o)|q(t_o)\rangle = \langle q(t)|U(t, t_1)U(t_1, t_o)|q(t_o)\rangle$$
$$= \int \langle q(t)|U(t, t_1)|q_1\rangle\langle q_1|U(t_1, t_o)|q(t_o)\rangle dq_1$$
$$= \iint \langle q(t)|U(t, t_2)|q_2\rangle\langle q_2|U(t_2, t_1)|q_1\rangle\langle q_1|U(t_1, t_o)|q(t_o)\rangle dq_1 dq_2$$

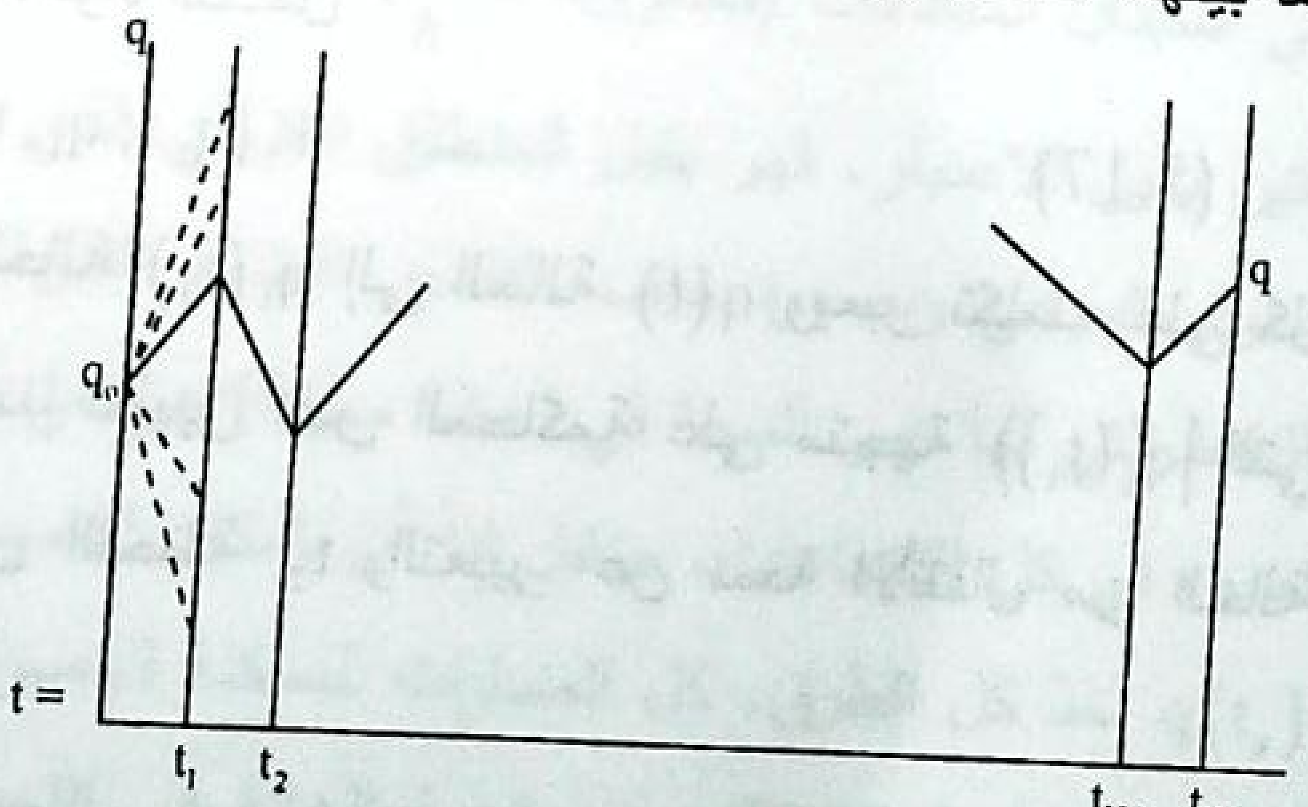
ومن أجل عدد N من الحدود

$$\langle q(t)|U(t, t_o)|q(t_o)\rangle = \int \prod_{m=1}^{N} \langle q_m|U(t_m, t_{m-1})|q_{m-1}\rangle \prod_{m=1}^{N-1} dq_m \tag{5.19}$$

لا تكامل من أجل $m = 0$ لأن $q(t_o)$ ثابتة ولا من أجل $m = N$ التي تعطينا $q(t)$. لنقسم في فضاء الطور $(q, p)$، ببعدين للتسهيل، الفترة الزمنية $[t, t_o]$ إلى N مجال صغير متساوية فيما بينها، الشكل.11a.




الشكل.11b




الشكل.11a

ولنفرض أن مسار الجسيم مستقيم بين مجالين متجاورين. هذا يعني أن الاندفاع، العزم الخطي، ثابت في كل مجال من هذه المجالات، الشكل.11b.

وهكذا دواليك. يقابل مؤثر التطور، كونه سعة الانتقال من $|q(t_o)\rangle$ إلى $\langle q(t)|$ نواة التكامل، ويمكننا كتابته على غرار النواة كجداء N مؤثر، N نواة على الشكل

$$U(t, t_o) = \prod_{m=1}^{N} U(t_m, t_{m-1}) \tag{5.18}$$

حيث $t_{m-1} = t_o$ و $t_N = t$ ونأخذ الفترة $t_m - t_{m-1} = \varepsilon$ حيث $\varepsilon$ زمن قصير كيفما نشاء.

لنلاحظ أن (5.18) ناتجة، بغض النظر عن تعريفنا لمؤثر التطور كنواة، عن خاصة هذا المؤثر – كزمرة بوسيط واحد –، عن الشرط الأول في (5.3) الذي نضعه على الشكل

$$U(t_o, t_o + 2\varepsilon) = U(t_o, t_o + \varepsilon)U(t_o + \varepsilon,\ t_o + 2\varepsilon)$$

لنضع بين كل حدين من الجداء (5.18) المؤثر الوحدة $I = \int |q_m\rangle\langle q_m| dq_m$. ولنحسب سعة الانتقال من $|q(t_o)\rangle$ إلى $\langle q(t)|$ فنحصل من أجل الحدين الأولين على

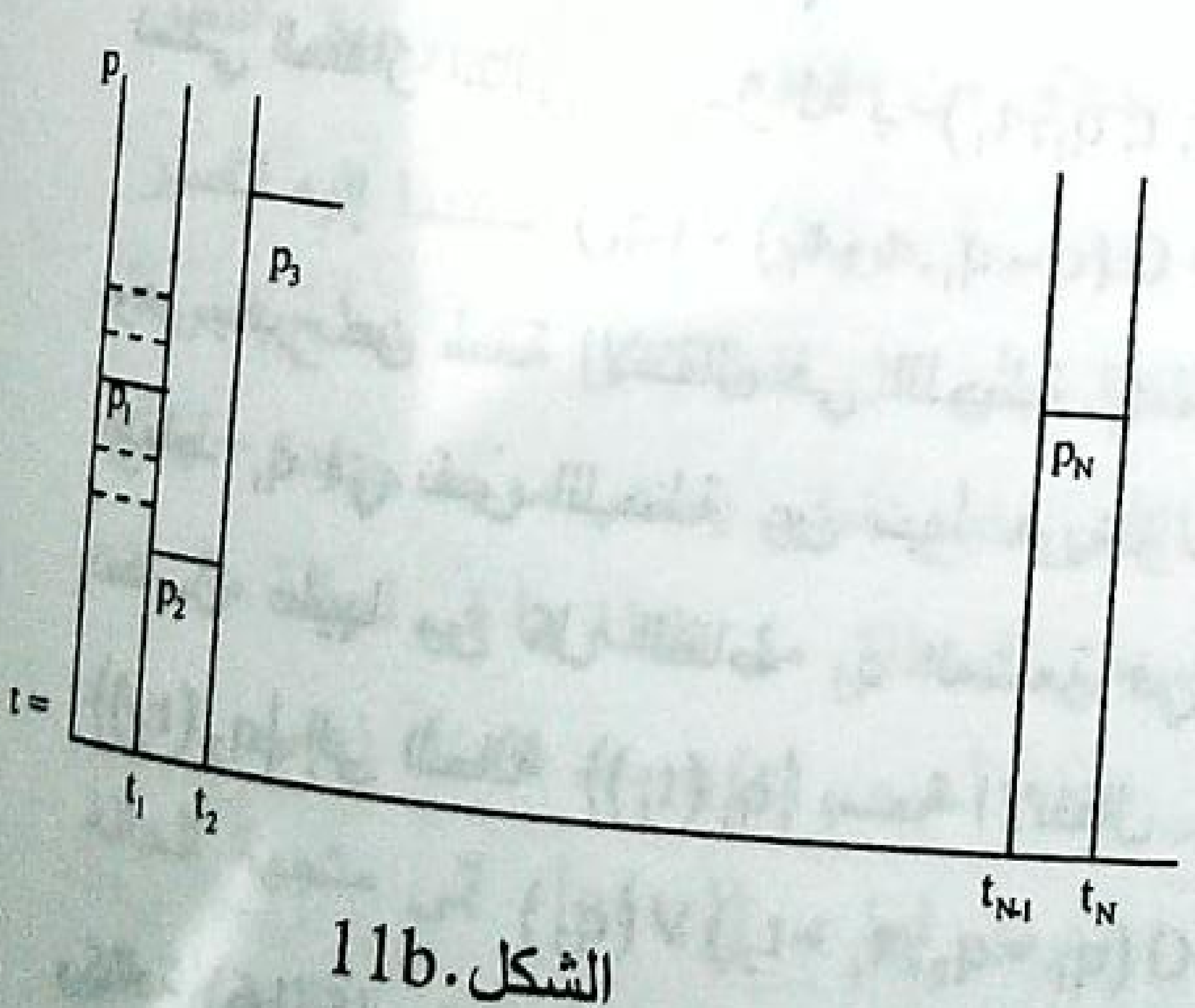
$$\langle q(t)|U(t, t_o)|q(t_o)\rangle = \langle q(t)|U(t, t_1)U(t_1,\ t_o)|q(t_o)\rangle$$
$$= \int \langle q(t)|U(t, t_1)|q_1\rangle\langle q_1|U(t_1, t_o)|q(t_o)\rangle dq_1$$
$$= \iint \langle q(t)|U(t, t_2)|q_2\rangle\langle q_2|U(t_2, t_1)|q_1\rangle\langle q_1|U(t_1, t_o)|q(t_o)\rangle dq_1 dq_2$$

ومن أجل عدد N من الحدود

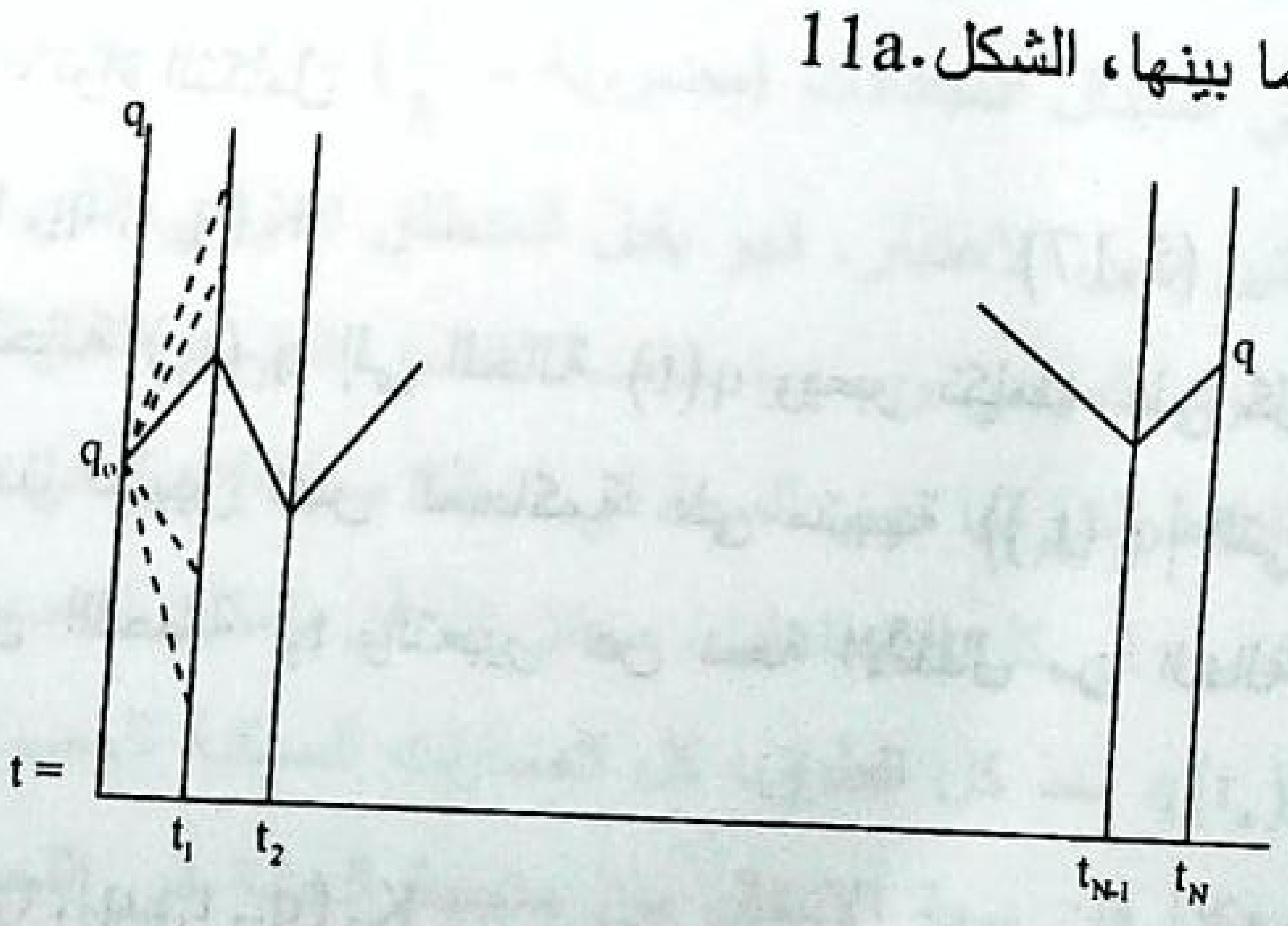
$$\langle q(t)|U(t, t_o)|q(t_o)\rangle = \int \prod_{m=1}^{N} \langle q_m|U(t_m,\ t_{m-1})|q_{m-1}\rangle \prod_{m=1}^{N-1} dq_m \tag{5.19}$$

لا تكامل من أجل $m = 0$ لأن $q(t_o)$ ثابتة ولا من أجل $m = N$ التي تعطينا $q(t)$.

لنقسم في فضاء الطور $(q, p)$، ببعدين للتسهيل، الفترة الزمنية $[t, t_o]$ إلى N مجال صغير متساوية فيما بينها، الشكل.11a.




الشكل.11b




الشكل.11a

ولنفرض أن مسار الجسيم مستقيم بين مجالين متجاورين. هذا يعني أن الاندفاع، العزم الخطي، ثابت في كل مجال من هذه المجالات، الشكل.11b.

يتحدد المسار في فضاء الطور $(p, q)$ (ذي البعدين) بتعيين $2N - 1$ مقداراً هي $p_1, \dots p_N, q_1, \dots q_{N-1}$. وهكذا فإن تعيين كل المسارات التي يمكن للجسيم اتباعها حسب هذا التقسيم للفترات الزمنية هو بالمكاملة على كل القيم الممكنة لهذه المتغيرات. بينا على الشكل بعض القيم التي يأخذها $q_i$ والقيم $p_i$ المقابلة لها التي يأخذها العزم الخطي في المجال $[t_o, t_1]$.

لنأخذ التكامل التالي – على كل المسارات

$$J_N(q_o, q, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\int dp_1 \dots dp_N dq_1 \dots dq_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar}S} \tag{5.20}$$

حيث $S$ هو الفعل في المدة $[t_o, t]$ :

$$S = \int_{t_o}^{t}\left[p(\tau)\dot{q}(\tau) - H\left(q(\tau),\ p(\tau)\right)\right] d\tau \tag{5.21}$$

إن المبرهنة المؤسسة للميكانيك الكمومي من وجهة نظر تكامل المسار هي أن $J_N$ يتناهى عندما تتناهى $N$ إلى اللانهاية، أي $0 \to \varepsilon$، إلى سعة الانتقال المعرفة بمؤثر التطور (5.19)

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} J_N(q_o,\ q,\ t) = \langle q(t)|U(t, t_o)|q(t_o)\rangle \tag{5.22}$$

لن نبرهن هذه العلاقة هنا لأننا لن نعالج الميكانيك الكمومي من هذا المنطلق ولكننا نكتفي بملاحظة أن $J_N$ تساوي لسعة الانتقال (5.19) في الحالة الخاصة عندما لا يتوقف الهاميلتوني إلا على المتغير $q$.

نكتب $S$ على الشكل

$$S = p_1\frac{(q_1 - q_o)}{\varepsilon}\varepsilon + p_2\frac{(q_2 - q_1)}{\varepsilon}\varepsilon + \dots p_N\frac{(q - q_{N-1})}{\varepsilon}\varepsilon - \int_{t_o}^{t} H(q)\ d\tau$$

حيث كتبنا الحد الأول في $S$ على شكل مجموع وبدلنا المشتق $\dot{q}$ بتعريفه. إن التكامل

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}p(q_i - q_j)}dp = \delta(q_i - q_j) \tag{5.23}$$

تعريفاً، بحيث يصبح $J_N$ على الشكل

$$J_N(q_o, q, t) = \int \delta(q_1 - q_o)\,\delta(q_2 - q_1)\dots\delta(q - q_{N-1})e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_o}^{t}H(q)d\tau}dq_1 \dots dq_{N-1}$$

إن التكامل $\delta(q_2 - q_0) = \int \delta(q_1 - q_o)\,\delta(q_2 - q_1)dq_1$ حسب (3.30)، وهكذا إلى أن نصل في نهاية المطاف إلى المقدار $\delta(q - q_o)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_o}^{t}H(q)d\tau}$. لا يختلف هذا المقدار عن الصفر إلا من أجل $q = q_o$ ويصبح

$$\delta(q - q_o)e^{-\frac{i}{\hbar}(t - t_o)H(q_o)}$$

ولكن $\delta(q - q_o)$ هو تعريفاً $\langle q|q_o\rangle$ حسب (3.29) ومنه

$$J_N = \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}(t - t_o)H(q_o)}|q_o\rangle \tag{5.22'}$$

$$J_N = \langle q|U(t, t_o)|q_o\rangle$$

وهو المطلوب.

## 4.5- مبدأ الفعل الأصغر

رأينا (الفصل السادس .I) أنه من الممكن وضع الفعل على شكلين : تكامل اللاغرنجي L أو تكامل المقدار $p\dot{q} - H(p,q)$ – كما فعلنا في صياغة التكامل على المسارات (5.21) –؛ استنتجنا معادلة جاكوبي $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$ وألمحنا إلى أشكال مبدأ الفعل الأصغر، مبدأ فيرما الذي يحدد الزمن الأقصر الذي يستغرقه الضوء للانتقال من نقطة إلى أخرى.

لنذكر أن تكامل المقدار $\sum_i p_i \dot{q}^i$ هو حسب تعريف العزم المرافق $\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i$ ويساوي بالتالي ضعف الطاقة الحركية T. لدينا

$$H = 2T - L = T + U = E$$

و E ثابتة عندما يكون الكمون مستقلاً عن الزمن $U(q^i)$؛ وبالتالي فإن مبدأ الفعل الأصغر هو

$$\delta\int_{t_0}^{t} Hdt = \delta\int_{t_0}^{t_1} 2Tdt - \delta\int_{t_2}^{t_1} Ldt = 0 \qquad (5.24)$$

ولما كان $\delta S = \delta\int Ldt = 0$ فإن مبدأ الفعل الأصغر في هذه الحالة هو أن نكتب

$$\delta w = \delta\int 2Tdt = 0 \qquad (5.25)$$

يعرف هذا المبدأ باسم مبدأ موبيرتيوس. لنرمز إلى تكامل الطرف الأيسر في (5.24) بـ $\Delta t\langle E\rangle$ حيث $\langle E\rangle$ هي القيمة الوسطية لـ H : $\langle E\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} Hdt$.

فإذا كان مبدأ موبيرتيوس صحيحاً – الطاقة الكلية ثابتة – فإنه يمكن التعبير عن هذا المبدأ بالعلاقة

$$\delta\langle E\rangle = 0 \qquad (5.26)$$

إن الطاقة الوسطية في الميكانيك الكمومي هي تعريفاً

$$\langle E\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle \equiv \int\overline{\psi}(q)\, H\, \psi(q)dq \qquad (5.26)'$$

وبالتالي فإن مبدأ الفعل الأصغر هو $\delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0$؛ إلا أن هناك شرطاً إضافياً هو أن يكون الجداء $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. يجب إذاً وضع مضروب لاغرانج λ وكتابة مبدأ الفعل الأصغر على الشكل

$$\delta\langle\psi|H-\lambda|\psi\rangle = \delta\int\overline{\psi}(q)(H-\lambda)\psi(q)dq = 0 \qquad (5.27)$$

إن لدينا هنا متغيرين مستقلين الكيت $|\psi\rangle$ والبار $\langle\psi|$. لنكتب التغيرات بدليل تغير $\langle\psi|$ المستقل

$$\int\delta\overline{\psi}(q)(H-\lambda)|\psi\rangle dq = 0$$

فنحصل على معادلة "أولر–لاغرانج"

$$(H-\lambda)|\psi\rangle = 0 \qquad (5.28)$$

أو

$$H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

وثابتة لاغرانج λ هي الطاقة E عندما تكون $|\psi\rangle$ متجهة خاصة لـ H، متجهة حالة مستقرة :

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \qquad (5.29)$$

لنلاحظ أنه من الضروري كي يكون $\delta\langle\psi|H|\psi\rangle$ أصغرياً، مع وجود الشرط الإضافي $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ هو أن يقابل المضروب $\lambda$ حالة الطاقة الصغرى، حالة القاع كما نسميها، $E_0$ وبالتالي فإن متجهة الحالة التي تقابلها هي الحالة الطبيعية $|\psi_0\rangle$. أما متجهات الحالة الأخرى فتقابل انعدام التغير في حالات طرفية، وقد تكون أعظمية أو أصغرية.

لنلاحظ أيضاً أن مبدأ الفعل الأصغر المعبر عنه بالشكل '(5.26) هو في ذات الوقت تعبير عن المبدأ الثالث الذي يحدد القيمة الوسطية (2.17) وعن المبدأ الرابع – معادلة شرودينغر – التي ينتج عنها أن $H \sim \frac{\partial S}{\partial t}$ (2.22)، ولكنه لا يتطرق إلى مفهوم المسار. إن صياغة تكامل المسار هي التي توضح هذه العلاقة فبينما يعبر مبدأ الفعل الأصغر في الميكانيك التقليدي عن اختيار مسار واحد من بين كل المسارات الممكنة بين وضعين فإن تكامل المسار، على العكس من ذلك، يقبل كل المسارات، (5.20) و (5.22) : إن الجمع على كل المسارات هو الذي يحدد سعة الانتقال بين وضعين وبالتالي مربع هذه السعة الذي يحدد احتمال الانتقال؛ والسعة متناسبة مع $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ أي أنها متوقفة على الطور $S/\hbar$. نعلم أن صورة الموجة تنعدم عندما يكون الطور – فرق الطريق مقسوماً على طول الموجة – كبيراً. هذا يعني أن S أصغري في الحالة الكمومية وأننا لا نجمع إلا على مسارات متقاربة عندما نقترب من الميكانيك التقليدي وهذا ما نراه في الحالات شبه التقليدية في الفصول القادمة.

## 5.5– الخلاصة

وضعنا في هذا الفصل المبادئ التي يقوم عليها الميكانيك الكمومي محاولين تبرير منشئها بدون العودة إلى التطور التاريخي للمفاهيم والأفكار والواقع الفيزيائي الذي بلور هذه المبادئ. والتبرير لا يكافئ في حال من الأحوال البرهان الذي يجعل من هذه المبادئ قوانين فيزيائية. إن معيار صحتها ومبررها الوحيد هو قدرتها على تفسير الحادثات الفيزيائية والتنبؤ بوقوعها ووضع القوانين الفيزيائية المعبرة عنها. وهو ما سنكرس الفصول القادمة له. ثم إن التعبير الرياضي عن هذه المبادئ والقوانين المستمدة منها يتعدى بكثير ما تتطلبه الدراسة الجامعية الحالية من طلاب الفيزياء مما جعلنا نضيف فصلاً كاملاً لسد هذه الثغرات الرياضية. ونريد هنا أن نجمل هذه المبادئ مبتدئين بالقول إن الجسيمات المجهرية لا تخضع لقوانين الميكانيك التقليدي، النيوتوني والنسبوي على حد سواء، وإنها بالتالي لا تقبل مفهوم المسار المحدد ووجود الشروط البدائية التي تعينه تماماً.

– هذا هو مبدأ اللاتحديد، اللايقين (1.2).

– شرحنا بالتفصيل الصلة القوية بين الميكانيك التقليدي والميكانيك الكمومي.

– وهذا هو مبدأ التقابل وتعبيره الرياضي : مقابلة لامتي بواسون { , } بالمبادل $\frac{i}{\hbar}[\,,\,]$ (3.6) وما

بعدها.

– تعبر دالة الموجة، متجهة الموجة $|\psi\rangle$ عن السلوك الموجي للجسيم (تجربة يونغ) ويعبر مربعها عن احتمال وجود الموجة في حالة معينة، وضع معين في تجربة يونغ فهي تنتمي إلى فضاء هيلبرتي وهذا

هو المبدأ الأول.

تنتج أهمية الترتيب في القياس عن مبدأ اللاتحديد وبالتالي عن استحالة التعبير عن المقادير الفيزيائية بدالات عددية قابلة للتبادل، ومنه المبدأن الثاني والثالث : المقدار الفيزيائي مؤثر ذاتي الترافق (قيمه الخاصة حقيقية) وقيمته الوسطية محددة بالعلاقة $\langle\psi|A|\psi\rangle$ والعلاقة (2.17) التي تعممها.

– إن المبدأ الرابع هو معادلة شرودينغر (2.19) : لا يهمنا كيفية الحصول عليها بقدر ما يهمنا تطابقها مع الواقع الفيزيائي؛ فهي من وجهة النظر هذه لا تختلف عن مبدأ نيوتن الثاني في الميكانيك التقليدي أو عن معادلات ماكسويل – فارادي وماكسويل – آمبير في الكهرطيسية التي نظرنا إليها كمبدأ يحدد تغير الحقلين المغنطيسي والكهربائي بالنسبة للزمن. كما أنها لا تختلف عن المبدأ الثاني في الترموديناميك الذي يعين بواسطة الأنتروبيه تطور النظمة الترموديناميكية بالنسبة للزمن. وكما أننا عممنا مبدأ نيوتن ليأخذ بعين الاعتبار مسايرة التغير في النسبية الخاصة والفضاء ذي الأبعاد الأربعة، فضاء مينكوفسكي، فإننا سنعمم معادلة شرودينغر على نفس النحو لنصل إلى الميكانيك الكمومي النسبوي.

أما المبدآن الأخيران الخامس والسادس فيتصلان بالقياس وبالعلاقة الخاصة التي تربط الميكانيك التقليدي –الجهاز – بالميكانيك الكمومي، المجهري وتحت المجهري.

إن القياس – حسب المبدأ الخامس – هو اختزال باقة الموجة، انطواء الموجة $|\psi\rangle \rightarrow |\psi_n\rangle$ (4.5) ويعني التخلص من مبدأ التوضيع، الذي يضع حالتين متناقضتين للجسيم مع بعضهما إذ يجعل الإلكترون، يمر، كما تفعل الموجة، من ثقبي يونغ في آن واحد. لا يعين القياس، كما رأينا، إلا مرور الإلكترون من ثقب واحد ومروره كاملاً كما يعين تماماً حالة الجسيم، متجهة الحالة بدليل المقادير التي عينها القياس لمجموعة الرصودات التبادلية حسب المبدأ السادس.

عرفنا في الفقرة الخامسة مؤثر التطور، وهو مؤثر بوسيط واحد يخضع لمعادلة شرودينغر، كتبناه على شكل أسي (5.4) وبينا كيف أنه من الممكن عوضاً عن دراسة تغير متجهة الحالة بالنسبة للزمن دراسة تغير المقادير الفيزيائية، المؤثرات ذاتية الترافق بالنسبة للزمن حسب العلاقة (5.10)، منتقلين بذلك من تمثيل شرودينغر إلى تمثيل هايزنبرغ المكافئ له والأقرب إلى توصيات مبدأ المقابلة، فهو من وجهة النظر هذه ميكانيك جسيمي بينما تمثيل شرودينغر ميكانيك موجي. أشرنا أخيراً إلى تمثيل فاينمان – تكامل المسار الذي يجمع بين التمثيلين، بين الصورتين الموجية والجسيمية ويستجيب إلى مبدأ اللاتحديد القائم أصلاً على نفي وجود مسار محدد بين نقطتين $q_o$ و $q$ بقبوله كل المسارات بين هاتين النقطتين، لا

تبدو ميزة هذه الطريقة إلا في المراحل المتقدمة في دراسة الميكانيك الكمومي عند بلوغ نظرية الحقول المكممة. وهي النظرية التي تصبح فيها الحقول – الحقل الكهربائي والحقل المغنطيسي الخاضعين إلى معادلة الموجة – مؤثرات – والخارجة عن إطار هذا الكتاب. ولعل هذا هو السبب في عدم تعرض أغلب كتب الميكانيك الكمومي لها أو معالجتها بشكل نظامي.

# الفصل الثاني

## حل معادلة شرودينغر

1- أشكال الطيف.............................57
2- حل معادلة شرودينغر ببعد واحد..............71
3- الهزاز التوافقي..............................87

# 1. أشكال الطيف

## 1.1- الطيف المنفصل

ينص المبدأ الأول في الميكانيك الكمومي على انتماء متجهة الحالة، الدالة $|\psi\rangle$، إلى فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$، الذي بعده لامنته. عرفنا على هذا الفضاء جداءً سلمياً $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ خطياً على اليمين ونصف خطي على اليسار. عرفنا التعامد بين متجهتين بمساواة جدائهما السلمي بالصفر ونشرنا أي متجهة $|\psi\rangle$ بدليل قاعدة متعامدة عدودة $|\psi_n\rangle$ على الشكل

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |\psi_n\rangle \tag{1.1}$$

$\alpha_n$ مركبة $|\psi\rangle$ على متجهة القاعدة $|\psi_n\rangle$ و $|\alpha_n|^2$ هو احتمال وجود $|\psi\rangle$ في الحالة $|\psi_n\rangle$.

وباختصار إن الفضاء الهيلبرتي هو تعميم للفضاءات الإقليدية $R^n$ و $\mathbb{C}^n$ عندما يصبح البعد n لا نهائياً. وكما في الفضاء الإقليدي فإنه من الممكن في الفضاء الهيلبرتي مطابقة أي شكل خطي، أي تطبيق خطي لـ $\mathcal{H}$ في $\mathbb{C}$ – ولنرمز له بـ $\phi(\psi)$، $\phi \in \mathcal{H}'$ حيث $\mathcal{H}'$ فضاء الأشكال الخطية على $\mathcal{H}$ أي ثنوي $\mathcal{H}$ – مع جداء سلمي $\langle\psi'_\phi|\psi\rangle \equiv \phi(\psi)$ حيث $\psi'_\phi \in \mathcal{H}$ وهي متجهة يعينها التطبيق الخطي $\phi$. أو بتعبير آخر يمكن مطابقة التطبيقات الخطية لـ $\mathcal{H}$ في $\mathbb{C}$ مع متجهات $\psi'_\phi \in \mathcal{H}$، أي مطابقة $\mathcal{H}$ مع $\mathcal{H}'$ : $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$. نكتب اختصاراً $\phi(\psi)$ على الشكل

$$\phi(\psi) = \langle\phi|\psi\rangle \tag{1.2}$$

ونقول إننا كتبنا $\phi(\psi)$، الجداء الداخلي، على شكل جداء سلمي : لا فرق لدينا إذاً من النظر إلى البرا $\langle\phi|$، كمتجهة في $\mathcal{H}$ أو متجهة $\phi(\psi)$ في $\mathcal{H}'$ شريطة أن يكون المقدار $\phi(\psi)$ منتهياً وبشكل خاص فإن نظيم المتجهة $|\psi\rangle$ الذي كتبناه على شكل جداء سلمي

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}(\vec{r})\, \psi(\vec{r})\, d\vec{r} < \infty \tag{1.3}$$

هو شكل خطي : تطبيق خطي لـ $|\psi\rangle$ في R. وبما أن هذا النظيم منته فإنه من الممكن بضرب $|\psi\rangle$ بمقدار منته معين جعله مساوياً للواحد، تنظيمه للواحد.

رأينا أن $|\psi|^2 d\vec{r}$ هو كثافة احتمال وجود الجسيم في الحيز $dx\, dy\, dz = d\vec{r}$ من الفضاء. وعليه فإنه من الضروري، لكي يبقى التكامل (1.3) منتهياً، ألا يبتعد الجسيم نحو اللانهاية، أن تتناهى كثافة الاحتمال

نحو الصفر عندما يبتعد الجسيم. نقول عندئذ إن الحالة مرتبطة bound state، لنأخذ مثالاً على الحالة المرتبطة حالة جسيم طاقته سالبة، أي حالة جسيم مرتبط بمركز، مشدود إليه بقوة جاذبة – كالإلكترون بالنسبة للنواة مثلاً – لا يستطيع الابتعاد عنه إلا بمقدار.

تنطبق العلاقات (1.1)، (1.2)، (1.3) على الحالات المرتبطة وطيف أي مقدار فيزيائي يعبر عنه المؤثر A هو طيف منفصل

$$A|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n a_n|\psi_n\rangle \tag{1.4}$$

$|\psi_n\rangle$ متجهات خاصة لـ A و $a_n$ القيم الخاصة المنفصلة.

إن طيف الطاقة عندما تكون الطاقة سالبة هو طيف منفصل.

## 2.1- الطيف المتصل

عندما يمكن للجسيم أن يبتعد عن وضع ما قدر ما نريد، عندما يمكن للجسيم أن يبتعد عن وضع ما قدر

لا تنطبق المحاكمة السابقة على الحالات غير المرتبطة، عندما يمكن للجسيم أن يبتعد عن وضع ما قدر ما نريد: $|\psi|^2 d\vec{r}$ لا تتناهى نحو الصفر عندما $\vec{r} \to \infty$ وهذا يعني أن التكامل (1.3) لم يعد متقارباً وإنما متباعداً.

ستبقى حالة النظمة الكمومية معرفة بـ $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ أي أن المبدأ الأول يبقى ساري المفعول دوماً ولكن التطبيق الخطي $\phi(\psi)$ ليس منتهياً ولم يعد من الممكن مطابقة التطبيقات الخطية لـ $\mathscr{H}$ في $\mathbb{C}$ مع متجهات $\langle\phi|$ تنتمي إلى $\mathscr{H}$: لم يعد الجداء الداخلي $\phi(\psi)$ متطابقاً مع الجداء السلمي ولا يقابله عدد وإنما كائن رياضي آخر؛ وهكذا فإننا عندما نكتب الشكل الخطي $\phi(\psi)$ على الشكل برا-كيت Bracket .

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv \int\bar{\phi}(q)\psi(q)dq \tag{1.5}$$

فإن $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ ولكن البرا $\langle\phi|$ ينتمي إلى فضاء آخر، فضاء متجهي لأشكال خطية أعم من $\mathscr{H}$ (يحتوي $\mathscr{H}$) هو فضاء التوزيعات المعتدلة Tempered distributions. لكننا كما كتبنا الشكل الخطي على شكل تكامل بمتغير عام نرمز له بـ q (الوضع العام في فضاء الهيئة) فإننا سنكتب صورياً تكاملات من أجل الطيف المتصل تقابل الجموع من 1 إلى اللانهاية في الطيف المنفصل. منتقلين من جمع عدود إلى جمع غير عدود (له قدرة المستمر Continuum). ليكن للمؤثر A طيف متصل نرمز لمتجهاته الخاصة بـ $|\psi_\lambda\rangle$ ولقيمه الخاصة بـ $a_\lambda$. ننشر متجهة الحالة $|\psi(q)\rangle$ كتكامل بهذه المتجهة الخاصة على غرار (1.1) مع مركبات $\alpha_\lambda$

$$|\psi(q)\rangle = \int\alpha_\lambda\psi_\lambda(q)d\lambda \tag{1.6}$$

$$\alpha_\lambda = \langle\psi_\lambda|\psi\rangle = \int\bar{\psi}_\lambda(q)\psi(q)dq \tag{1.6'}$$

على غرار $\alpha_n = \langle \psi_n | \psi \rangle$.

و

$$A|\psi(q)\rangle = \int a_\lambda \alpha_\lambda \psi_\lambda(q)\, d\lambda \tag{1.7}$$

إن $|\alpha_\lambda|^2 d\lambda$ كما هو حال $|\alpha_n|^2$ هو احتمال وجود المتجهة في الحالة $\psi_\lambda$ – في المجال $d\lambda$ المحيط بهذه القيمة في واقع الأمر :

$$1 = \int |\alpha_\lambda|^2 d\lambda \tag{1.8}$$

وكما في حالة الطيف المنفصل، نريد تنظيم $|\psi(q)\rangle$ بحيث يكون

$$1 = \int |\alpha_\lambda|^2 d\lambda = \langle \psi(q) | \psi(q) \rangle = \int \overline{\psi}(q) \psi(q)\, dq \tag{1.8'}$$

لنبدل $\psi(q)$ و $\overline{\psi}(q)$ بنشرهما في $(1.6)$

$$\int |\alpha_\lambda|^2 d\lambda = \int \overline{\alpha}_\lambda \overline{\psi}_\lambda(q) \alpha_{\lambda'} \psi_{\lambda'}(q)\, d\lambda d\lambda' dq$$

يجب إذاً كي يتحقق التساوي بين الطرفين أن يكون

$$\int \alpha_{\lambda'} \overline{\psi}_\lambda(q)\, \psi_{\lambda'}(q)\, d\lambda' dq = \alpha_\lambda$$

أي أن يكون المقدار

$$\langle \psi_\lambda(q) | \psi_{\lambda'}(q) \rangle = \int \overline{\psi}_\lambda(q)\, \psi_{\lambda'}(q)\, dq = \delta(\lambda - \lambda') \tag{1.9}$$

عندئذ

$$\int \alpha_{\lambda'} \delta(\lambda - \lambda')\, d\lambda' = \alpha_\lambda \tag{1.10}$$

إن $\delta(\lambda - \lambda')$ هي الدالة "الشاذة" التي وضعها ديراك لدراسة الطيف المتصل وتعرف باسمه؛ لا معنى لهذه الدالة إلا بمفعولها على الدالة $\alpha_{\lambda'}$ في $(1.10)$ فهي إذاً الشكل الخطي $(1.5)$.

لنستبدل في $(1.6)$ $\alpha_\lambda$ بقيمتها في $(1.6)'$ :

$$|\psi(q)\rangle = \int \overline{\psi}_\lambda(q') \psi(q') \psi_\lambda(q)\, dq' d\lambda$$

يجب لكي تتحقق المساواة بين الطرفين أن يكون

$$\int \overline{\psi}_\lambda(q')\, \psi_\lambda(q)\, d\lambda = \delta(q' - q) \tag{1.9'}$$

تعبر هذه العلاقة عن كون طيف مؤثر الوضع ولنرمز له بـ $Q$ طيفاً متصلاً يأخذ قيمه $q$ في ذات الوقت التي يأخذ فيها المؤثر $A$ قيمه $\lambda$. وهذا أمر طبيعي لأننا نظرنا إلى هذا المؤثر كمجرد ضرب متجهة الحالة بقيمته $q$ : $Q = q$، $q$ قيمة متصلة و $[Q, A] = 0$ : إن $Q$ رصود مثل $A$ أياً كان المؤثر $A$ المنتمي إلى مجموعة تامة من الرصودات التبادلية.

لنرمز لمتجهات الحالة بالرمز $\langle n|$ في الحالة المنفصلة وبالرمز $\langle \lambda|$ في الحالة المتصلة ولنلخص في الجدول التالي التعابير المتقابلة

على غرار $\langle\psi_n|\psi\rangle = \alpha_n$.

و

$$A|\psi(q)\rangle = \int a_\lambda \alpha_\lambda \psi_\lambda(q)\, d\lambda \qquad (1.7)$$

إن $|\alpha_\lambda|^2 d\lambda$ كما هو حال $|\alpha_n|^2$ هو احتمال وجود المتجهة في الحالة $\psi_\lambda$ – في المجال $d\lambda$ المحيط بهذه القيمة في واقع الأمر :

$$1 = \int |\alpha_\lambda|^2 d\lambda \qquad (1.8)$$

وكما في حالة الطيف المنفصل، نريد تنظيم $\langle\psi(q)|\psi(q)\rangle$ بحيث يكون

$$1 = \int |\alpha_\lambda|^2 d\lambda = \langle\psi(q)|\psi(q)\rangle = \int \overline{\psi}(q)\psi(q)\, dq \qquad (1.8)'$$

لنبدل $\psi(q)$ و $\overline{\psi}(q)$ بنشرهما في (1.6)

$$\int |\alpha_\lambda|^2 d\lambda = \int \overline{\alpha}_\lambda \overline{\psi}_\lambda(q)\alpha_{\lambda'}\psi_{\lambda'}(q)\, d\lambda d\lambda' dq$$

يجب إذاً كي يتحقق التساوي بين الطرفين أن يكون

$$\int \alpha_{\lambda'} \overline{\psi}_\lambda(q)\ \psi_{\lambda'}(q)\, d\lambda' dq = \alpha_\lambda$$

أي أن يكون المقدار

$$\langle\psi_\lambda(q)|\psi_{\lambda'}(q)\rangle = \int \overline{\psi}_\lambda(q)\ \psi_{\lambda'}(q)\, dq = \delta(\lambda - \lambda') \qquad (1.9)$$

عندئذ

$$\int \alpha_{\lambda'} \delta(\lambda - \lambda')\, d\lambda' = \alpha_\lambda \qquad (1.10)$$

إن $\delta(\lambda - \lambda')$ هي الدالة "الشاذة" التي وضعها ديراك لدراسة الطيف المتصل وتعرف باسمه؛ لا معنى لهذه الدالة إلا بمفعولها على الدالة $\alpha_{\lambda'}$ في (1.10) فهي إذاً الشكل الخطي (1.5).

لنستبدل في (1.6) $\alpha_\lambda$ بقيمتها في '(1.6) :

$$|\psi(q)\rangle = \int \overline{\psi}_\lambda(q')\psi(q')\psi_\lambda(q)\, dq' d\lambda$$

يجب لكي تتحقق المساواة بين الطرفين أن يكون

$$\int \overline{\psi}_\lambda(q')\ \psi_\lambda(q)\, d\lambda = \delta(q' - q) \qquad (1.9)'$$

تعبر هذه العلاقة عن كون طيف مؤثر الوضع ولنرمز له بـ $Q$ طيفاً متصلاً يأخذ قيمه $q$ في ذات الوقت التي يأخذ فيها المؤثر $A$ قيمه $\lambda$. وهذا أمر طبيعي لأننا نظرنا إلى هذا المؤثر كمجرد ضرب متجهة الحالة بقيمته $q$ : $Q = q$، $q$ قيمة متصلة و $[Q, A] = 0$ : إن $Q$ رصود مثل $A$ أياً كان المؤثر $A$ المنتمي إلى مجموعة تامة من الرصودات التبادلية.

لنرمز لمتجهات الحالة بالرمز $\langle n|$ في الحالة المنفصلة وبالرمز $\langle\lambda|$ في الحالة المتصلة ولنلخص في الجدول التالي التعابير المتقابلة

$$|\psi\rangle = \sum_n \alpha_n |n\rangle$$

$$\alpha_n = \langle n|\psi\rangle$$

$$\sum|\alpha_n|^2 = 1$$

المسقط الوحدة على المتجهات الخاصة للمؤثر A

$$I = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

$$A = AI = \sum_n a_n |n\rangle\langle n$$

ومنه

$$A\psi = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_n a_n \alpha_n |n\rangle$$

علاقات التعامد

$$\langle n|m\rangle = \delta_{mn}$$

حيث $\delta_{mn}$ رمز كرونكر $= 0$ من أجل $n \neq m$ و 1 من أجل $m = n$.

إنه جداء سلمي : $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ ، يكافئ

الجداء الداخلي : $|m\rangle \xrightarrow{\phi_n} \mathbb{C} \quad \phi_n(|m\rangle)$

$$|\psi\rangle = \int \alpha_\lambda |\lambda\rangle d\lambda$$

$$\alpha_\lambda = \langle \lambda|\psi\rangle$$

$$\int|\alpha_\lambda|^2 d\lambda = 1$$

$$I = \int|\lambda\rangle\, d\lambda \langle\lambda|$$

$$A = \int a_\lambda |\lambda\rangle d\lambda \langle\lambda|$$

$$A|\psi\rangle = \int a_\lambda |\lambda\rangle d\lambda \langle\lambda|\psi\rangle = \int a_\lambda \alpha_\lambda |\lambda\rangle d\lambda$$

$$\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta(\lambda - \lambda')$$

دالة ديراك تساوي الصفر من أجل $\lambda \neq \lambda'$ وتساوي اللانهاية من أجل $\lambda = \lambda'$.

لا معنى هنا للحديث عن جداء سلمي وإنما عن شكل خطي $\phi_\lambda(\lambda')$ على فضاء الدالات يعطي قياس الدالة في النقطة $\lambda$ حسب العلاقة (1.10) $\alpha_{\lambda'} \xrightarrow{\phi_\lambda(\lambda')} \alpha_\lambda$ نكتب (1.9)' بوضع الوحدة I بين q' و q على الشكل

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q) = \int \langle q'|\lambda\rangle\langle\lambda|q\rangle d\lambda$$

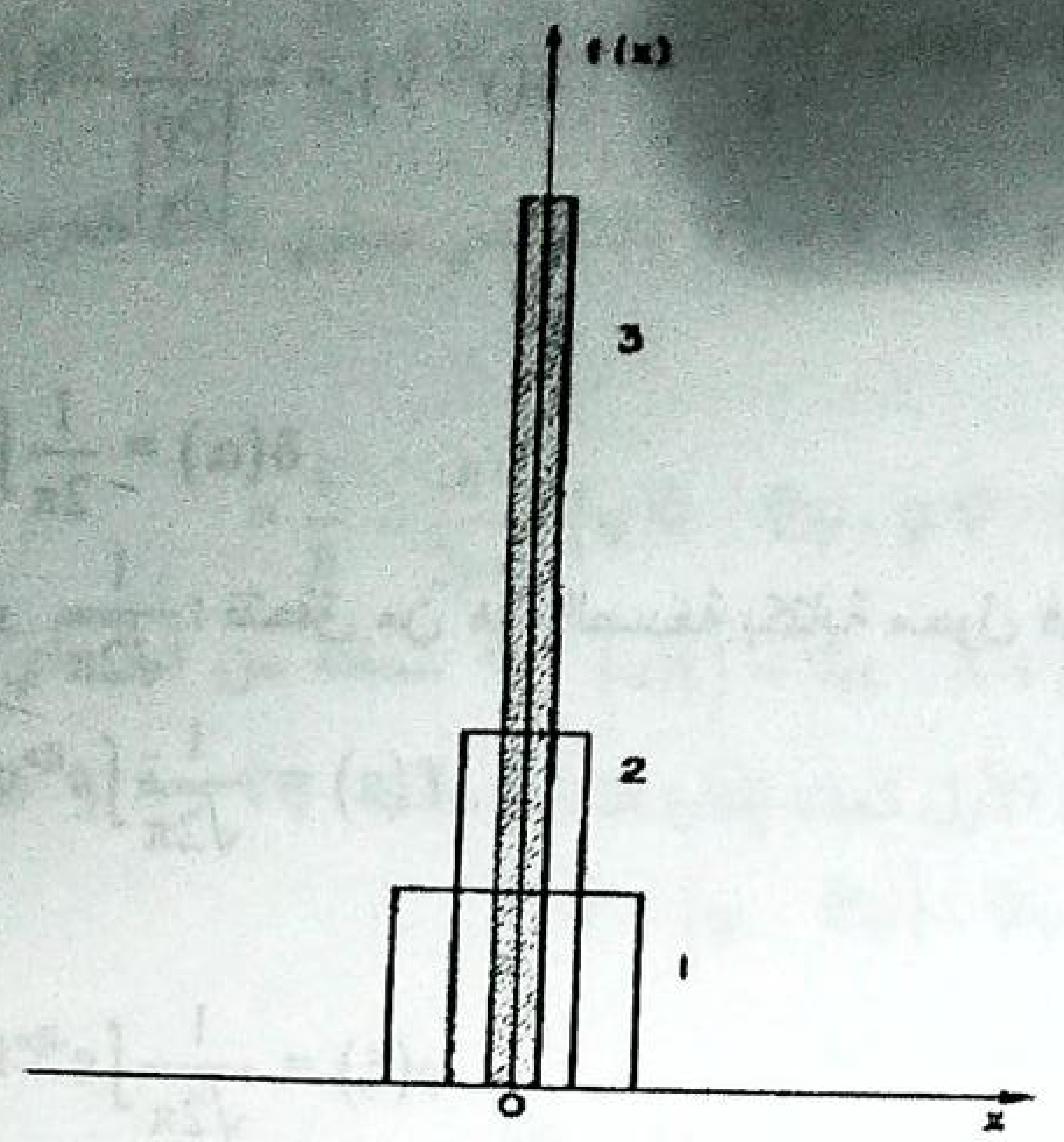
## 3.1- خواص "الدالة" δ

على الرغم من قولنا إنه لا معنى لـ δ إلا بمفعولها، بتكاملها مع دالة منتظمة إلى أقصى حد ممكن فإننا سنسير على التقليد المتبع ونعطي الخواص الصورية لهذه الدالة، التي نمثلها في المخطط التالي حيث يتناهى x نحو الصفر مع بقاء السطح مساوياً للواحد، نظراً لسهولة استعمالها في حسابات الطيف المتصل.

$\delta(x) = 0$ من أجل $x \neq 0$ و $\delta(0) = \infty$ (1.11)

وحسب (1.10) من أجل الدالة الثابتة $\alpha_{\lambda'} = 1$ فإن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$




و

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,f(x)\,dx=f(0) \qquad (1.12)$$

أو على الشكل (1.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,f(x)\,dx=f(a) \qquad (1.12)'$$

مع ملاحظة أن $\delta$ دالة زوجية

$$\delta(-x)=\delta(x) \qquad (1.12)$$

لأن هذا لا يغير علاقة التعريف (1.11).

لدينا أيضاً بأخذ $\alpha x = y$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\alpha x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)\frac{dy}{|\alpha|}=\frac{1}{|\alpha|}$$

أي أن

$$\delta(\alpha x)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \qquad (1.13)$$

لتكن الدالة $y=\varphi(x)$ ولنحسب $\delta(y-y')$ من أجل قيمتين متجاورتين لهذه الدالة. نكتب هذا الفرق على الشكل

$$y-y'=\varphi(x)-\varphi(x')=(x-x')\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x'}$$

وبالتالي فإن

$$\delta(y-y')=\delta\left[(x-x')\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x'}\right]$$

وبتطبيق (1.13)

$$\delta(y-y') = \frac{1}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x'}}\delta(x-x') \tag{1.14}$$

لدينا أخيراً

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\alpha\xi}d\xi \tag{1.15}$$

أي أن محول فوريي لـ $\delta$ هو $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ : نتحقق من هذه الصيغة بكتابة محول فوريي لـ $f$ وليكن $\varphi$ : لدينا

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\xi a}\varphi(\xi)d\xi$$

و

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\xi x}f(x)dx$$

وبكتابة $\varphi$ بدليل محولها العكسي $f$ في تعريف $f(a)$ نحصل على

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{i\xi(a-x)}f(x)\,dx\,d\xi$$

يجب، حتى تتحقق العلاقة $(1.12)'$، أن يكون التكامل على $d\xi$ مساوياً لـ $\delta(a-x)$

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi(a-x)}dx = \delta(a-x)$$

إن $(\delta(a-x) = \delta(x-a))$.

## 4.1- كثافة التيار ومؤثر السرعة

لا يمكن في الميكانيك الكمومي فناء أو إحداث الجسيمات قبل إدخال مفاهيم النسبية فيه حيث يمكن عندئذ تحول الطاقة إلى جسيمات أو العكس. يجب إذاً أن يتساوى تدفق الجسيمات من وإلى حجم ما عبر سطحه مع نقصان أو زيادة عدد الجسيمات في هذا الحجم. يعبر عن هذا التساوي في الفيزياء التقليدية بمعادلة تسمى معادلة الاتصالية Continuity من الشكل

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

حيث $\rho$ هي كثافة الشحنة (الكهربائية على سبيل المثال) و $\vec{J} = \rho\vec{V}$ هي كثافة التيار، الكمية التي تجتاز واحدة السطوح في واحدة الزمن و $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$ هو تباعد (تفرق) $\vec{J}$ Divergence.

تسمح معادلة شرودينغر الحصول على معادلة اتصالية مشابهة انطلاقاً من المقدار $\int|\psi|^2 dxdydz$ الذي يعبر عن احتمال وجود الجسيم في حجم ما $dxdydz = d\tau$. لدينا باستعمال معادلة شرودينغر من اجل $\psi$ و $\bar{\psi}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int|\psi|^2 d\tau = \int_v\left(\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} + \bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\tau = \frac{i}{\hbar}\int_v(\psi H\bar{\psi} - \bar{\psi}H\psi)\,d\tau$$

وبما أن $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$ و $\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ (اللابلاسي يساوي تباعد الغراديان) فإن الطرف الأخير في المعادلة هو

$$= \frac{i}{\hbar}\cdot\frac{-\hbar^2}{2m}\int_v\left(\psi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\bar{\psi} - \bar{\psi}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi\right)d\tau$$

وبما أن المتطابقة $\vec{\nabla}\cdot(\alpha\vec{A}) = \vec{\nabla}\alpha\cdot\vec{A} + \alpha\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ محققة من أجل أي متجهة $\vec{A}(x,y,z)$ ودالة سلمية $\alpha(x,y,z)$ فإن الحد الأول تحت إشارة التكامل، بأخذ $\vec{A} = \vec{\nabla}\bar{\psi}$ و $\alpha = \psi$، هو

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\psi\cdot\vec{\nabla}\bar{\psi}\right) - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\bar{\psi}$$

وكذلك الحد الثاني

$$-\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\bar{\psi}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) - \vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\vec{\nabla}\psi\right]$$

والتكامل

$$= \frac{-i\hbar}{2m}\int\vec{\nabla}\cdot\left(\psi\cdot\vec{\nabla}\bar{\psi} - \bar{\psi}\cdot\vec{\nabla}\psi\right)d\tau$$

نرمز للمقدار بين قوسين مضروباً بـ $\frac{i\hbar}{2m}$ بالرمز $\vec{J}$

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\cdot\vec{\nabla}\bar{\psi} - \bar{\psi}\vec{\nabla}\psi\right) \tag{1.16}$$

بحيث تصبح المعادلة

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v|\psi|^2 d\tau = -\int_v\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right)d\tau \tag{1.17}$$

التي تأخذ بالانتقال من التكامل على الحجم في الطرف الثاني إلى التكامل على السطح المحيط به S، مبرهنة غاوص، الشكل التالي

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v|\psi|^2 d\tau = -\int_s\vec{J}\cdot\vec{dS}$$

هذا يعني أنه بإمكاننا تسمية المتجهة $\vec{J}$ كثافة تيار الاحتمال وكتابة معادلة الاتصالية انطلاقاً من (1.17)

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{1.18}$$

يلزمنا الآن تعريف سرعة الجسيم الوسطية، أي تعريف مؤثر السرعة لكي نستطيع مقارنة معادلة الاتصالية (1.18) مع الحالة التقليدية $\vec{J} = \rho\vec{V}$. لقد عرفنا حتى الآن ثلاث مؤثرات : الوضع $\vec{r}$ (وبصورة عامة q) وقابلناه بالمتجهة العددية $\vec{r}$ والمؤثر $\vec{P} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ والمؤثر $H = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r})$ حيث $U(\vec{r})$ دالة عددية أيضاً. وسنعرف هنا مؤثر السرعة ولنرمز له بـ $\vec{V}_p$ رغم أننا نعلم أنه يستحيل وفق مبدأ اللاتحديد

معرفة الوضع والسرعة – أو الوضع والاندفاع الخطي في آن واحد. إن كل ما نتطلبه هو أن تبقى الصلة بين المؤثرات كما هي عليه في الميكانيك التقليدي. لنكتب إذاً المؤثر $\vec{V}_{م}$ على الشكل

$$\vec{V}_{م} = \frac{d\vec{r}_{م}}{dt}$$

أي حسب العلاقة ((3.2)،1) و $\vec{r}_{م} = \vec{r}$

$$\vec{V}_{م} = \frac{i}{\hbar}[H, \vec{r}] \qquad (1.19)$$

تكافئ هذه العلاقة طبعاً ثلاث علاقات بين المؤثرات ببعد واحد x، y، z و $(V_{م})_{x,y,z}$.

**مبرهنة 1** :

إن $\vec{V}_{م}$ هي $\frac{\vec{P}}{m}$ حيث $\vec{P}$ مؤثر الاندفاع الخطي

$$\vec{V}_{م} = \frac{\vec{P}}{m} \qquad (1.20)$$

لنلاحظ أولاً أن مبادل U مع مؤثر ما، A، معرف انطلاقاً من المتغيرات q وحدها (من $\vec{r}$ هنا) يساوي الصفر أي أن

$$[H, A] = \left[\frac{P^2}{2m}, A\right]$$

لدينا حسب ((3.15)،1)

$$\left[P^2, A\right] = \vec{P}\left[\vec{P}, A\right] + \left[\vec{P}, A\right]\vec{P}$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها المؤثر A دالة فإن $[P, A]$ حسب ((3.6)،1) هو $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}A$ ومنه

$$[H, A] = \frac{1}{2m}\left[\vec{P}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}A + \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}A\vec{P}\right].$$

المكافئة لثلاث علاقات بين المؤثرات من الشكل $P_x\left(\vec{\nabla}A\right)_x$، $P_y\left(\vec{\nabla}A\right)_y$، $P_z\left(\vec{\nabla}A\right)_z$. كل غراديان من هذه الغراديانات يساوي الواحد من أجل $\vec{A} = \vec{r}$ أي أن

$$[H, \vec{r}] = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{im}2\vec{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{\vec{P}}{m}$$

ومنه، بوضع هذا المقدار في (1.19)، العلاقة المطلوبة (1.20).

يمكننا تكرار نفس الخطوات وحساب مشتق المؤثر $\vec{V}_{م}$ بالنسبة للزمن للحصول على مؤثر التسارع $a_{م}$

$$\vec{a}_{م} = \frac{d}{dt}\vec{V}_{م} = \frac{i}{\hbar m}\left[H, \vec{P}\right]$$

لا يبقى في المبادل $\left[H, \vec{P}\right]$ إلا المبادل $\left[U, \vec{P}\right]$ لأن $[P, P] = 0$ ومنه

$$\vec{a}_{م} = \frac{i}{\hbar m}\left[U, \vec{P}\right] = -\frac{i}{\hbar m}\left[\vec{P}, U\right] = -\frac{i}{\hbar m}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}U$$

أي أن

$$m\bar{a}_r = -\bar{\nabla}U \qquad (1.21)$$

ليس الطرف الثاني في هذه المعادلة مؤثراً ولذا فلا معنى لها إلا بأخذ القيمة الوسطية للطرف الأيسر

$$m\langle\bar{a}_r\rangle = m\langle\psi|\bar{a}_r|\psi\rangle = -\bar{\nabla}U \qquad (1.21)'$$

نفرض أن $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ وبالتالي $-\nabla U = \langle\psi|-\nabla U|\psi\rangle$.

تعرف العلاقة $(1.21)'$ باسم مبرهنة إرنفست Ehrenfest : تبقى العلاقة التقليدية بين التسارع والقوة – قانون نيوتن – صحيحة شريطة تطبيقها على القيمة الوسطية لمؤثر التسارع.

والآن وقد عرفنا سرعة الجسيم فإنه من الممكن في حالة الموجة المستقرة

$$|\psi(\bar{r},t)\rangle = C\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \bar{p}\cdot\bar{r})}$$

اختيار الثابتة $C$، أي جذر كثافة الاحتمال، حسب اختيارنا لكثافة التيار، فإذا أردنا على سبيل المثال أن تكون كثافة التيار $|\bar{J}| = 1$، أي أن يمر جسيم واحد عبر واحدة السطوح العمودية على حركته في واحدة الزمن، أو بعبارة أخرى أن يكون التدفق مساو للواحد فإن تبديل $\psi$ و $\bar{\nabla}\psi$ بقيمها في (1.16). يعطينا

$$\bar{J} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi \cdot \frac{i}{\hbar}\bar{p}\bar{\psi} - \bar{\psi} \cdot -\frac{i}{\hbar}\bar{p}\psi\right)$$

وبما أن $\psi\bar{\psi} = C^2$، فإن

$$|\bar{J}| = \frac{C^2}{2m}2|\bar{p}| = C^2|\bar{V}|$$

حيث $V$ سرعة الجسيم، و $|\bar{J}| = 1$ تعني $C = \frac{1}{\sqrt{|V|}}$.

## 5.1– نشر متجهة الحالة بدليل الموجات المستوية

كتبنا الموجة المستوية على الشكل $e^{-i(\omega t - \bar{k}\cdot\bar{r})}$. سنكتبها الآن بدليل الطاقة $E = \hbar\omega$ والاندفاع $\bar{p} = \frac{\bar{k}}{\hbar}$ (1.(5.7)) ونفترض متجهة الحالة $|\psi(\bar{r},t)\rangle$ متجهة مستقرة – بطاقة ثابتة – من الشكل

$$|\psi(\bar{r},t)\rangle = \chi(t)|\varphi(\bar{r})\rangle = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}|\varphi(\bar{r})\rangle$$

لنكتب $\varphi(\bar{r})$ بدليل الموجات المستوية $e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}$ على شكل تحويل فوريي

$$|\varphi(\bar{r})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\varphi(\bar{k})\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}d\bar{k} \qquad (1.22)$$

إن المتجهة $\varphi(\bar{k})$ هي محول فوريي لـ $\varphi(\bar{r})$ وهي تعريفاً

$$|\varphi(\vec{k})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \varphi(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \qquad (1.22)_{\mathcal{F}^{-1}}$$

حيث رمزنا بنفس الحرف $\varphi$ للدالة $\varphi(\vec{r})$ ومحولها في تحويل فوريي $\varphi(\vec{k})$.

نكتب هاتين العلاقتين بدليل المتجهات الخاصة للمؤثر $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ؛ $\overline{dk} = \frac{d\vec{p}}{\hbar^3}$ مما يجعلنا نستبدل المضروب $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ بالمضروب $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$ في المساوايتين إبقاءً على التناظر بين محولي فوريي

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \varphi(\vec{p})\, e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}} d\vec{p} \qquad (1.22)'_{\mathcal{F}}$$

$$\varphi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \varphi(\vec{r})\, e^{-i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \qquad (1.22)'_{\mathcal{F}^{-1}}$$

$\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}^{-1}$ ترمزان إلى محول فوريي ومحول فوريي العكسي.

ولنطبق مؤثر الاندفاع $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r$ على متجهة الحالة $\varphi(\vec{r})$ ؛ $\vec{\nabla}_r$ الغراديان بالنسبة لـ $\vec{r}$

$$\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \varphi(\vec{p})\,\vec{p}\, e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}} d\vec{p} \qquad (1.23)$$

التي ترينا أن الموجة المستوية $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}$ هي متجهة خاصة للمؤثر $\vec{P} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r$ بالقيمة الخاصة $\vec{p}$

ونرى على نفس الشكل بتطبيق $-\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_p$ على $\varphi(\vec{p})$ (الاشتقاق في الغراديان هو بالنسبة لـ p) أن الموجة المستوية $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$ هي متجهة خاصة لمؤثر الوضع $i\hbar\vec{\nabla}_p$ تقابلها القيمة الخاصة $\vec{r}$ كما رأينا في ((1.(3.7)) مما يبين من جديد الدور المتناظر الذي يلعبه المؤثران $\vec{r}$ و $\vec{P}$ كعزمين مترافقين في الميكانيك الكمومي على غرار دورهما في الميكانيك التقليدي.

$\vec{r}$ مؤثر هو جداء متجهة الحالة بعدد، $\vec{P} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r$

$\vec{P}$ مؤثر هو جداء متجهة الحالة بعدد، $\vec{r} = i\hbar\vec{\nabla}_P$

يمكن لمتجهة الحالة، تكامل موجات مستوية، أن تنتشر في كل الفضاء، $e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$ متجهاتها الخاصة؛ $\int|\varphi(\vec{r})|^2 d\vec{r}$ لا تتناهى نحو الصفر عندما $\vec{r} \to \infty$ والتكامل متباعد. تنطبق على هذه المتجهات الخاصة العلاقة (1.9)

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\langle e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}} | e^{i\frac{\vec{p}'}{\hbar}\cdot\vec{r}}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}'-\vec{p})\vec{r}} d\vec{r} = \delta(\vec{p}'-\vec{p}) \qquad (1.24)$$

حيث كتبنا العلاقة المقابلة لـ (1.15) بثلاثة أبعاد x ، y ، z

$$\delta(\vec{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{r}} d\vec{r} = \delta(\alpha_x)\delta(\alpha_y)\delta(\alpha_z)$$

ومنه بالنظر لـ (1.13)

$$\delta\left(\frac{\bar{\alpha}}{\hbar}\right)=\hbar^3\delta(\bar{\alpha})$$

نرى من (1.24) بسهولة أن تحويل فوريي يحفظ الجداء ويحفظ بشكل خاص القيمة المطلقة للمتجهة.

لدينا

$$\langle\varphi(\bar{r})|\varphi(\bar{r})\rangle=\int\bar{\varphi}(\bar{r})\,\varphi(\bar{r})\,d\bar{r}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\bar{\varphi}(\bar{p})\,e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{r}}\varphi(p')\,e^{i\frac{\bar{p}'}{\hbar}\cdot\bar{r}}d\bar{p}\,d\bar{p}'\,d\bar{r}$$

يعطينا التكامل على $d\bar{r}$ الدالة الشاذة $\delta(\bar{p}'-\bar{p})$

$$=\int\bar{\varphi}(\bar{p})\,\varphi(\bar{p}')\,\delta(\bar{p}'-\bar{p})\,d\bar{p}\,d\bar{p}'$$

والتكامل على $d\bar{p}'$ يعطينا حسب '(1.12)

$$\langle\varphi(\bar{r})|\varphi(\bar{r})\rangle=\int\bar{\varphi}(\bar{p})\,\varphi(\bar{p})\,d\bar{p}=\langle\varphi(\bar{p})|\varphi(\bar{p})\rangle \qquad (1.25)$$

وهو المطلوب.

## 6.1- علاقة اللاتحديد

لنحسب في التمثيلين P و Q، ولنأخذهما تسهيلاً ببعد واحد، القيمة الوسطية لمربع مؤثر الوضع $i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ ومؤثر الاندفاع $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. لدينا من المبدأ ((2.17).1)

$$\langle x^2\rangle=\int\bar{\varphi}(p)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\varphi(p)\,dp \qquad (1.26)$$

$$\langle p^2\rangle=\int\bar{\varphi}(x)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(x)\,dx \qquad (1.26)'$$

نكامل بالتجزئة فينعدم الحد المكامل $\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial p}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ لأن الحقل ومشتقه منعدمان في اللانهاية ويبقى

$$\langle x^2\rangle=\hbar^2\int\frac{\partial\bar{\varphi}(p)}{\partial p}\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p}dp \qquad (1.27)$$

وكذلك

$$\langle p^2\rangle=\hbar^2\int\frac{\partial\bar{\varphi}(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}dx \qquad (1.27)'$$

ولننظر إلى تكامل المقدار

$$0\le D\equiv\left|\frac{x}{2\langle x^2\rangle}\varphi(x)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2$$

$$= \frac{x^2}{4\langle x^2\rangle^2}\bar{\varphi}(x)\varphi(x) + \frac{x}{2\langle x^2\rangle}\left(\bar{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\right) + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

الذي نضعه على الشكل

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\langle x^2\rangle}\right)^2\bar{\varphi}\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\langle x^2\rangle}\bar{\varphi}\varphi\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\langle x^2\rangle}\bar{\varphi}\varphi + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\langle x^2\rangle^2}\left(x^2 - 2\langle x^2\rangle\right)\bar{\varphi}(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\langle x^2\rangle}\bar{\varphi}(x)\varphi(x)\right) + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

نكامل المقدار D آخذين بعين الاعتبار '(1.27) والمبدأ المعرف للقيمة الوسطية أعلاه وكون $\varphi(\infty) \to 0$ لنجد أن الحد الأول هو $-\frac{1}{4\langle x^2\rangle}$ والثاني معدوم والثالث $\frac{1}{\hbar^2}\langle p^2\rangle$ أي أن

$$0 \le \int D(x)dx = -\frac{1}{4\langle x^2\rangle} + \frac{1}{\hbar^2}\langle p^2\rangle$$

ومنه

$$\frac{\hbar^2}{4} \le \langle p^2\rangle\langle x^2\rangle$$

عرفنا في ((1.(4.7) الانحراف التربيعي الوسطي بـ $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$ الذي يرينا أن $\langle A^2\rangle \ge \langle A\rangle^2$ ويبين لنا أن $\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \ge (\Delta A)^2(\Delta B)^2$ ومنه علاقة اللاتحديد

$$\Delta p\Delta x \ge \left[\langle p^2\rangle\langle x^2\rangle\right]^{1/2} \ge \frac{\hbar}{2} \qquad (1.28)$$

نحصل على المساواة عندما يكون المقدار D مساوياً للصفر أي عندما يكون

$$\frac{-x}{2\langle x^2\rangle}\varphi(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

حل هذه المعادلة هو

$$Ln\varphi = \frac{-x^2}{4\langle x^2\rangle}$$

ومنه، بوضع $a = \frac{1}{4\langle x^2\rangle}$ وتنظيم $\varphi$ للواحد

$$\varphi(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2} \qquad (1.29)[1]$$

وهكذا فإن الحل الذي يقابل الحد الأدنى للاتحديد هو التوزيع الغاوصي Gaussian الذي يعرف مربعه كثافة الاحتمال الطبيعية والتي أعطينا تغيراتها في الشكل.2 من الفصل السابق.

---

[1] نذكر أننا نحصل على هذه النتيجة بأخذ المربع لـ $J = \int e^{-x^2}dx$ : $J^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ وكتابة هذا التكامل الثنائي بدليل الإحداثيات القطبية $J^2 = \iint e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$، نكامل على سطح الدائرة R، $J^2 = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+R}e^{-\rho^2}\rho d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{2}(1 - e^{-R^2})\right)$ الذي يتناهى إلى $\pi$ من أجل $R \to \infty$ ومنه $J = \sqrt{\pi}$. ونرى بسهولة أن $\int e^{-2ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$ ومنه التنظيم.

لنضع $\varphi(x)$ في $(1.22)'$ (ببعد واحد) للحصول على محول فوريي $\varphi(k)$ :

$$\varphi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}\int e^{-ax^2-ikx}dx$$ [2]

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

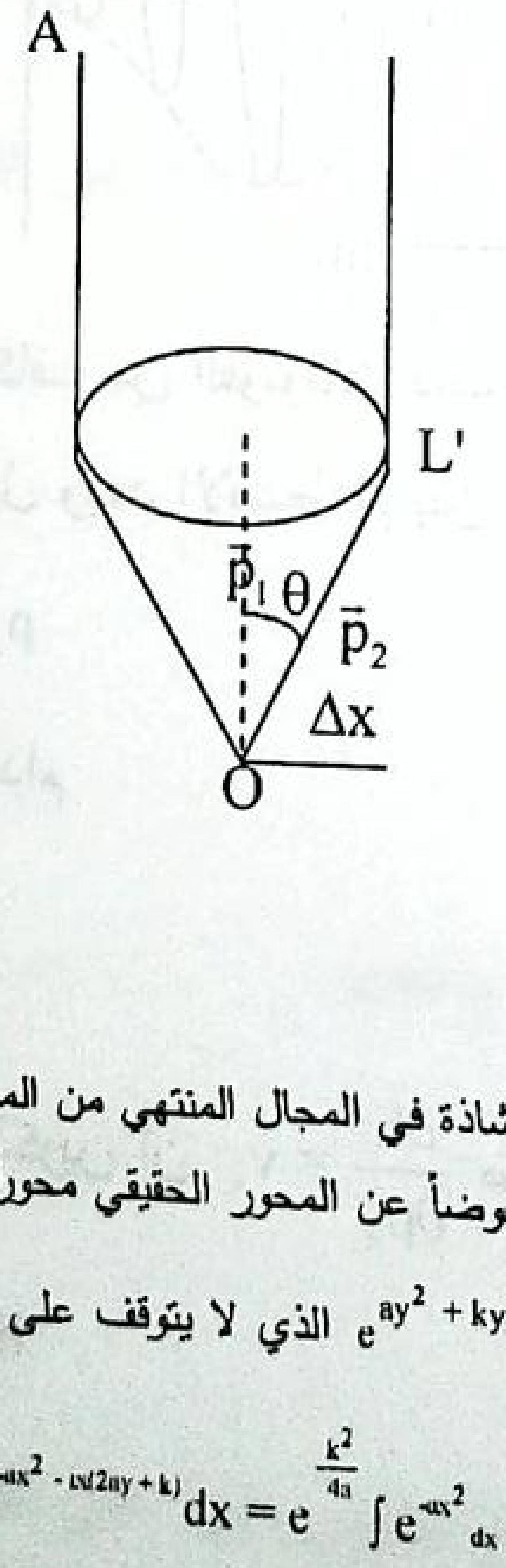
$$= \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^{1/4}e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

وهكذا فإن $\varphi(k)$ الذي يقابل الحد الأدنى للاتحديد هو أيضاً توزيع غاوصي؛ أو بشكل آخر : إن محول فوريي لدالة غاوصية دالة غاوصية ولهما نفس المضاريب من أجل $a = \frac{1}{2}$

$$\varphi(x) = (\pi)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; \quad \varphi(k) = (\pi)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{k^2}{2}} \qquad (1.30)$$

لنعط هنا مثالين يوضحان علاقة اللاتحديد أحدهما لقياس الوضع والآخر لقياس الاندفاع :

a) نعلم من نظرية المجهر[3] أن قوة الفصل لعدسة شيئية L هي المسافة $\Delta x$ بين نقطتين A و 'A لهما صورتان متيمزتان، أي عندما تقع صورة 'A على مسافة تبعد عن صورة A، لنسمها O، بمقدار يساوي نصف قطر حلقة الانعراج الأولى (البقعة المظلمة) حول هذه الصورة. كما نعلم أن الحلقات في جوار O تتطابق مع الحلقات في جوار البؤرة لعدسة 'L، لها نفس فتحة L، تقع O في بؤرتها؛ أما الشيء المرئي فهو في اللانهاية ولذا نمثل المجهر بالمخطط التالي




---

[2] إن الدالة التي نريد مكاملتها تحليلية وليس لها نقاط شاذة في المجال المنتهي من المستوي وتتناهى نحو الصفر على كل مستقيم مواز للمحور الحقيقي، وبالتالي لا تتغير قيمة التكامل إذا ما اخترنا عوضاً عن المحور الحقيقي محوراً آخر مواز له $z = x + iy$ . يصبح التكامل على الشكل $\int e^{-a(x+iy)^2-ik(x+iy)}dx$ ، $\left(k = \frac{p}{\hbar}\right)$. نخرج المقدار $e^{ay^2+ky}$ الذي لا يتوقف على x ونختار y بحيث ينعدم الحد التخيلي $ix(2ay+k)$ ، $y = -\frac{k}{2a}$ وهكذا فالتكامل هو

$$e^{ay^2+ky}\int e^{-ax^2-ix(2ay+k)}dx = e^{\frac{k^2}{4a}}\int e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{k^2}{4a}}$$

[3] انظر كتاب الضوء، في سلسلة دروس الفيزياء العامة لجورج بروها G. Bruhat، الفصل XI، الانعراج في جوار البؤرة وبشكل خاص ص.240.

حيث θ فتحة الحزمة الخارجة من العدسة. يبرهن أن قوة الفصل هي حسب قانون آبه Abbe (III.6.(2.64)))

$$\Delta x = \frac{0{,}61\lambda}{n\sin\theta}$$

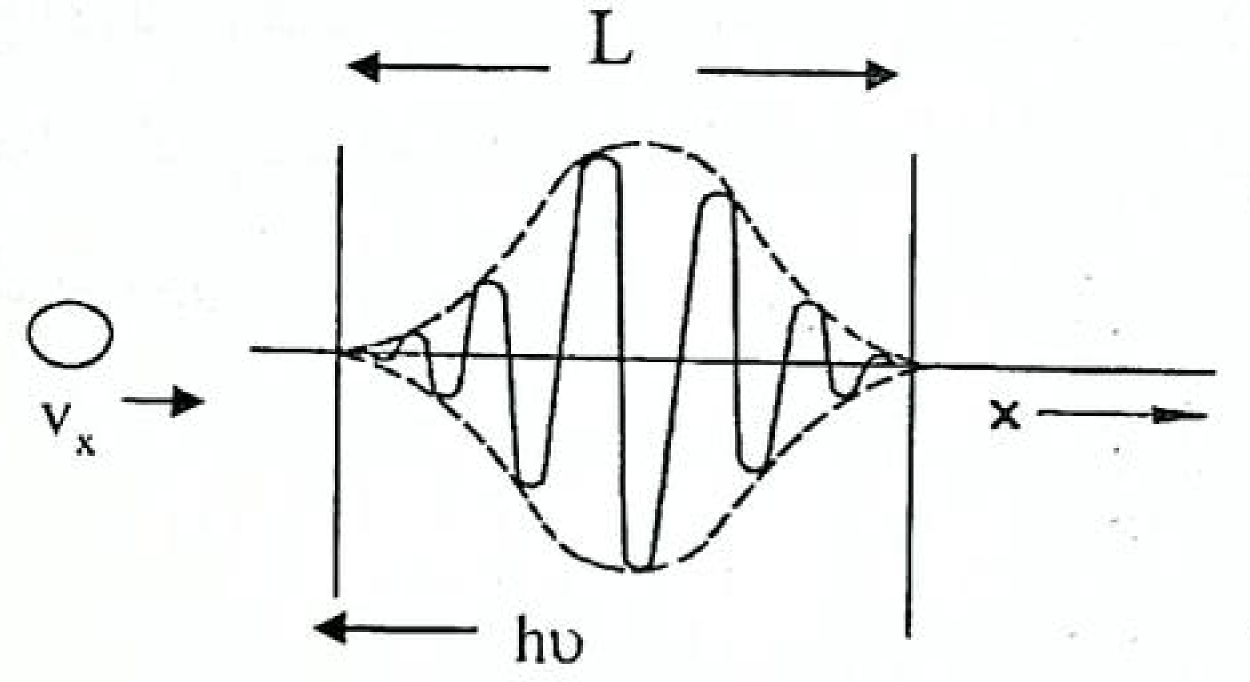
سنكتفي هنا بالقول إن $\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin\theta}$ وإن دقة القياس مرتبطة بطول موجة الضوء الذي يضيء المجهر. إلا أن المجهر، كجهاز قياس، جهاز تقليدي وليس جهازاً كمومياً. هذا يعني أن عدد الفوتونات كبير جداً بحيث يمكن لكم ضوء واحد (فوتون) على الأقل أن يتبعثر عن الشيء ويتيح لنا رصده. إن اندفاع الفوتون هو $p = \frac{h\upsilon}{c} = \frac{h}{\lambda}$ ولكننا لا نعلم أي فوتون من الحزمة المحددة بالمخروط ذي الزاوية θ اصطدم فعلاً بالجسيم. وهكذا فإن الحد الأقصى لـ $\Delta p_x$ هو

$$\Delta p_x = p\sin\theta = \frac{h}{\lambda}\sin\theta$$

ومنه

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$

b) قياس الاندفاع بواسطة مفعول دوبلر بأن نجعل قطار أمواج طوله L يصطدم ويرتد عن جسيم سرعته $v_x$، وفق المخطط التالي




وهنا أيضاً يحتوي هذا القطار على عدد كاف من الفوتونات بحيث يصطدم أحد الفوتونات بالجسيم.

لدينا من مبدأ انحفاظ الاندفاع الخطي، قبل وبعد الاصطدام بين الجسيم والفوتون ذي التواتر υ

$$p_x - \frac{h\upsilon}{c} = p'_x + \frac{h\upsilon'}{c} \qquad (1.31)$$

حيث تشير الفتحة إلى قيم ما بعد الاصطدام

وكذلك من مبدأ انحفاظ الطاقة

$$E + h\upsilon = E' + h\upsilon' \qquad (1.32)$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة للمتغير $p_x$، مذكرين أن $\frac{\partial E}{\partial p_x} = v_x$ صالحة في النسبية الخاصة أيضاً، فنجد

$$h\frac{\partial \upsilon'}{\partial p_x} = v_x - v'_x \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} \qquad (1.32)'$$

يعطي اشتقاق العلاقة (1.31)

$$1 - \frac{h}{c}\frac{\partial \upsilon'}{\partial p_x} = \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} \qquad (1.31)'$$

نبدل $\frac{\partial p'_x}{\partial p_x}$ في $(1.32)'$ بقيمتها في $(1.31)'$ لنجد

$$h\frac{\partial \upsilon'}{\partial p_x}\left(1 - \frac{v'_x}{c}\right) = v_x - v'_x$$

نكتب هذه العلاقة بدليل عدم تعيين $\upsilon'$

$$\Delta\upsilon' = \frac{\partial \upsilon'}{\partial p_x}\Delta p_x$$

فتصبح

$$h\Delta\upsilon' = \frac{v_x - v'_x}{1 - v'_x/c}\Delta p_x \simeq (v_x - v'_x)\Delta p_x$$

حيث أهملنا $v'_x/c$ .

إن $\Delta\varepsilon = h\Delta\upsilon'$ حيث $\varepsilon$ طاقة الفوتون ولدينا من علاقة اللاتحديد بين العزمين المترافقين الطاقة والزمان، حيث الزمن $\Delta T$ هو فترة دوام القياس

$$\frac{h}{\Delta T} \sim \Delta\varepsilon = (v_x - v'_x)\Delta p_x$$

أو

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta T(v_x - v'_x)}$$

إن المخرج $\Delta T(v_x - v'_x)$ هو $\Delta x$ لإننا لا نعلم للحظة، من الفترة $\Delta T$، التي حدث فيها تغير السرعة

$$v'_{x\text{-}\Delta x} = v_x - \frac{\Delta X}{\Delta T}$$

ومنه

$$\Delta p_x \Delta x \sim h$$

## 2. حل معادلة شرودينغر ببعد واحد

### 1.2- هضبة الكمون، الحالة العامة

لنبدأ بدراسة الحالات التي لا يتوقف الهاميلتوني فيها على الزمن، أي عندما تكون الطاقة ثابتة؛ كل متجهات الحالة مستقرة عندئذ وتخضع للمعادلة

$$1 - \frac{h}{c}\frac{\partial \upsilon'}{\partial p_x} = \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} \qquad (1.31)'$$

نبدل $\frac{\partial p'_x}{\partial p_x}$ في $(1.32)'$ بقيمتها في $(1.31)'$ لنجد

$$h\frac{\partial \upsilon'}{\partial p_x}\left(1 - \frac{v'_x}{c}\right) = v_x - v'_x$$

نكتب هذه العلاقة بدليل عدم تعيين $\upsilon'$

$$\Delta\upsilon' = \frac{\partial \upsilon'}{\partial p_x}\Delta p_x$$

فتصبح

$$h\Delta\upsilon' = \frac{v_x - v'_x}{1 - v'_x/c}\Delta p_x \simeq \left(v_x - v'_x\right)\Delta p_x$$

حيث أهملنا $v'_x/c$.

إن $\Delta\varepsilon = h\Delta\upsilon'$ حيث $\varepsilon$ طاقة الفوتون ولدينا من علاقة اللاتحديد بين العزمين المترافقين الطاقة والزمان، حيث الزمن $\Delta T$ هو فترة دوام القياس

$$\frac{h}{\Delta T} \sim \Delta\varepsilon = \left(v_x - v'_x\right)\Delta p_x$$

أو

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta T\left(v_x - v'_x\right)}$$

إن المخرج $\Delta T\left(v_x - v'_x\right)$ هو $\Delta x$ لإننا لا نعلم للحظة، من الفترة $\Delta T$، التي حدث فيها تغير السرعة

$$v'_{x\text{-}\Delta x} = v_x - \frac{\Delta X}{\Delta T}$$

ومنه

$$\Delta p_x \Delta x \sim h$$

## 2. حل معادلة شرودينغر ببعد واحد

### 1.2- هضبة الكمون، الحالة العامة

لنبدأ بدراسة الحالات التي لا يتوقف الهاميلتوني فيها على الزمن، أي عندما تكون الطاقة ثابتة؛ كل متجهات الحالة مستقرة عندئذ وتخضع للمعادلة

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \qquad (2.1)$$

تقع هذه الحالة عندما لا يتوقف الهاميلتوني مباشرة على الزمن $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ وبالتالي $\frac{dH_H}{dt} = 0$ حسب ((1.(5.11)) وهذا ما يحدث، كما في الميكانيك التقليدي، عندما يكون الكمون U تابعاً للوضع $\bar{r}$ فقط وغير تابع مباشرة للزمن $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. نكتب $|\psi\rangle$ كما في ((1.(5.7)).

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|\varphi(\bar{r})\rangle = \chi(t)|\varphi(\bar{r})\rangle \qquad (2.2)$$

و $|\psi\rangle$ جداء دالة عددية $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ بمتجهة حالة $|\varphi(\bar{r})\rangle$ تتبع المتغير $\bar{r}$ وحده؛ وهي متجهة تحقق (2.1)

$$H|\varphi(\bar{r})\rangle = E|\varphi(\bar{r})\rangle \qquad (2.1)'$$

وهكذا فإن كون الحالة مستقرة شرط لازم لكتابة متجهة الحالة على شكل جداء (2.2) بمتغيرين t و $\bar{r}$.

لنبرهن الآن أن هذا الشرط كاف لكي تكون الحالة مستقرة ولنكتب معادلة شرودينغر كما يلي

$$|\varphi(\bar{r})\rangle i\hbar\frac{\partial\chi(t)}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\bar{r})\right]\chi(t)|\varphi(\bar{r})\rangle$$

ذلك أن $\frac{\partial}{\partial t}$ لا يؤثر على $|\varphi(\bar{r})\rangle$؛ وكذلك فإن $\nabla^2$ لا يؤثر على $\chi(t)$ بحيث تصبح المعادلة بتقسيم الطرفين من اليسار على $|\varphi(\bar{r})\rangle$ ومن بعدها من اليسار كذلك على $\chi(t)$ على الشكل

$$\chi^{-1}(t)\, i\hbar\frac{\partial\chi(t)}{\partial t} = \frac{1}{|\varphi(\bar{r})\rangle}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\bar{r})\right]|\varphi(\bar{r})\rangle$$

يتوقف الطرف الأيسر من هذه المعادلة على t وحده والطرف الأيمن على $\vec{r}$ فقط ولا يتحقق التساوي بينهما إلا إذا كانا مساويين لنفس الثابتة E : $\chi(t) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ والحالة مستقرة و $\varphi(\bar{r})$ هي حل المعادلة

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + U(\bar{r})\right]|\varphi(\bar{r})\rangle = E|\varphi(\bar{r})\rangle \qquad (2.3)$$

يمكننا فصل المتغيرات x، y، z عن بعضها في هذه المعادلة باستعمال نفس المحاكمة السابقة عندما لا يتوقف الكمون $U(\bar{r})$ إلا على متغير واحد، x على سبيل المثال : نكتب $|\varphi(\bar{r})\rangle$ على شكل جداء $|\varphi(x)\rangle|\varphi(y, z)\rangle$ حيث تحقق $\varphi(x)$ المعادلة ببعد واحد

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]|\varphi(x)\rangle = E|\varphi(x)\rangle \qquad (2.4)$$

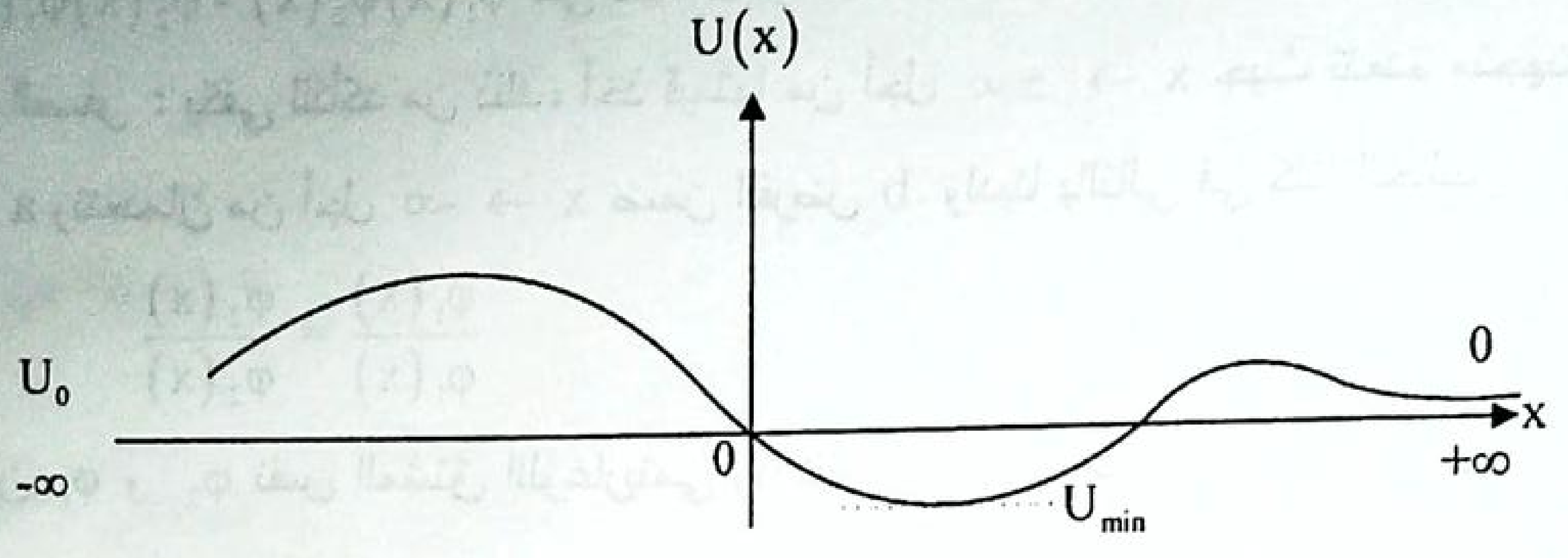
وتخضع $|\varphi(y, z)\rangle$ إلى معادلة شرودينغر لجسيم حر، موجة حرة ((1.(2.27)).

إن حل معادلة شرودينغر العام هو توضيع كل الحالات المستقرة، الجمع على كل قيم الطاقة

$$|\psi(\bar{r}, t)\rangle = \sum_E C_E e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|\varphi(\bar{r})\rangle \qquad (2.5)$$

و $\left|\varphi(\bar{r})\right\rangle$ تخضع للمعادلة (2.3) عندما يتبع الكمون الوضع $\bar{r}$ وللمعادلة (2.4) عندما يكون تابعاً لبعد واحد.

لنفترض وجود كمون متصل ذي مظهر متقلب، هضبة فوادي، الخ. ولنفرض أنه يتناهى نحو مقدار منته عندما يتناهى المتغير x نحو $\pm\infty$، ليكن $U(\infty) = 0$ و $U(-\infty) = U_0 > 0$، الشكل. 1




الشكل. 1

ولننظر إلى قيم الطاقة.

a– إذا كانت طاقة الجسيم الكلية E سالبة، فإنه يستحيل عليه كما رأينا الابتعاد إلى اللانهاية. تتواءم هذه الحالة مع أخذنا $U(\infty) = 0$ : $E < U(\infty)$. ثم إن هذه الطاقة أكبر حتماً من الحد الأدنى للطاقة الكامنة (لأن $E - U \geq 0$ دوماً) $E > U_{min}$. والطيف طيف منفصل

$$U_{min} < E < 0 \qquad (2.6)$$

b– نفترض الآن أن طاقة الجسيم موجبة ولكنها محددة بالشرط

$$0 < E < U_0 \qquad (2.7)$$

يمكن للجسيم أن يبتعد نحو اللانهاية في الاتجاه الموجب $E > U(\infty) = 0$ وبالتالي فالطيف طيف متصل، ولكنه لا يستطيع بلوغ اللانهاية في الاتجاه السالب.

c– نفترض أخيراً الطاقة موجبة وأنها أكبر من $U_0$، يمكن للجسيم الابتعاد نحو اللانهاية في كلا الاتجاهين

$$E > U_0 \qquad (2.8)$$

لنبين قبل كل شيء أن مستويات الطاقة غير متدنية عندما يتحقق الشرطان (2.6) و (2.7) : لنفرض العكس ولتكن $\varphi_1$ و $\varphi_2$ متجهتي حالة لذات القيمة الخاصة E، أي أنهما تحققان (2.4) التي نكتبها (من أجل هاتين الدالتين) على الشكل

$$\varphi_1''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(U - E)\varphi_1(x)$$

$$\varphi_2''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(U - E)\varphi_2(x)$$

حيث $\varphi''$ هو المشتق الثاني لـ $\varphi$ بالنسبة لـ $x$. لدينا

$$\frac{\varphi_1''(x)}{\varphi_2''(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

أو بعبارة أخرى $\varphi_1''(x)\varphi_2(x) - \varphi_2''(x)\varphi_1(x) = 0$

إن الدالة $\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_2'(x)\varphi_1(x)$ هي دالة أصلية للدالة السابقة المعدومة وتساوي إذاً لثابتة C؛ هذه الثابتة تساوي الصفر : يكفي للتأكد من ذلك، أخذ قيمتها من أجل $x \to \pm\infty$ حيث تنعدم متجهتا الحالة في إطار الفرض a وتنعدمان من أجل $x \to -\infty$ ضمن الفرض b. ولدينا بالتالي في كلتا الحالتين

$$\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} \tag{2.9}$$

وهكذا فللدالتين $\varphi_1$ و $\varphi_2$ نفس المشتق اللوغاريتمي ولا تفترقان عن بعضهما إلا بمقدار ثابت $\alpha$ :

$$\varphi_2 = \alpha\varphi_1$$

فهما إذاً متجهتا حالة متطابقتان والطيف غير متدن ضمن الشرطين (2.6) و (2.7).

## 2.2- متجهة الحالة في جوار النقطتين $x \pm\infty$

لنكتب معادلة شرودينغر في جوار $x \to \infty$ (حيث $U(\infty) = 0$)

$$\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0 \tag{2.7)'$$

وفي جوار $x \to -\infty$ (حيث $U(-\infty) = U_o$)

$$\varphi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(U_o - E)\varphi(x) = 0 \tag{2.7)"$$

$U_o - E > 0$ من أجل الافتراض b و $U_o - E < 0$ من أجل الافتراض c

إن حل '(2.7) هو موجات مستقرة $\psi(x) = \varphi(x)\chi(t)$ ؛ و $\chi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{a}{2}\left(e^{i(kx+\delta)} + e^{-i(kx+\delta)}\right) = a\cos(kx+\delta) \\ k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad ; \end{cases} \tag{2.10}$$

حيث a والطور $\delta$ ثابتتان (و $k = \frac{p}{\hbar}$)

أما حل المعادلة "(2.7) فهو من الشكل الزائدي من أجل الحالة b :

$$\varphi(x) = b\,e^{\pm\beta x} \tag{2.11}$$

حيث

$$\beta = \frac{\sqrt{2m(U_o - E)}}{\hbar} \tag{2.12}$$

يجب اختيار الحل الذي يسعى نحو الصفر من أجل $x \to -\infty$ أي $e^{+\beta x}$.

ولكنه موجات مستوية مستقرة في الحالة c ($E > 0$ و $E > U_o$) – حل المعادلة "(2.7) هو كحل المعادلة '(2.7) حيث

$$k = \frac{\sqrt{2m(E - U_o)}}{\hbar} \qquad (2.13)$$

إلا أن الحل هنا هو بتوضيع موجتين مستويتين بسعتين مختلفتين $a_1$ و $a_2$

$$\varphi(x) = a_1 e^{ikx} + a_2 e^{-ikx} \qquad (2.14)$$

مما يعني أن مستويات الطاقة ثنائية التدني؛ لم تعد $\varphi$ معدومة لا من أجل $x = \infty$ ولا من أجل $x = -\infty$ ولم تعد محاكمتنا لإثبات عدم التدني في الحالتين a، b صالحة.

لنذكر أننا كتبنا الموجة المستوية على الشكل $e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}$ وهكذا فإن $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ (وبالتالي $e^{ikx}$) تمثل موجة مستوية متجهة نحو اليمين و $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ (ومعها $e^{-ikx}$) موجة مستوية متجهة نحو اليسار. لنحسب قيمة الثابتة في (2.10) بتطبيق علاقة التعامد (1.24) ببعد واحد. لدينا

$$(2\pi\hbar)\delta(p' - p) = \langle \varphi_{p'}(x) | \varphi_p(x) \rangle = \frac{|a|^2}{4} \int_0^{\infty} \left(e^{-i(k'x + \delta')} + e^{i(k'x + \delta')}\right)\left(e^{i(kx + \delta)} + e^{-i(kx + \delta)}\right) dx \qquad (2.15)$$

$$= \frac{|a|^2}{4} \left( \int_0^{\infty} e^{i(k' - k)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-i(k' - k)x} dx \right)$$

$$= \frac{|a|^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k' - k)x} dx$$

حيث أهملنا في الجداء السابق المقادير من الشكل $e^{\pm i(k' + k)x}$ تحت إشارة التكامل لأنها تعطي قيماً منتهية واعتبرنا أن لـ p و p' المتجاورتين نفس الطور $\delta$ وهكذا لا يبقى تحت إشارة التكامل إلا الحدود المتباعدة عندما تتناهى x إلى $+\infty$. إن تكامل الطرف الثاني هو حسب (1.15) و (1.13) $2\pi\delta(k' - k) = 2\pi\delta\left(\frac{p' - p}{\hbar}\right) = 2\pi\hbar\delta(p' - p)$؛ وأخيراً

$$\frac{a^2}{4} = 1 \quad \text{و} \quad a = 2 \qquad (2.16)$$

لنكتب الآن دالة ديراك $\delta(p' - p)$ بدليل دالة ديراك $\delta(E' - E)$ كي نحسب ثابتة تنظيم المتجهات الخاصة لـ E، نرمز لها بـ $\varphi_E(x)$. لدينا نظراً لـ (1.14) ولكون $\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{m} = V$

$$\langle \varphi_{E'}(x) | \varphi_E(x) \rangle = \delta(E' - E) = \delta\left[(p' - p)\frac{\partial E}{\partial p}\right] = \frac{1}{|V|}\delta(p' - p)$$

ولدينا من (2.15)

$$= \frac{1}{2\pi\hbar|V|}\langle \varphi_{p'} | \varphi_p \rangle.$$

وبالتالي

$$\begin{cases} |\varphi_E\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar|V|}}|\varphi_p\rangle \\ = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar|V|}}\left(e^{i(kx+\delta)} + e^{-i(kx+\delta)}\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

لنلاحظ أن كثافة الاحتمال من أجل كل واحدة من الموجات المستقرة $e^{\pm i(kx+\delta)}$ هي

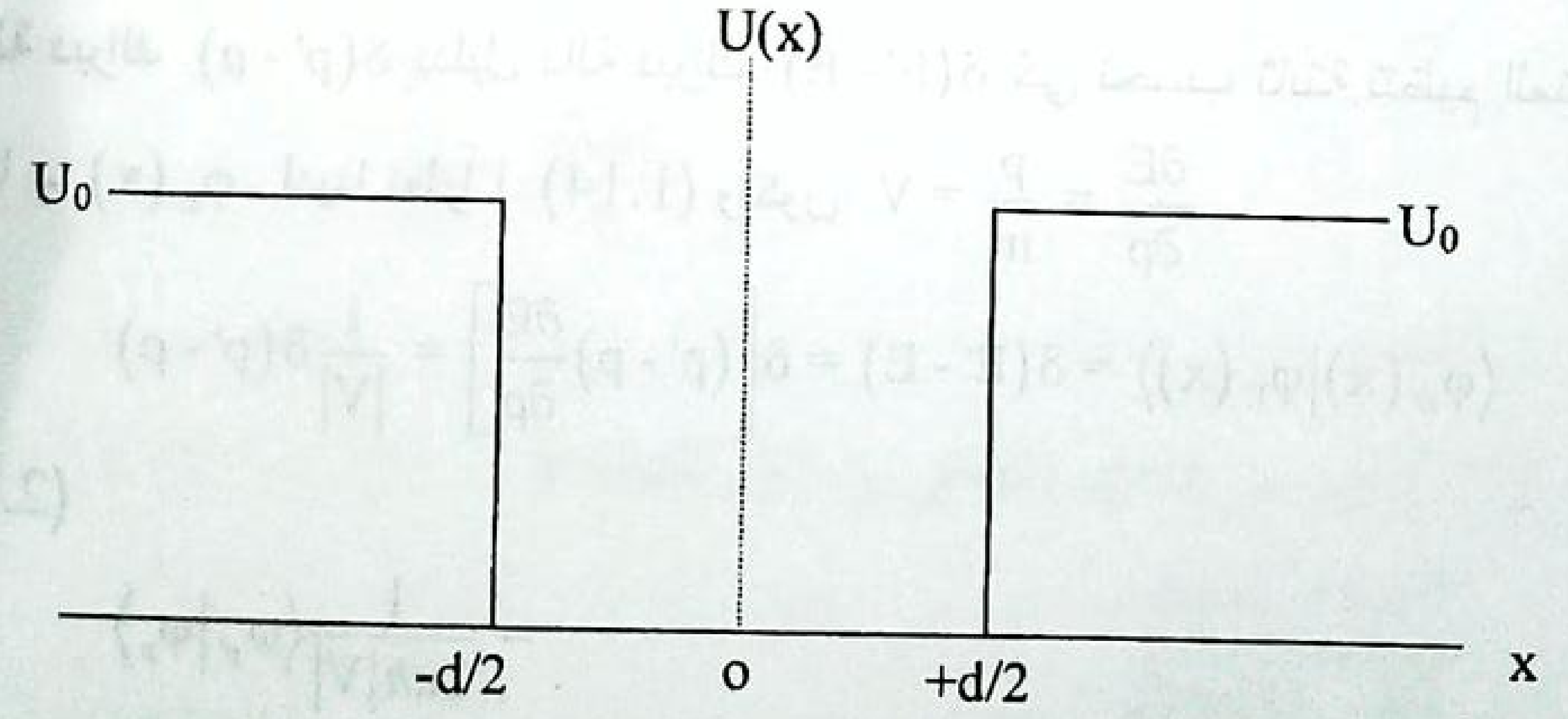
$$\rho dE = |\varphi_E|^2 dE = \frac{1}{2\pi\hbar|V|}dE$$

وبالتالي فإن كثافة التيار – الكمية $\rho|V|$ – هي المقدار الثابت $\frac{1}{2\pi\hbar}$ مما يدعونا إلى استخلاص القاعدة التالية عندما نريد تنظيم متجهة الحالة لحركة لا متناهية في أحد الاتجاهين – هنا $x \to \infty$ – بدليل الدالة الشاذة $\delta(E'-E)$ : يجب عند وضع هذه المتجهة على شكل مجموع متجهتين مستويتين تسيران في اتجاهين متعاكسين اختيار ثابتة التنظيم بحيث تكون كثافة التيار – $\rho|V|$ – المتجه نحو نقطة المبدأ أو المبتعد عنها مساوية لـ $\frac{1}{2\pi\hbar}$.

## 3.2– بئر الكمون

لنلاحظ بداية أنه في حال كون دالة الكمون متناظرة بالنسبة لـ $x = 0$، في حال كونها زوجية $U(x) = U(-x)$ فإن $\varphi(-x)$ هي حل للمعادلة (2.4) مثل $\varphi(x)$ لأن المشتق الثاني $\frac{d}{dx^2}$ لا يتغير نتيجة هذا التبديل وبالتالي فإن $\varphi(-x) = c\varphi(x)$. نحصل بتبديل الإشارة مرة ثانية على $\varphi(x) = c^2\varphi(x)$ أي أن $c = \pm 1$. وهكذا فإنه فمن الممكن أن تكون دالة الموجة $\varphi(x)$ زوجية ($c = 1$ و $\varphi(-x) = \varphi(x)$) أو فردية ($c = -1$ و $\varphi(-x) = -\varphi(x)$).

لنأخذ كحالة خاصة للدراسة حالة حركة ببعد واحد في بئر كمون مربع، الشكل. 2.




الشكل. 2

حيث $U(x)=0$ من أجل $-\frac{d}{2}<x<\frac{d}{2}$؛ و $U(x)=U_0$ من أجل $x<-\frac{d}{2}$ و $x>\frac{d}{2}$. إن الطيف منفصل من أجل $E<U_0$ لأن الجسيم يبقى محصوراً داخل البئر وهو متصل من أجل $E>U_0$ وثنائي التدني لأنه يقابل الحالة c حيث يمكن للجسيم الابتعاد نحو اللانهاية في كلا الاتجاهين. إن معادلة شرودينغر داخل البئر هي '(2.7)

$$\varphi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}E\varphi(x)=0 \tag{2.18}$$

والحل هو (2.10)

$$\varphi(x)=a\cos(kx+\delta) \tag{2.18'}$$

أما خارج البئر فإن المعادلة هي "(2.7) مع $U_0-E<0$ أي

$$\varphi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\varphi(x)=0 \qquad (2.19)_c$$

والحل هو (2.14)

$$\varphi(x)=a_1e^{ikx}+a_2e^{-ikx} \qquad (2.19)'_c$$

يجب أن يكون الانتقال بين الحلين في النقطتين الفاصلتين $-\frac{d}{2}$ و $+\frac{d}{2}$ انتقالاً متصلاً وأن يكون انتقال المشتق متصلاً كذلك. نعبر عن هاتين الضرورتين معاً بقولنا إنه يجب أن تكون دالة الموجة $\varphi$ متصلة وأن يكون مشتقها اللوغارتيمي $\frac{\varphi'}{\varphi}$ متصلاً كذلك.

A– لن ندرس هذه الحالة بالتفصيل هنا قبل البدء بدراسة حالة بئر لامتناهي في العمق $U_0=\infty$ أي حالة الطيف المنفصل وحده. لا يستطيع الجسيم تجاوز حاجز الكمون هذا وبالتالي فإن $\varphi=0$ خارج النقطتين $-\frac{d}{2}$ و $\frac{d}{2}$ وبما أن $\varphi$ دالة متصلة فإنها تساوي الصفر من أجل $x=\pm\frac{d}{2}$.

لننظر للشرط الذي يجب أن يحققه الحل '(2.18) لكي يكون زوجياً:

$$\cos(-kx+\delta)=\cos(kx+\delta)=\cos(-kx-\delta)$$

لأن الدالة cos زوجية ومنه

$$\delta=-\delta=0$$

والحل الزوجي هو

$$\varphi=a\cos kx$$

وكذلك فإن الحل الفردي هو

$$\varphi=a\sin kx$$

يعني انعدام الحل الزوجي في النقطتين $\pm\frac{d}{2}$ أن: $\frac{kd}{2}=n\frac{\pi}{2}$ حيث n عدد فردي. وانعدام الحل الفردي في هاتين النقطتين أن: $k\frac{d}{2}=n\pi$ و n عدد صحيح لا على التعيين.

مما يعطينا تكميم متجهة الموجة

$$k\frac{d}{2} = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots = \frac{n\pi}{2} \qquad \text{حيث} \quad n = 1,2,3\ldots$$

وبالتالي تكميم الطاقة حسب (2.10) : $k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$

$$= \frac{n\pi}{d}$$

و

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2}n^2 \qquad (2.20)$$

يمكننا كتابة الحلين، الزوجي والفردي في صيغة واحدة على الشكل

$$\pm\sin\left(k_n x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

المساوي لـ $\pm\cos k_n x$ من أجل n عدد فردي ولـ $\pm\sin k_n x$ من أجل n زوجي، ثم تبديل المتغير x بـ $X = x + \frac{d}{2}$ أي جعل مبدأ بئر الكمون في النقطة صفر ليأخذ الحلان الشكل التالي

$$\sin\left(k_n x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(k_n\left(X - \frac{d}{2}\right) + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin k_n X$$

لنلاحظ أنه كان يمكن اقتراح الحل $\sin(kx+\delta)$ منذ البداية من أجل بئر كمون لامتناه بين النقطتين 0 و d، تبيان أن $\varphi(0) = 0$ يعني أن $\delta = 0$ وأن $\varphi(d) = 0$ يعني أن $kd = n\pi$ ؛ إلا أننا فضلنا إيضاح فكرة توضيع الحلين الزوجي والفردي عندما يكون الكمون متناظراً وإعطاء تبرير لهذا الاقتراح.

إن تكامل $\sin^2 k_n x$ بين 0 و d هو

$$\int_0^d \sin^2 k_n x \, dx = \int_0^d \frac{1 - \cos 2k_n x}{2} dx = \frac{d}{2}$$

ومنه تنظيم $\varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{d}}\sin k_n x \qquad (2.21)$$

وأخيراً فإن الحل العام هو توضيع كل الحالات المستقرة كما في (2.5)

$$|\psi(x,t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n}|\varphi_n(x)\rangle$$

حيث $E_n$ و $\varphi_n$ معطيتان بالعلاقتين (2.20) و (2.21)

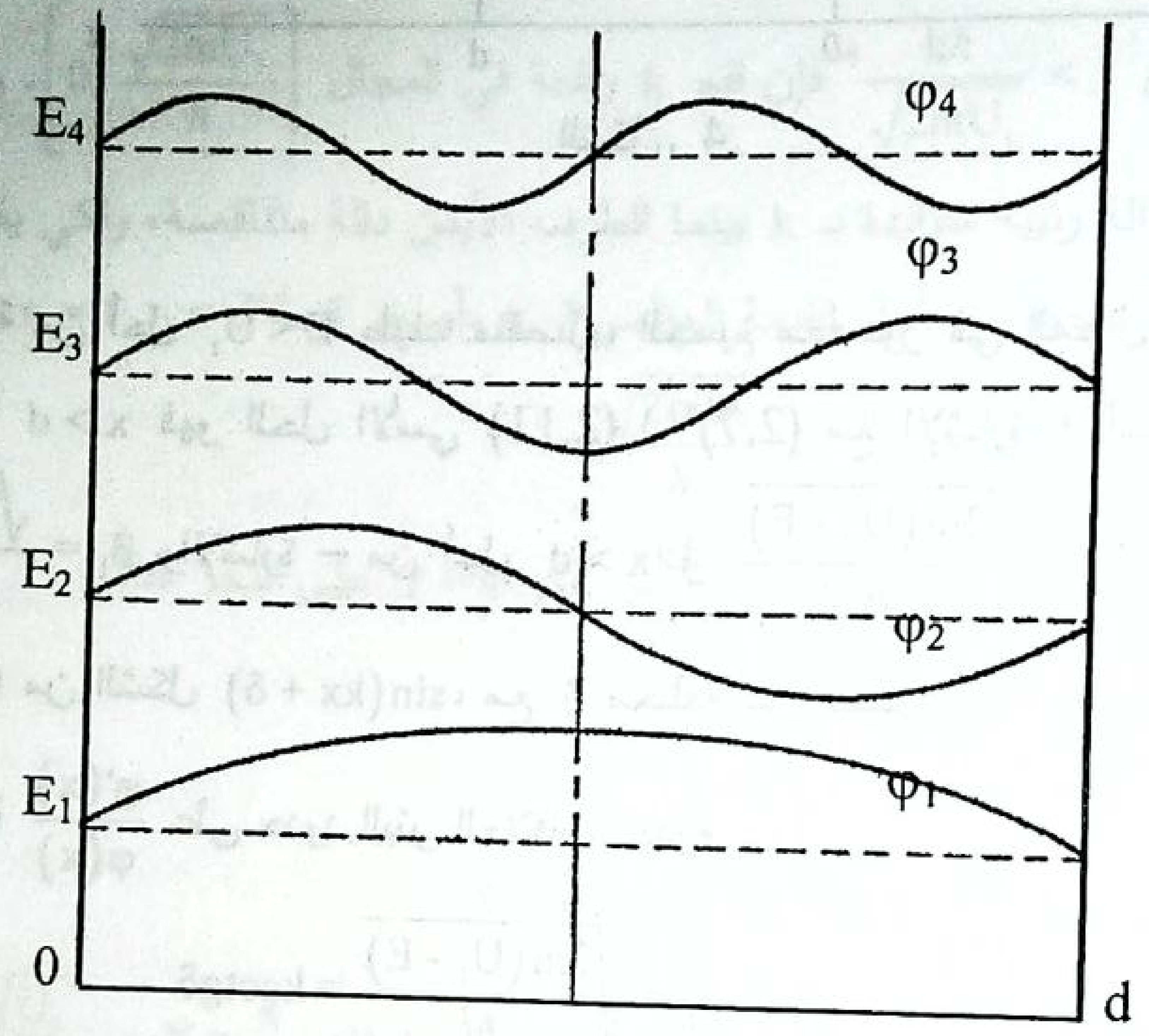
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i\frac{\pi^2\hbar}{2md^2}n^2}\sqrt{\frac{2}{d}}\sin\frac{n\pi}{d}x \qquad (2.22)$$

نبين في الشكل. 3 الطاقات الأولى المسموح بها ومتجهات الحالة $\varphi(x)$ المقابلة لها والتي تنعدم عند طرفي البئر. لا ينعدم $\varphi_1(x)$ المقابل للطاقة الأولى – طاقة القاع – في المجال $[0, d]$ ويمكن البرهان أن هذا الأمر صحيح من أجل كل طاقات القاع : لا تتغير إشارة متجهة حالة القاع من أجل أي مجال

منته من الفضاء، لا توجد أي عقدة للموجة. أما متجهات الحالة الأخرى فإنها تنعدم حتماً في بعض نقاط هذا المجال وإلا لاستحال التعامد $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$.

لـ $\varphi_2$ هنا عقدة واحدة $\sin\frac{2\pi}{d}x$ يساوي الصفر من أجل $x=\frac{d}{2}$.

ولـ $\varphi_3$ عقدتان $\sin\frac{3\pi}{d}x$ يساوي الصفر من أجل $x=\frac{d}{3},\ \frac{2d}{3}$، الخ.




الشكل.3

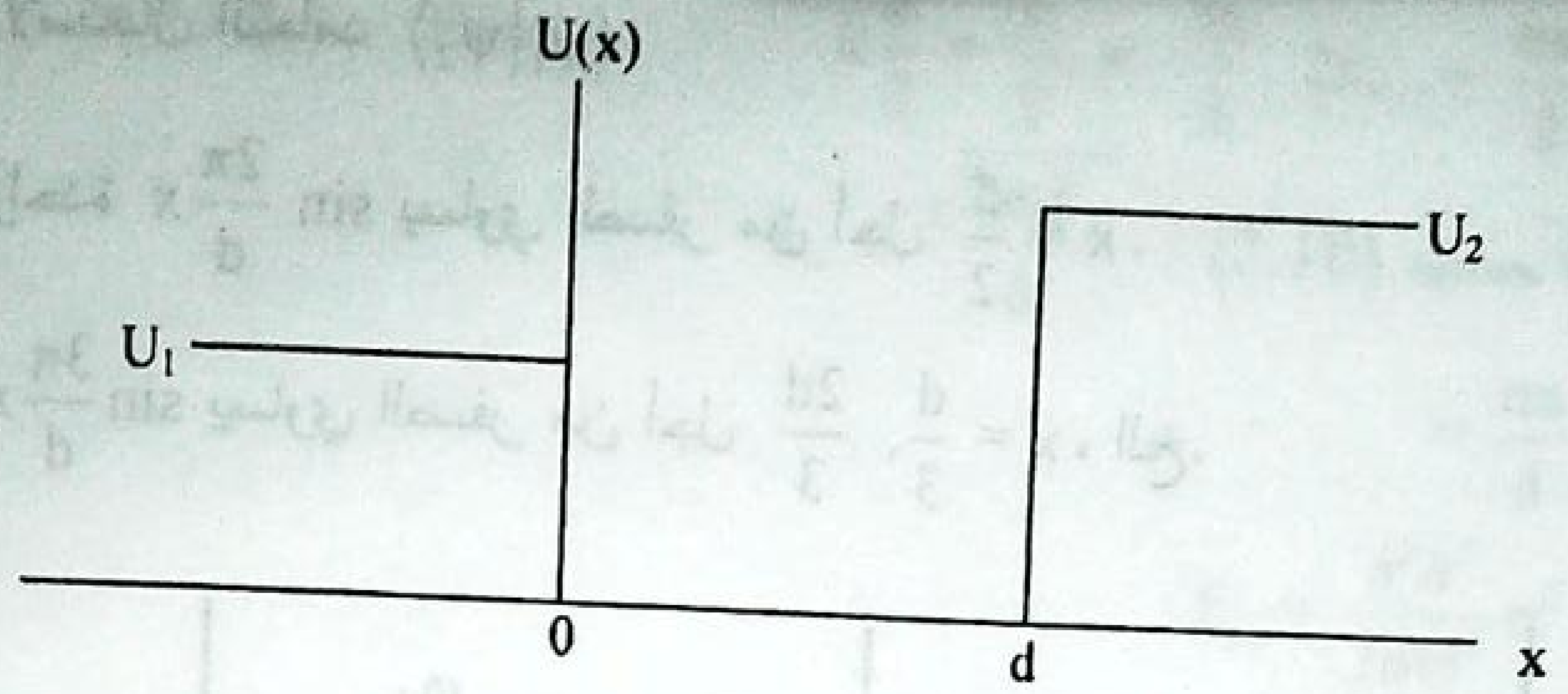
يمكننا تعميم حالة البعد الواحد إلى حالة بئر بثلاثة أبعاد $0<x<d_1$، $0<y<d_2$، $0<z<d_3$ و $U=\infty$ خارج هذا الحيز من الفضاء. إن $\varphi(\vec{r})$ هو جداء الدالات الثلاث $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ كما بينا في (2.3) ويتوقف على ثلاثة أعداد كمومية $n_1$، $n_2$، $n_3$ ولدينا من (2.21)

$$\varphi_{n_1,n_2,n_3}(\vec{r})=\sqrt{\frac{8}{d_1d_2d_3}}\sin\frac{n_1\pi}{d_1}x\cdot\sin\frac{n_2\pi}{d_2}y\cdot\sin\frac{n_3\pi}{d_3}z \qquad (2.23)$$

والطاقة الكلية هي مجموع الطاقات الثلاث (2.20)

$$E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{d_1^2}+\frac{n_2^2}{d_2^2}+\frac{n_3^2}{d_3^3}\right) \qquad (2.24)$$

B- لندرس الآن بئر كمون من الشكل. 4 التالي حيث $U_1 < U_2$




الشكل. 4

إن طيف الطاقة من أجل $E < U_1$ طيف منفصل، الجسيم محصور في المجال $[0, d]$. أما الحل من أجل $x < 0$ و $x > d$ فهو الحل الأسي (2.11) لـ "(2.7)" مع الإشارة + أمام $\beta$ من أجل $x < 0$ و $\beta_1 = \frac{\sqrt{2m(U_1 - E)}}{\hbar}$ والإشارة − من أجل $x > d$ و $\beta_2 = \frac{\sqrt{2m(U_2 - E)}}{\hbar}$. نفتش عن حل داخل البئر $0 < x < d$ من الشكل $\sin(kx + \delta)$، مع $\delta$ مختلفة عن الصفر حتماً هنا و $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. تفرض شروط الاتصالية $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ على حدود البئر العلاقات التالية

من أجل $x = 0$
$$\beta_1 = \sqrt{\frac{2m(U_1 - E)}{\hbar^2}} = k\cot g\delta$$

ومن أجل $x = d$
$$-\beta_2 = -\sqrt{\frac{2m(U_2 - E)}{\hbar^2}} = k\cot g(kd + \delta)$$

وبوضع قيمة $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$ في العلاقتين نجد

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{2mU_1}{\hbar^2} - k^2} = k\cot g\delta$$

$$-\beta_2 = -\sqrt{\frac{2mU_2}{\hbar^2} - k^2} = k\cot g(kd + \delta)$$

نرى من المعادلة الأولى أن

$$\sin\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot g^2\delta}} = \frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_1}}$$

ومن الثانية أن

$$\sin(kd + \delta) = -\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_2}}$$

نتخلص من $\delta$ في هاتين المعادلتين باستعمال الدالة العكسية arcsin

$$kd = -\arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_2}} - \arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_1}} + n\pi \quad (2.25)$$

إن لـ $\arcsin x$ عدد لامتناه من القيم يضاف إليه $2n\pi$ من أجل $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $(\sin x > 0)$ و $(2n+1)\pi$ من أجل $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $(\sin x < 0)$ ومنه الإضافة $n\pi$ ... $n = 1, 2, 3$ في المعادلة المتسامية (2.25)؛ و $\arcsin$ مأخوذة بين الصفر و $\frac{\pi}{2}$. تعين هذه المعادلة قيم $k_n$ ومعها قيم الطاقة $E_n = \frac{k_n^2\hbar^2}{2m}$. ومن جهة أخرى نظراً لكون $\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_1}} < 1$ [4] فإن قيم $k$ واقعة في المجال $\left[0, \frac{\sqrt{2mU_1}}{\hbar}\right]$. وهكذا فإن الطرف الأيسر في (2.25) دالة رتيبة متزايدة بـ $k$ بينما الطرف الأيمن دالة متناقصة، ولكي يكون لها حل يجب أن يكون الشرط التالي محققاً من أجل القيمة العظمى لـ $k$ وأصغر قيمة لـ $n$ : $n = 1$

$$d\frac{\sqrt{2mU_1}}{\hbar} \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{U_1}{U_2}} \quad (2.26)$$

حيث حسبنا $X = \arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_2}}$ بدليل $Y = \arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_1}}$ على النحو التالي :

$$\frac{\sin X}{\sin Y} = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$$

$$X = \arcsin\sin X = \arcsin\sqrt{\frac{U_1}{U_2}}\sin Y$$

وبما أن $\sin Y = \frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_1}} = 1$ من أجل القيمة العظمى لـ $k$ فإن $Y = \frac{\pi}{2}$ و $X = \arcsin\sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$ ومنه (2.26). إن هذه المتراجحة هي الشرط اللازم لوجود مستوى طاقة واحد على الأقل في البئر. المتراجحة محققة وضوحاً من أجل $U_1 = U_2$. لنرمز بـ $U_0$ لهذه القيمة المشتركة في (2.25) التي تعين لنا قيم $k$ :

$$\arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_0}} = \frac{n\pi - kd}{2}$$

أو

$$\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_0}} = \sin\left(\frac{n\pi - kd}{2}\right)$$

نسمي $\xi = \frac{kd}{2}$ ولدينا حالتان

$$\frac{k\hbar}{\sqrt{2mU_0}} = \sin\left(\frac{n\pi - kd}{2}\right) = \begin{cases} \cos\xi & \text{من أجل } n \text{ فردي} \\ \sin\xi & \text{من أجل } n \text{ زوجي} \end{cases} \quad (2.27)$$

لا نعرف إشارة $\cos\xi$ و $\sin\xi$. سنختار هذه الإشارة بحيث يكون $tg\xi > 0$ في الحالة الأولى و $tg\xi < 0$ في الحالة التالية وسنفتش عن حل بياني لهاتين المعادلتين من الشكل

---

[4] وهذا ما نراه في المعادلة التي تعين $\sin\delta$ أو كمتغير الدالة $\arcsin$.

$$\cos\xi = \pm\gamma\xi$$

$$\sin\xi = \pm\gamma\xi$$

حيث $\gamma = \frac{\hbar}{d}\sqrt{\frac{2}{mU_o}}$. يعطينا حل هاتين المعادلتين بطريقة مبيانية مختلف قيم $\xi = \frac{kd}{2}$ وبالتالي مختلف قيم الطاقة داخل البئر $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{2\xi^2\hbar^2}{md^2}$.

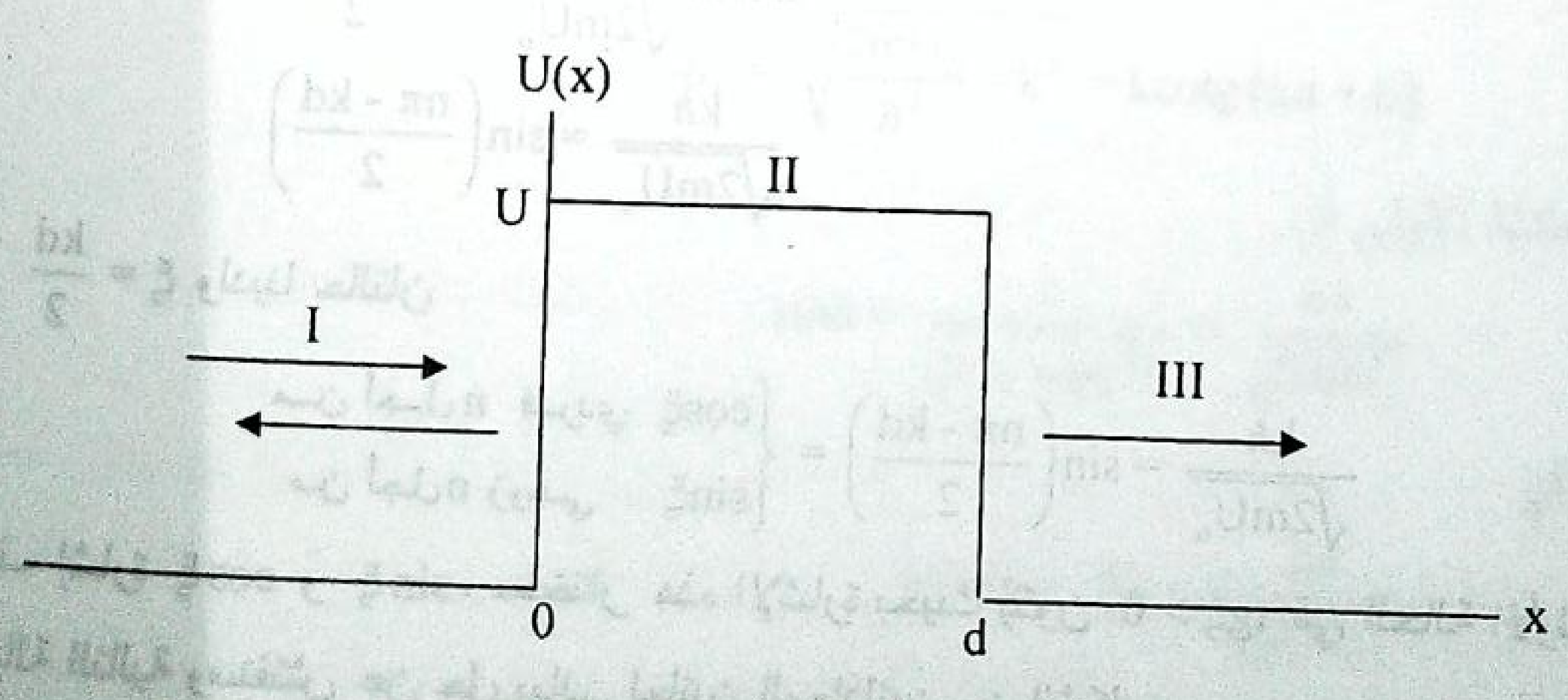
## 4.2– حاجز الكمون. مفعول النفق Tunneling effect

سنأخذ الآن، عوضاً عن بئر الكمون المربع حاجز كمون مربع ارتفاعه U وندرس حالة اجتياز موجة مستقرة طاقتها $E < U$ لهذا الحاجز. إن هذا الاجتياز مستحيل في الميكانيك التقليدي لأنه يخرق مبدأ انحفاظ الطاقة وهو مبدأ عام ينطبق على كل أحداث الكون كما نعلم. ولكن مبدأ اللاتحديد لهايزنبرغ يجعله ممكناً. سنبين لاحقاً أن الطاقة والزمن يلعبان نفس الدور الذي يلعبه العزمان المترافقان $\vec{r}$ و $\vec{p}$ أي أن

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

وهكذا فإن الطاقة غير معينة من أجل فترات قصيرة جداً. إن إصدار النواة لجسيمات $\alpha$ التي تخترق حاجز الكمون الكهربائي الراكد للنواة مثال على ذلك. وبما أن قوانين الميكانيك الكمومي لم تكن واضحة بما فيه الكفاية لتفسير كل الأحداث على المستوى الذري والنووي فقد تصور الفيزيائيون وجود نفق، وجود ثقب في الحاجز يمر الجسيم عبره بحيث يبقى قانون انحفاظ الطاقة ساري المفعول.

ليكن لدينا إذاً حاجز كمون U عرضه d ولتكن $e^{ikx}$ موجة واردة من اليسار نحو الحاجز ولنرمز بـ $re^{-ikx}$ للموجة المرتدة، التي يعكسها الحاجز وبـ $te^{ik'x}$ للموجة التي اخترقت الحاجز ووصلت إلى المنطقة III، الشكل.5.




الشكل. 5

إن معادلة شرودينغر في المنطقتين I و III هي المعادلة '(2.7) وحلها العام من الشكل (2.10) حيث $k = k' = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. أخذنا سعة الموجة الواردة مساوية للواحد، $r^2$ هو احتمال انعكاسها و $t^2$ متناسب مع احتمال الاجتياز. لا يوجد في المنطقة III موجة مرتدة ولذا فالحل هو في الاتجاه الموجب فقط $te^{ikx}$ أما معادلة شرودينغر في المنطقة II فهي من الشكل "(2.7) وحلها من الشكل الزائدي (2.11) $\varphi(x) = b_1e^{\beta x} + b_2e^{-\beta x}$، حيث $\beta = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$. نقبل هنا كلا الحلين الأسيين لأنه لا توجد شروط تقارب في اللانهاية. علينا الآن حذف الثوابت $r$، $b_1$، $b_2$ انطلاقاً من الشروط على الحدود $x = 0$، $x = d$ لحساب معامل الانتقال إلى المنطقة III.

نطلق اسم معامل الانتقال على نسبة كثافة التيار المنتقل إلى كثافة التيار الوارد. كثافة التيار متناسبة مع $k$ وأخذنا هنا سعة الموجة الواردة مساوية للواحد وبالتالي فإن معامل الانتقال هو $t^2 = \frac{kt^2}{k}$.

لدينا في النقطة صفر من تساوي متجهتي الحالة على اليمين واليسار

$$\varphi(x)\big|_0 = 1 + r = (b_1 + b_2)$$

ومن تساوي مشتقيهما

$$\varphi'(x)\big|_0 = ik(1 - r) = \beta(b_1 - b_2)$$

الثابتتان $b_1$ و $b_2$ :

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}\left[1 + r + \frac{ik}{\beta}(1 - r)\right] \\ b_2 = \frac{1}{2}\left[1 + r - \frac{ik}{\beta}(1 - r)\right] \end{cases} \qquad (2.28)$$

ولدينا كذلك في النقطة $d$

$$\varphi(x)\big|_d = b_1e^{\beta d} + b_2e^{-\beta d} = te^{ikd}$$

$$\varphi'(x)\big|_d = \beta\left(b_1e^{\beta d} - b_2e^{-\beta d}\right) = itke^{ikd}$$

تعطينا هاتان المعادلتان $b_1$ و $b_2$ بدليل $t$ :

$$\begin{cases} b_1 = \frac{t}{2}\left(1 + \frac{ik}{\beta}\right)e^{ikd - \beta d} = \frac{t}{2}e^{ikd}\left(1 + \frac{ik}{\beta}\right)e^{-\beta d} \\ b_2 = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{ik}{\beta}\right)e^{ikd + \beta d} = \frac{t}{2}e^{ikd}\left(1 - \frac{ik}{\beta}\right)e^{\beta d} \end{cases} \qquad (2.29)$$

نحذف $r$ بين المعادلتين (2.28) و (2.29) للحصول على $t$. لدينا

$$b_1 + b_2 = 1 + r = \frac{t}{2}e^{ikd}\left\{\left(e^{-\beta d} + e^{\beta d}\right) + \frac{ik}{\beta}\left(e^{-\beta d} - e^{\beta d}\right)\right\}$$

$$b_1 - b_2 = \frac{ik}{\beta}(1 - r) = \frac{t}{2}e^{ikd}\left\{\left(e^{-\beta d} - e^{\beta d}\right) + \frac{ik}{\beta}\left(e^{-\beta d} + e^{\beta d}\right)\right\}$$

ومنه

$$2 = te^{ikd}\left(ch\beta d - \frac{ik}{\beta}sh\beta d - \frac{\beta}{ik}sh\beta d + ch\beta d\right)$$

و

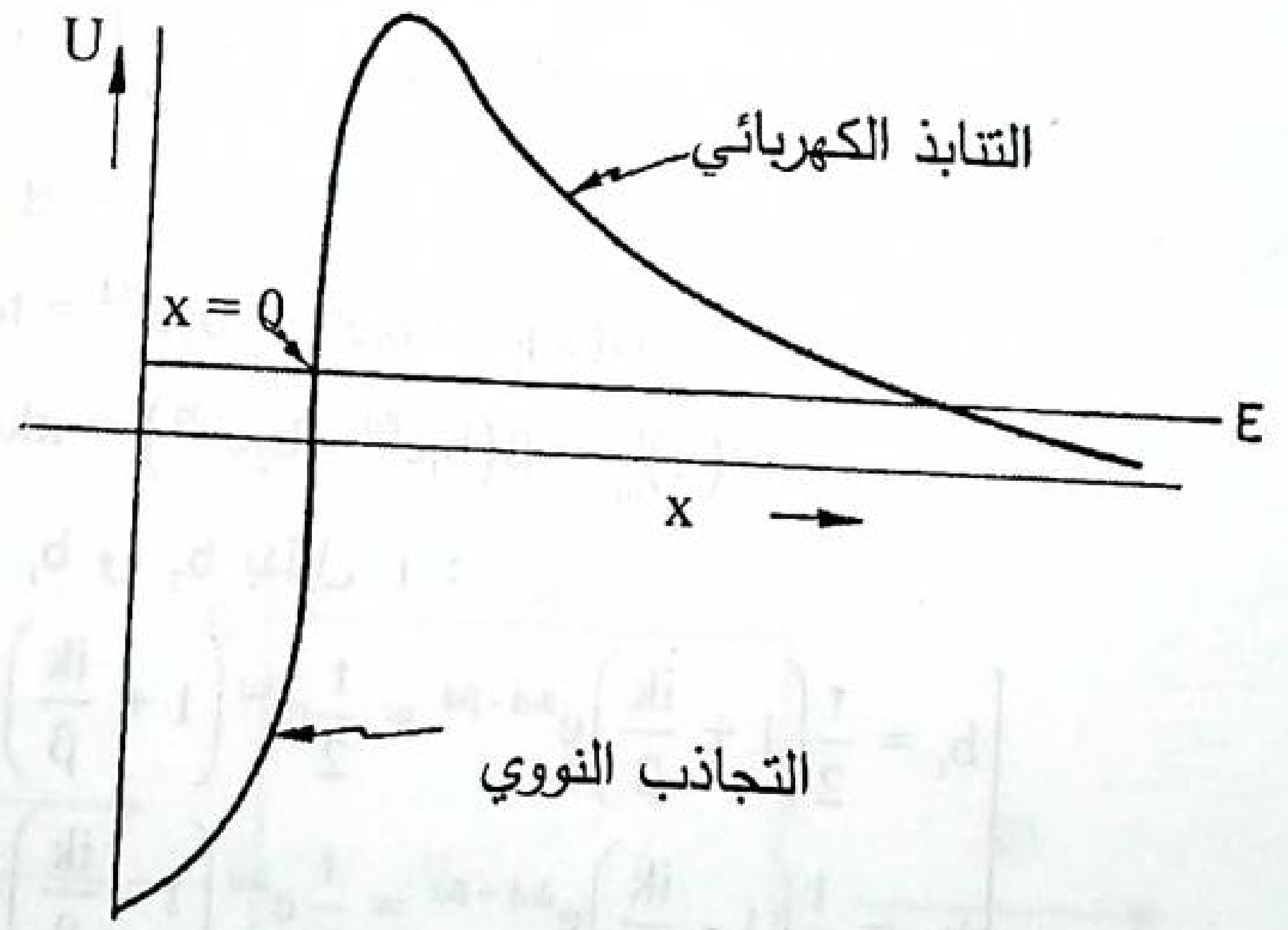
$$t = \frac{2ik\beta}{e^{ikd}\left[2ik\beta ch\beta d + \left(k^2 - \beta^2\right)sh\beta d\right]}$$

معامل الانتقال عبر حاجز الكمون هو بضرب $t$ بمرافقها العقدي

$$t^2 = t\bar{t} = \frac{4\beta^2k^2}{\left(k^2 - \beta^2\right)^2 sh^2\beta d + 4k^2\beta^2ch^2\beta d} \qquad (2.30)$$

$$= \frac{4\beta^2k^2}{\left(k^2 + \beta^2\right)^2 sh^2\beta d + 4k^2\beta^2}$$

أعطينا الإصدار $\alpha$ كمثال على اجتياز حاجز كمون. يخضع هذا الجسيم داخل النواة، على غرار البروتونات والنوترونات، إلى قوى جذب نووية شديدة تمنعه من الخروج منها. إلا أن هذه القوى قصيرة المدى ولذا فإن القوى الكهربائية الراكدة، قوى التنابذ بين شحنة النواة $Ze$ وشحنة الجسيم $\alpha$ $(2e)$ هي الأكثر فعالية اعتباراً من مسافة معينة : لنقل تحديداً نصف قطر النواة وتشكل حاجز كمون ارتفاعه $U$ ولكنه ليس على الشكل المثالي الذي حسبنا وفقه معامل الانتقال إنه من الشكل




لتكن $E$ طاقة الجسيم $\alpha$ عند وجوده على هذه المسافة. يمكننا تقدير معامل الانتقال بأخذ ما تفترضه الفيزياء النووية من حركة اهتزازية لـ $\alpha$ داخل النواة تبلغ سرعتها $10^7$ متراً /الثانية. ويصطدم بالحاجز

الذي يبعد عن مركز النواة $10^{-14}$ متراً (نصف قطر ذرة اليورانيوم) $10^{21}$ مرة في الثانية. يقدر عرض الحاجز $d$ بـ $3.10^{-14}$م و $U - E = 12MeV$.

**ملاحظة :**

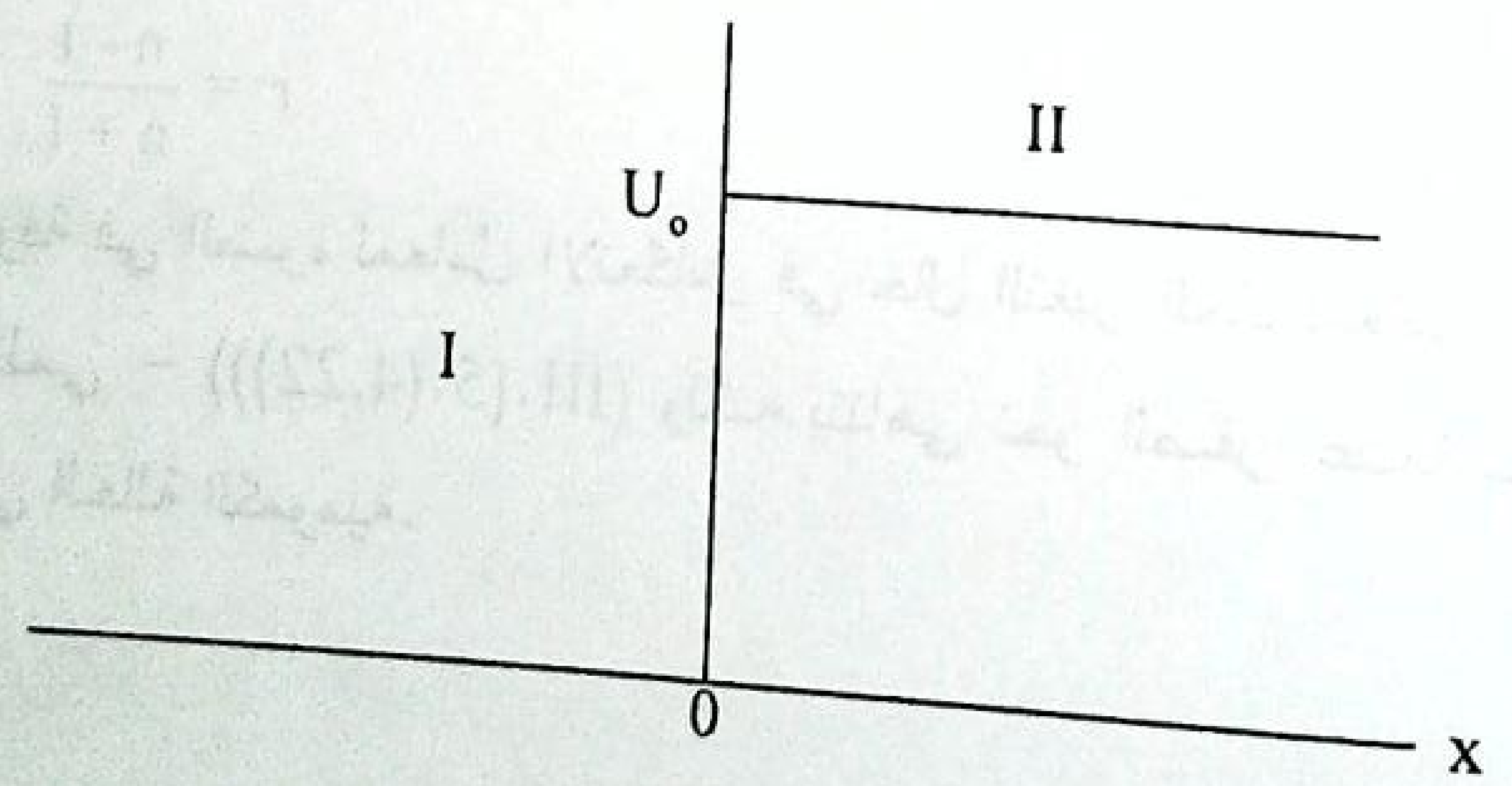
عندما تكون $E > U$ فإن الحل في المنطقة II حل جيبي. يمكننا في هذه الحالة تتبع الخطوات التي قمنا بها للحصول على معامل الانتقال باستبدال $i\beta = ik_1$ بـ $\beta$ وبالتالي الجيوب الزائدية بالجيوب العادية ولدينا في العلاقتين (2.28) و (2.29) $\frac{k}{k_1}$ عوضاً عن $\frac{ik}{\beta}$ بحيث تصبح العلاقة (2.30) على الشكل

$$t^2 = \frac{4k^2k_1^2}{\left(k^2 + k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1 d + 4k^2k_1^2\cos^2 k_1 d} = \frac{4k^2k_1^2}{\left(k^2 - k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1 d + 4k^2k_1^2} \qquad (2.30)'$$

## 5.2- قفزة الكمون

يقفز الكمون من المقدار $U = 0$ إلى المقدار $U_o$ في النقطة $x = 0$، الشكل. 6. ولننظر إلى الحالة التي تكون فيها طاقة الجسيم الوارد من اليسار $E > U_o$. معادلة شرودينغر هي من الشكل "(2.7) وحلها هو كحل المعادلة '(2.7) مع $k' = \frac{\sqrt{2m(E - U_o)}}{\hbar}$ من أجل $x > 0$ أما من أجل $x < 0$ فالحل هو توضيع موجة واردة نأخذ سعتها كما في الرقم السابق مساوية للواحد وموجة منعكسة سعتها $r$

$$\varphi(x) = e^{ikx} + re^{-ikx}$$




الشكل. 6

حيث $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. لنأخذ المشتق اللوغاريتمي لحساب احتمال الانعكاس :

$$\left.\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right|_{x=0^-} = \frac{ik(1-r)}{1+r} = ik'\Big|_{x=0^+}$$

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{k'}{k} = \left(\frac{E-U_o}{E}\right)^{1/2} \qquad (2.31)$$

ومنه

أي أن

$$r = \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U_o}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U_o}} \qquad (2.32)$$

على الدوام في الحالة التقليدية $r = 0$ أمام الحاجز بينما

$r$ عدد حقيقي مربعه هو احتمال انعكاس الجسيم

وتتطابق مع الحالة الكمومية من أجل $E >> U_o$.

أما إذا كانت طاقة الجسيم الوارد $E$ أصغر من $U_o$ $E < U_o$ فالحل عندئذ على شكل زائدي، نأخذ

الشكل $e^{-\beta x}$ حيث $\beta = \frac{\sqrt{2m(U_o - E)}}{\hbar}$. تأخذ المعادلة (2.31) الشكل

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{-\beta}{ik} = \frac{i\beta}{k} = \left(\frac{E-U_o}{E}\right)^{1/2}$$

حيث $(E-U_o)^{1/2}$ عدد تخيلي بحت وتبقى $r$ على الشكل (2.32) أي على الشكل $\frac{a-ib}{a+ib} = e^{-2i\theta}$ وقيمة

$r$ المطلقة $= 1$ : تنعكس الموجة الواردة كلياً.

لنلاحظ أخيراً من (2.32) أن $r \to -1$ عندما يتناهى حاجز الكمون إلى اللانهاية $U_0 \to \infty$. هذا

يعني أن $\varphi(x) = 0$ وهي حالة عامة كما رأينا.

يمكن مقارنة معامل الانعكاس $r$ مع نظيره في الضوء. لنلاحظ أن علاقة دوبري $p = \frac{h}{\lambda}$ تعين نسبة

عاملي الانكسار بين الوسطين I و II $\sqrt{\frac{E}{E-U_o}} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} = n$.

ومنه، بالتبديل في (2.32)

$$r = \frac{n-1}{n+1} \qquad (2.32)'$$

وهي العلاقة المعروفة في الضوء لمعامل الانعكاس في حال التغير الحاد لمعامل الانكسار النسبي على الحدود – ورود ناظمي – (((III.(5.(4.22 ولكنه يتناهى نحو الصفر عندما يحدث التغير تدريجياً.

ويصح هذا أيضاً في الحالة الكمومية.

## 3. الهزاز التوافقي

إن لنموذج الهزاز التوافقي أهمية بالغة في كل الفيزياء، ذلك أن الطاقة الكامنة تأخذ أبسط أشكالها فيه. فهي الحد الأول المختلف عن الصفر في نشر هذه الطاقة حول قيمتها الدنيا، نأخذها مساوية للصفر؛ لدينا من أجل $U$ ببعد واحد

$$U(x) = U(0) + x\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\frac{d^2U}{dx^2} + \dots$$

و $U(x)$ تساوي (نظراً لأن $U' = 0$) لـ $\frac{x^2}{2}\frac{d^2U}{dx^2}$ وهو مقدار موجب.

يمكن النظر إلى أي حركة دورية مرصودة عن بعد $X >> x$ كهزاز توافقي. إنها حركة ثنائي القطب المرصود عن بعد على سبيل المثال، وهي حركة جسيم مشدود إلى نابض حيث كتبنا القوة على الشكل $F = -kx$، المعدومة من أجل الاستطالة $x = 0$، والطاقة الكامنة على الشكل $\frac{m\omega^2x^2}{2}$ حيث $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$.

سنرى أيضاً أنه من الممكن اعتبار الحقل الكهرطيسي في كل نقطة من نقاط الفضاء كهزاز توافقي كمومي.

### 1.3 – معادلة شرودينغر للهزاز التوافقي ببعد واحد

سنكتب الطاقة الكامنة على الشكل

$$U(x) = \frac{m\omega^2x^2}{2} \qquad (3.1)$$

ومتجهات الحالة هي متجهات مستقرة بطاقات ثابتة ($U$ لا تتوقف مباشرة على الزمن) والطيف طيف منفصل : حالات مرتبطة. تأخذ معادلة شرودينغر (2.4) الشكل التالي

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)|\varphi_n(x)\rangle = E_n|\varphi_n(x)\rangle \qquad (3.2)$$

حيث $\varphi_n(x)$ هي متجهة الحالة – دالة الموجة المقابلة لمستوى الطاقة $E_n$. نعطي لهذه المعادلة شكلاً بسيطاً بإدخال المتغيرين التاليين بدون أبعاد

$$y = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x \quad ; \quad \varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega} \qquad (3.3)$$

# 3. الهزاز التوافقي

إن لنموذج الهزاز التوافقي أهمية بالغة في كل الفيزياء، ذلك أن الطاقة الكامنة تأخذ أبسط أشكالها فيه. فهي الحد الأول المختلف عن الصفر في نشر هذه الطاقة حول قيمتها الدنيا، نأخذها مساوية للصفر؛ لدينا من أجل $U$ ببعد واحد

$$U(x) = U(0) + x\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\frac{d^2U}{dx^2} + \dots$$

و $U(x)$ تساوي (نظراً لأن $U' = 0$) لـ $\frac{x^2}{2}\frac{d^2U}{dx^2}$ وهو مقدار موجب.

يمكن النظر إلى أي حركة دورية مرصودة عن بعد $X >> x$ كهزاز توافقي. إنها حركة ثنائي القطب المرصود عن بعد على سبيل المثال، وهي حركة جسيم مشدود إلى نابض حيث كتبنا القوة على الشكل $F = -kx$، المعدومة من أجل الاستطالة $x = 0$، والطاقة الكامنة على الشكل $\frac{m\omega^2x^2}{2}$ حيث $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$.

سنرى أيضاً أنه من الممكن اعتبار الحقل الكهرطيسي في كل نقطة من نقاط الفضاء كهزاز توافقي كمومي.

## 1.3– معادلة شرودينغر للهزاز التوافقي ببعد واحد

سنكتب الطاقة الكامنة على الشكل

$$U(x) = \frac{m\omega^2x^2}{2} \qquad (3.1)$$

ومتجهات الحالة هي متجهات مستقرة بطاقات ثابتة ($U$ لا تتوقف مباشرة على الزمن) والطيف طيف منفصل : حالات مرتبطة. تأخذ معادلة شرودينغر (2.4) الشكل التالي

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)|\varphi_n(x)\rangle = E_n|\varphi_n(x)\rangle \qquad (3.2)$$

حيث $\varphi_n(x)$ هي متجهة الحالة – دالة الموجة المقابلة لمستوى الطاقة $E_n$. نعطي لهذه المعادلة شكلاً بسيطاً بإدخال المتغيرين التاليين بدون أبعاد

$$\varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega} \quad ; \quad y = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x \qquad (3.3)$$

$$\left(y^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right)\varphi_n(y) = 2\varepsilon_n\varphi_n(y) \qquad (3.4)$$

سنكتب المؤثر التفاضلي $y^2 - \frac{d^2}{dy^2}$ على شكل خطي، على شكل جداء مؤثرين خطيين

$$y^2 - \frac{d^2}{dy^2} \equiv \left(y - \frac{d}{dy}\right)\left(y + \frac{d}{dy}\right) + I \equiv \left(\frac{d}{dy} + y\right)\left(\frac{d}{dy} - y\right) - I \qquad (3.5)$$

$I$ هو المؤثر الوحدة $Iu = u$. نبدل $\varphi_n(y)$؛ نتحقق من هاتين المتطابقتين بتطبيقهما على دالة $\varphi_n(y)$؛

$y^2 - \frac{d^2}{dy^2}$ في (3.4) بهذين المؤثرين لنجد أن

$$\left(y - \frac{d}{dy}\right)\left(y + \frac{d}{dy}\right)\varphi_n(y) = (2\varepsilon_n - 1)\varphi_n(y) \qquad (3.4)'_a$$

$$\left(y + \frac{d}{dy}\right)\left(y - \frac{d}{dy}\right)\varphi_n(y) = (2\varepsilon_n + 1)\varphi_n(y) \qquad (3.4)'_b$$

أي أن $\varphi_n(y)$ هي متجهة خاصة لهذين الجداءين بالقيمتين الخاصتين $2\varepsilon_n - 1$ و $2\varepsilon_n + 1$ على الترتيب. لنطبق الآن المؤثر $\left(y + \frac{d}{dy}\right)$ على المعادلة $(3.4)'_a$ لنجد أن

$$\left(y + \frac{d}{dy}\right)\left(y - \frac{d}{dy}\right)\left(y + \frac{d}{dy}\right)\varphi_n(y) = (2\varepsilon_n - 1)\left(y + \frac{d}{dy}\right)\varphi_n(y)$$

أي أن $\left(y + \frac{d}{dy}\right)\varphi_n(y)$ هو متجهة خاصة للمؤثر $\left(y + \frac{d}{dy}\right)\left(y - \frac{d}{dy}\right)$ – مؤثر المعادلة $(3.4)'_b$ وبالقيمة $2\varepsilon_n - 1$. هذا يعني أن المؤثر $y + \frac{d}{dy}$ قد خفض القيمة الخاصة من $2\varepsilon_n + 1$ إلى $2\varepsilon_n - 1$ من $2\left(\varepsilon_n + \frac{1}{2}\right)$ إلى $2\left(\varepsilon_n - \frac{1}{2}\right)$ : نقل الطاقة من المستوى $\varepsilon_n$ إلى المستوى $\varepsilon_n - 1$. سنقول عن مؤثرات من هذا النوع إنها مؤثرات إفناء Annihilation.

لنطبق الآن نفس المحاكمة بتطبيق المؤثر $\left(y - \frac{d}{dy}\right)$ على المعادلة $(3.4)'_b$

$$\left(y - \frac{d}{dy}\right)\left(y + \frac{d}{dy}\right)\left(y - \frac{d}{dy}\right)\varphi_n = (2\varepsilon_n + 1)\left(y - \frac{d}{dy}\right)\varphi_n$$

$\left(y - \frac{d}{dy}\right)\varphi$ هي متجهة خاصة للمؤثر $\left(y - \frac{d}{dy}\right)\left(y + \frac{d}{dy}\right)$ – مؤثر المعادلة $(3.4)'_a$ وبالقيمة الخاصة $2\varepsilon_n + 1$. وهكذا فالمؤثر $y - \frac{d}{dy}$ قد رفع القيمة الخاصة من $2\varepsilon_n - 1$ إلى $2\varepsilon_n + 1$، من $2\left(\varepsilon_n - \frac{1}{2}\right)$ إلى $2\left(\varepsilon_n + \frac{1}{2}\right)$ : نقل مستوى الطاقة من المستوى $\varepsilon_n$ إلى المستوى $\varepsilon_n + 1$. نقول عن مؤثرات من هذا النوع إنها مؤثرات إحداث Creation. ترينا المتطابقة (3.5) شكل المبادل بين هذين المؤثرين

$$\left[\left(y-\frac{d}{dy}\right),\left(y+\frac{d}{dy}\right)\right]=-2I \qquad (3.6)$$

لنرمز لمتجهة الحالة المقابلة للطاقة الدنيا، طاقة القاع بالرمز $\varphi_o(y)$. إن تطبيق مؤثر الفناء عليها – الذي يخفض قيمة الطاقة – يعطينا تعريفاً 0؛ لدينا إذاً

$$\left(y+\frac{d}{dy}\right)\varphi_o(y)=0 \qquad (3.7)$$

ومنها

$$\varphi_o(y)=e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad (3.8)$$

عندما نضع (3.7) في المعادلة $(3.4)'_a$ نجد أن

$$2\varepsilon_o-1=0$$

$$\varepsilon_o=\frac{1}{2} \qquad (3.9)$$

ومنه بقية الطاقات برفع $\varepsilon_o$ بالمقدار 1، 2،...

$$\varepsilon_o=\frac{1}{2}\text{ ، }\varepsilon_1=\frac{3}{2}\text{ ، }\dots\ \varepsilon_n=\frac{2n+1}{2}$$

وبالرجوع إلى العلاقة بين هذه الأعداد والطاقات في (3.3) نجد

$$E_o=\frac{1}{2}\hbar\omega\text{ ، }E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega\ \dots\text{ ، }E_n=\frac{(2n+1)}{2}\hbar\omega \qquad (3.10)$$

وهكذا نصل إلى أبرز علاقات مستويات الطاقة في الميكانيك الكمومي التي تبرر فرضية بلانك بتكميم الطاقة بفروق تساوي $n\hbar\omega=nh\nu$ والتي تبين في الوقت ذاته تصورنا لإشعاع الجسم الأسود كمجموعة من الهزازات التوافقية الكمومية.

لنلاحظ قبل متابعة هذه الدراسة أن حل معادلة شرودينغر (3.4) بدون طرف ثان هو من الشكل $e^{\pm\frac{y^2}{2}}$؛ والحل الزائدي المتزايد مرفوض لأنه متباعد في اللانهاية، لنلاحظ من جهة أخرى أن رفض الحل الزائدي المتزايد هو رفض المعادلة

$$\left(y-\frac{d}{dy}\right)\varphi=0$$

وهو حل مرفوض طبعاً لأن المؤثر $y-\frac{d}{dy}$ هو مؤثر إحداث ويستحيل أن نحصل منه على متجهة حالة مساوية للصفر. لدينا على الدوام

$$\left(y-\frac{d}{dy}\right)\varphi_n(y)=\varphi_{n+1}(y) \qquad (3.11)$$

وهي المعادلة التي تتيح لنا معرفة مختلف متجهات الموجة بالتدريج انطلاقاً من $\varphi_o$ :

$$\varphi_1(y)=\left(y-\frac{d}{dy}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}=2ye^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\varphi_2(y) = \left(y - \frac{d}{dy}\right)\left(2ye^{-\frac{y^2}{2}}\right) = \left(4y^2 - 2\right)e^{-\frac{y^2}{2}}$$

إن $\varphi_1$ هي دالة خطية بـ $y$ مضروبة بـ $e^{-\frac{y^2}{2}}$ وبالتالي فإن $\varphi_2$ هي دالة من الدرجة الثانية بـ $y$ مع ذات المضروب الأسي.. وهكذا فإن $\varphi_n$ هو جداء $e^{-\frac{y^2}{2}}$ بكثير حدود من الدرجة $n$ معامل الحد الأول فيه $y^n$ هو $2^n$. وعندما نكتب

$$\varphi_n(y) = H_n(y)e^{-\frac{y^2}{2}} \tag{3.12}$$

ونبدلها في المعادلة (3.4) نجد المعادلة التفاضلية التي تخضع لها كثيرات الحدود $H_n(y)$ :

$$H_n''(y) - 2yH_n' + 2nH_n = 0 \qquad (3.13)_1$$

## 2.3- كثيرات حدود هيرميت Hermite

لا يوجد للمعادلة السابقة حل إلا إذا كان $n$ موجباً. لا يعنينا حلها هنا بقدر ما يهمنا إعطاء الشكل العام لكثير حدود هيرميت $H_n$ الذي يعين دالة الموجة $\varphi_n(y)$ ومن ثم إعطاء قاعدة للفضاء الهيلبرتي الذي تشكله المتجهات الخاصة للهزاز التوافقي : إنه أول إنجاز فعلي لفضاء هيلبرت.

رأينا أننا نحصل على كثير الحدود هذا بالاشتقاق المتواصل لـ $e^{-\frac{y^2}{2}}$ حسب العلاقة (3.11) ولذا فإن $H_n$ متناسب مع $\frac{d^n}{dy^n}e^{-\frac{y^2}{2}}$ ومعرف بالعلاقة التالية

$$H_n = (-1)^n e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2} \tag{3.14}$$

تخضع الدالة $\chi_n(y) = \frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}$ إلى المعادلة التفاضلية التالية

$$\chi_n'' + 2y\chi_n' + (2n+1)\chi_n = 0 \qquad (3.13)_2$$

ذلك أن

$$\frac{d\chi_n}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}\right) = \frac{d^n}{dy^n}\left(\frac{d}{dy}e^{-y^2}\right) = \frac{d^n}{dy^n}\left(-2ye^{-y^2}\right)$$

وبتطبيق قاعدة لايبنيز في الاشتقاق $n$ مرة لجداء، حيث لا يبقى في نشر ثنائي الحد هنا إلا حدان، نجد

$$\frac{d\chi_n}{dy} = -2y\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2} - 2n\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}e^{-y^2} \qquad (3.13)_3$$

ونحصل باشتقاق هذه المعادلة مرة ثانية على $(3.13)_2$.

نشتق (3.14) آخذين بعين الاعتبار $(3.13)_3$ لنجد أن

$$H_n'(y) = 2nH_{n-1} \qquad (3.14)'$$

ومنها

$$\frac{d^n}{dy^n}H_n(y) = 2^n n!$$

لدينا من جهة أخرى علاقة الاستدلال الرجعي التالية انطلاقاً من (3.14)

$$H_n' = -2yH_n + (-1)e^{y^2}\frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}}e^{-y^2}$$

أي

$$\left(2y - \frac{d}{dy}\right)H_n = H_{n+1}$$

أو بأخذ '(3.14) بعين الاعتبار

$$2yH_n = 2nH_{n-1} + H_{n+1} \quad (3.14)''$$

وبالتالي فإن متجهات القاعدة في الفضاء الهيلبرتي معرفة بالعلاقة

$$\varphi_n(y) = C\,H_n(y)e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (3.15)$$

حيث $C$ ثابتة التنظيم تحددها العلاقة $\langle\varphi_n(y)|\varphi_n(y)\rangle = 1$.

إن كثيرات الحدود الأولى، انطلاقاً من علاقة التعريف هي

$$H_o = 1$$

$$H_1 = 2y$$

$$H_2 = 4y^2 - 2$$

$$H_3 = 8y^3 - 12y$$

$$H_4 = 16y^4 - 48y^2 + 12$$

$$H_5 = 32y^5 - 160y^3 + 120y$$

$$\vdots$$

والتي يمكننا الحصول عليها، كما فعلنا من أجل كثيرات الحدود الثلاث الأولى، بالاشتقاق المتوالي لـ $\frac{d}{dy} - y$. ونتحقق من جديد أن معامل $y^n$ هو $2^n$.

لنبدأ بحساب التكامل

$$I = C^2\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y)H_m(y)e^{-y^2}dy = \langle\varphi_n(y)|\varphi_m(y)\rangle \quad (3.16)$$

ولنكتب $H_m$ انطلاقاً من علاقة التعريف (3.14)

$$I = C^2\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y)(-1)^m\frac{d^m e^{-y^2}}{dy^m}dy$$

ولنكامل بالتجزئة

$$= C^2\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m H_n(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}e^{-y^2}\right)dy$$

$$= C^2\left[(-1)^m H_n\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - C^2\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m H_n'\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}e^{-y^2}dy$$

$$\frac{d^n}{dy^n}H_n(y) = 2^n n!$$

لدينا من جهة أخرى علاقة الاستدلال الرجعي التالية انطلاقاً من (3.14)

$$H_n' = -2yH_n + (-1)e^{y^2}\frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}}e^{-y^2}$$

أي

$$\left(2y - \frac{d}{dy}\right)H_n = H_{n+1}$$

أو بأخذ '(3.14) بعين الاعتبار

$$2yH_n = 2nH_{n-1} + H_{n+1} \qquad (3.14)''$$

وبالتالي فإن متجهات القاعدة في الفضاء الهيلبرتي معرفة بالعلاقة

$$\varphi_n(y) = C\,H_n(y)e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad (3.15)$$

حيث C ثابتة التنظيم تحددها العلاقة $\langle\varphi_n(y)|\varphi_n(y)\rangle = 1$.

إن كثيرات الحدود الأولى، انطلاقاً من علاقة التعريف هي

$$H_o = 1$$

$$H_1 = 2y$$

$$H_2 = 4y^2 - 2$$

$$H_3 = 8y^3 - 12y$$

$$H_4 = 16y^4 - 48y^2 + 12$$

$$H_5 = 32y^5 - 160y^3 + 120y$$

$$\vdots$$

والتي يمكننا الحصول عليها، كما فعلنا من أجل كثيرات الحدود الثلاث الأولى، بالاشتقاق المتوالي لـ $\frac{d}{dy} - y$. ونتحقق من جديد أن معامل $y^n$ هو $2^n$.

لنبدأ بحساب التكامل

$$I = C^2\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(y)H_m(y)e^{-y^2}dy = \langle\varphi_n(y)|\varphi_m(y)\rangle \qquad (3.16)$$

ولنكتب $H_m$ انطلاقاً من علاقة التعريف (3.14)

$$I = C^2\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(y)(-1)^m\frac{d^m e^{-y^2}}{dy^m}dy$$

ولنكامل بالتجزئة

$$= C^2\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m H_n(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}e^{-y^2}\right)dy$$

$$= C^2\left[(-1)^m H_n\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - C^2\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m H_n'\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}e^{-y^2}dy$$

إن الجزء المكامل يساوي الصفر لأنه جداء كثير حدود بالدالة الأسية $e^{-y^2}$ .
ولنكرر العملية m مرة، فإذا كانت m مختلفة عن n $(m < n)$ فإن الجزء المكامل هذه المرة هو

$$C^2\left[(-1)^{2m} H_n^{(m)} e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

حيث $(m)$ ترمز للمشتق ذي الرقم m .

وبالتالي فإن

$$\langle \varphi_n(y) | \varphi_m(y) \rangle = 0 \qquad m \neq n$$

أما إذا كان $n = m$ فالنتيجة هي

$$C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{2n} \frac{d^n H_n}{dy^n} e^{-y^2} dy$$

ولكن $\frac{d^n H_n}{dy^n} = 2^n n!$ كما رأينا والتكامل

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

لدينا إذاً، عندما ننظم $|\varphi_n(y)\rangle$ للواحد

$$\langle \varphi_n(y) | \varphi_n(y) \rangle = C^2 2^n n! \sqrt{\pi} = 1$$

ومنه

$$C = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi^{1/4}}} \qquad (3.17)$$

وبالعودة إلى x نجد بأخذ التكاملات أعلاه بـ $dx = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} dy$

$$\langle \varphi_n(x) | \varphi_n(x) \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \langle \varphi_n(y) | \varphi_n(y) \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$$

أي أن $\varphi_n(x)$ المنظمة للواحد، هي بالنظر لـ (3.15) و (3.17)

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/4} \varphi_n(y) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\right] \qquad (3.18)$$

$$\langle \varphi_n(x) | \varphi_m(x) \rangle = \delta_{nm} \qquad (3.19)$$

تخضع المتجهات الخاصة

$$|\psi_n(x,t)\rangle = e^{-i\frac{2n+1}{2}\omega t} |\varphi_n(x)\rangle$$

إلى نفس علاقات التعامد؛ وننشر أي متجهة $\psi(x,t)$ بدليل عناصر القاعدة هذه على الشكل

$$|\psi(x,t)\rangle = \alpha_n e^{-i\frac{2n+1}{2}\omega t} |\varphi_n(x)\rangle$$

**ملاحظات :**

1- إنه من المستحيل إنشاء فضاء هيلبرتي قاعدته مؤلفة من كثيرات الحدود (أو من الدالات المثلثاتية) لأنها غير ذات مربع جموع ولكن ضرب كثير الحدود بدالة أسية متناقصة يجعل من الجداء الناتج دالة تتناقص بسرعة في اللانهاية والمربع جموع كما رأينا. ولكي نتأكد من كون المتجهات من الشكل $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ $n = 0,1,2...$ تشكل قاعدة للفضاء الهيلبرتي أي من كون النظمة تامة (انظر الفصل الخامس)، يجب أن نبين أنه في حال فرضنا وجود دالة $f(x)$ عمودية على هذه النظمة فإنها تساوي الصفر حتماً. ليكن إذاً

$$\left\langle x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \middle| f(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

نأخذ تحويل فوريي لـ $e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\, e^{ikx} dx$$

إن التناقص السريع لـ $e^{-\frac{x^2}{2}}$ يخولنا تمديد $g(k)$ إلى المستوى العقدي $z = k \in \mathbb{C}$ ولدينا المشتقات المتتالية لـ $g(z)$

$$g^{(n)}(z) = \int e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) (ix)^n dx$$

هذا المشتق يساوي الصفر نظراً للعلاقة (1) وبالتالي فإن $g(z)$ يساوي الصفر ومنه $f(x)$ يساوي الصفر حيثما كان تقريباً لأن تكامله يساوي الصفر وهو المطلوب.

2- يمكننا البرهان بطريقة أخرى، قد تكون معبرة بشكل أفضل، عن كون نظمة كثيرات حدود هيرميت تامة وذلك بأن نكتب الشكل العام للمعادلة التفاضلية التي يحققها $H$ حسب (3.4) و(3.13)

$$H''(y) - 2yH' + (\lambda - 1)H = 0 \quad (2)$$

والبرهان على عدم وجود أي حل منتظم لهذه المعادلة إذا لم يحقق الشرط

$$\lambda = 2\varepsilon_n - 1 = 2n$$

لنأخذ كحل تجربة لهذه المعادلة

$$H = \sum_p a_p y^p \quad (3)$$

يجب أن يكون $p > 0$ لتجنب الحلول الشاذة من أجل $y = 0$. يمكن للحل أن يكون زوجياً أو فردياً لأن الكمون زوجي، أي أن الحل هو من الشكل

$$H = \sum_{p\ \text{زوجي}} a_p y^p + \sum_{p\ \text{فردي}} a_p y^p \quad (4)$$

نحصل بوضع هذا الحل في (2) ومقارنة أمثال $y^{p-2}$ على

$$a_p \cdot p(p-1) + a_{p-2}\left[-2(p-2) + \lambda - 1\right] = 0 \quad (5)$$

**ملاحظات :**

1- إنه من المستحيل إنشاء فضاء هيلبرتي قاعدته مؤلفة من كثيرات الحدود (أو من الدالات المثلثاتية) لأنها غير ذات مربع جموع ولكن ضرب كثير الحدود بدالة أسية متناقصة يجعل من الجداء الناتج دالة تتناقص بسرعة في اللانهاية والمربع جموع كما رأينا. ولكي نتأكد من كون المتجهات من الشكل $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ $n = 0,1,2...$ تشكل قاعدة للفضاء الهيلبرتي أي من كون النظمة تامة (انظر الفصل الخامس)، يجب أن نبين أنه في حال فرضنا وجود دالة $f(x)$ عمودية على هذه النظمة فإنها تساوي الصفر حتماً. ليكن إذاً

$$\left\langle x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \middle| f(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) dx = 0 \qquad (1)$$

نأخذ تحويل فوريي لـ $e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\, e^{ikx} dx$$

إن التناقص السريع لـ $e^{-\frac{x^2}{2}}$ يخولنا تمديد $g(k)$ إلى المستوى العقدي $z = k \in \mathbb{C}$ ولدينا المشتقات المتتالية لـ $g(z)$

$$g^{(n)}(z) = \int e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)(ix)^n\, dx$$

هذا المشتق يساوي الصفر نظراً للعلاقة (1) وبالتالي فإن $g(z)$ يساوي الصفر ومنه $f(x)$ يساوي الصفر حيثما كان تقريباً لأن تكامله يساوي الصفر وهو المطلوب.

2- يمكننا البرهان بطريقة أخرى، قد تكون معبرة بشكل أفضل، عن كون نظمة كثيرات حدود هيرميت تامة وذلك بأن نكتب الشكل العام للمعادلة التفاضلية التي يحققها $H$ حسب (3.4) و(3.13)

$$H''(y) - 2yH' + (\lambda - 1)H = 0 \qquad (2)$$

والبرهان على عدم وجود أي حل منتظم لهذه المعادلة إذا لم يحقق الشرط

$$\lambda = 2\varepsilon_n - 1 = 2n$$

لنأخذ كحل تجربة لهذه المعادلة

$$H = \sum_p a_p y^p \qquad (3)$$

يجب أن يكون $p > 0$ لتجنب الحلول الشاذة من أجل $y = 0$. يمكن للحل أن يكون زوجياً أو فردياً لأن الكمون زوجي، أي أن الحل هو من الشكل

$$H = \sum_{p\ \text{زوجي}} a_p y^p + \sum_{p\ \text{فردي}} a_p y^p \qquad (4)$$

نحصل بوضع هذا الحل في (2) ومقارنة أمثال $y^{p-2}$ على

$$a_p \cdot p(p-1) + a_{p-2}\left[-2(p-2) + \lambda - 1\right] = 0 \qquad (5)$$

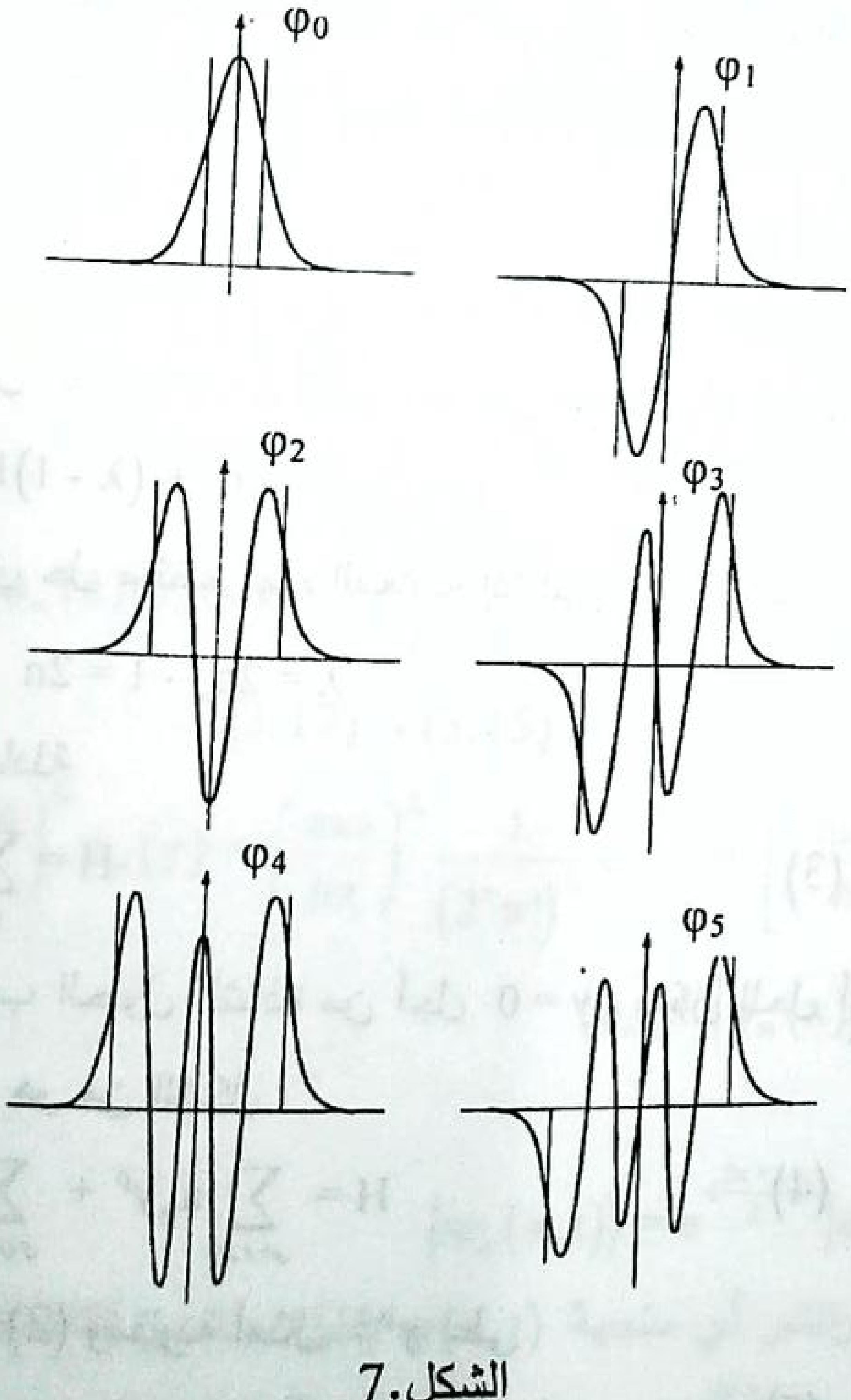
يجب أن يتوقف كثير الحدود عند حد $p_{max} = n$. نأخذ $p = n + 2$ في العلاقة السابقة لنحصل على $\lambda = 2n + 1$.

3- كتبنا المبادل بين مؤثري الإفناء والإحداث بدليل $2\varepsilon_n$ أي بدليل $2n + 1$. وعندما ننتقل بين $n + 1$ و $n$ أي أننا نرفع الطاقة أو نخفضها بين $n$ و $n + 1$ ولذا نكتب العلاقة (3.6) بدليل $n$ على الشكل $2(n + 1)$ و $2(n)$ أي بين $(2\varepsilon_n + 1)$ و $(2\varepsilon_n - 1)$ فإننا ننتقل بين

$$\left[a^{\dagger}, a\right] = -I \qquad (3.6)'$$

حيث رمزنا بـ $a^{\dagger}$ لمؤثر الإحداث و $a$ مؤثر الإفناء. وهما مؤثران مترافقان كما سنرى.

4- بينا في الشكل. 7 دالات موجة الهزاز التوافقي الست الأولى. نرى كالمعتاد أن $\varphi_0$ بدون عقد – لا توجد نقطة انعدام لـ $\varphi_0$ – و $\varphi_1$ بعقدة واحدة، $\varphi_2$ بعقدتين، الخ. هذه العقد هي حلول كثيرات الحدود 1، $2y$، $4y^2 - 2$، الخ. ويبدو من هذا الرسم وكأن الجسيم ينعكس بين حائطي كمون الهزاز $\frac{m\omega^2 x^2}{2}$.




الشكل.7

5- إن المعادلة التفاضلية (3.13) التي تحققها كثيرات حدود هيرميت هي من النوع العام

$$\sum_{m=0}^{m}\left(a_m + b_m x\right)\frac{d^m y}{dx^m} = 0$$

الذي يحل بطريقة لابلاس : انظر على سبيل المثال كتاب سميرنوف المترجم إلى العربية : دروس الرياضيات العليا، الجزء الثاني من المجلد الثالث.

6- ننشر أي متجهة منظمة في الفضاء الهيلبرتي $\psi(y)$ بدليل المتجهات القاعدية المتعامدة $\varphi_n(y)$ المعطاة في (3.15)

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(y) e^{-y^2/2}$$

حيث $C_n$ معطاة بالعلاقة (3.17)؛ وبما أن متجهة الموجة متصلة فإن

$$\langle\psi(y)|\psi(y_o)\rangle = \delta(y - y_o) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 H_n(y) H_n(y_o) e^{-(y^2 + y_o^2)}$$

وهو أول تعبير عن "دالة" ديراك كسلسلة لامنتهية من العناصر (من كثيرات الحدود مضروبة بدالة أسية تضمن تناهيها نحو الصفر من أجل المتغير $y \to \infty$).

## 3.3- معادلة شرودينغر بالتمثيل P

أشرنا منذ البداية إلى العلاقة بين العزمين المترافقين، الوضع ورمزنا له بـ q والاندفاع الخطي ورمزنا له بـ p كتبنا المبادل بينهما $[p_i, q^i] = \frac{\hbar}{i}\delta_j^i$ ((3.5).1) وقلنا إنه في حال توصيف الوضع q بالعدد q فإن $p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$. سنطلق على تمثيل المؤثرين على هذا الشكل اسم التمثيل Q. أما في حال تمثيل الاندفاع بالعدد p فإن $q = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$. يطلق على هذا التمثيل اسم التمثيل P.

لنكتب معادلة شرودينغر من أجل الحالات المستقرة

$$\left[\frac{p^2}{2m} + U(x)\right]|\psi\rangle = H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

وفي حالة الهزاز التوافقي وفي التمثيل Q المعادلة (3.2) التي استنتجنا منها الشكل (2.4)؛ وهو

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x) \qquad (3.2)_Q$$

أما في التمثيل P فإنها ستأخذ الشكل التالي

$$\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dp^2}\right)\varphi_n(p) = E_n\varphi_n(p) \qquad (3.2)_P$$

حيث كتبنا المتجهات الخاصة لـ $E_n$ على الشكل $\varphi_n(p)$ بدليل المتغير P.

لا تختلف هاتان المعادلتان عن بعضهما إلا باختيار معاملي المتغيرين الجديدين. نقوم هنا كما في حال (3.2)Q بإعطاء المعادلة شكلاً بسيطاً بإدخال المتغيرين الجديدين

$$y = \frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}} \quad ; \quad \varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega} \qquad (3.3)_P$$

بحيث تصبح المعادلة (3.2)P على الشكل

$$\frac{m\omega\hbar}{m}\left(\frac{p^2}{m\omega\hbar} - m\omega\hbar\frac{d^2}{dp^2}\right)\varphi(p) = 2E_n\varphi(p)$$

أي

$$\left(y^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right)\varphi(y) = 2\varepsilon_n\varphi(y) \qquad (3.4)$$

ولا تختلف النتيجة التي نحصل عليها إلا باختلاف التنظيم حيث لدينا هنا

$$\langle\varphi_n(p)|\varphi_n(p)\rangle = \sqrt{m\omega\hbar}\,\langle\varphi_n(y)|\varphi_n(y)\rangle = \sqrt{m\omega\hbar}$$

ومنه

$$\varphi_n(p) = \frac{1}{(m\omega\hbar)^{1/4}}\varphi_n(y) = \frac{1}{(m\omega\hbar\pi)^{1/4}} \cdot \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}} e^{-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}} H_n\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right) \qquad (3.18)_P$$

وبالتالي فإن كثافة الاحتمال في فضاء الاندفاعات بالبعد الواحد وحيث الجداء هو $\frac{1}{2\pi\hbar}|\varphi_n(p)|^2$ حسب (1.23) المكتوبة بثلاثة أبعاد

$$|\varphi_n(p)|^2\frac{dp}{2\pi\hbar} = \frac{1}{(m\omega\hbar\pi)^{1/2}}\frac{1}{2^n n!}e^{-\frac{p^2}{m\omega\hbar}}H_n^2\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)dp \qquad (3.20)$$

لنلاحظ أنه كان بإمكاننا الوصول إلى هذه النتيجة باللجوء إلى تحويلات فوريي وكتابة $\varphi(p)$ كما في $(1.22)'$: $\varphi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\varphi_n(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}px}dx$ ؛ $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\varphi_n(p)\,e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$ حيث $\varphi_n(p)$ هي المتجهات الخاصة للمؤثر $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ وتأخذ القيم الخاصة $p$. إنها الطريقة العامة ولكننا فضلنا هنا، في حالة الهزاز التوافقي، استعمال معادلة شرودينغر مباشرة – في التمثيل P – نظراً لبساطتها.

## 4.3- طريقة المصفوفات[5]

تعتمد هذه الطريقة على مبدأ التقابل بين الميكانيك التقليدي والميكانيك الكمومي ومبدأ النظر إلى المقادير الفيزيائية كمؤثرات $A$ ذاتية الترافق $A = A^\dagger = \bar{A}$ أي كمصفوفات، عندما نعين قاعدة ما في الفضاء الهيلبرتي، يتساوى فيها عناصر سطر ما مع المرافق العقدي لعناصر العمود المقابل $\bar{A}_{nm} = A_{mn}$.

ننظر إذاً إلى معادلة الهزاز التوافقي التقليدية

$$mx'' = -\nabla U = -m\omega^2 x$$

أو

$$x'' + \omega^2 x = 0 \qquad (3.21)$$

كمعادلة بين عناصر المصفوفة $x''$ وعناصر المصفوفة $x$. لنذكر أن تطبيق مؤثر $A$ على عنصر من عناصر القاعدة ولنرمز له بـ $|n\rangle$ هو العمود $n$ : $A_{mn}|m\rangle$ وبالتالي فإن جداء هذه المتجهة بالمتجهة $\langle m|$ هو عنصر المصفوفة $A_{mn}$ :

$$A_{mn} = \langle m|A|n\rangle \qquad (3.22)$$

سنفرض عناصر القاعدة متعامدة، وهو ممكن التحقيق دوماً بتطبيق طريقة تعرف باسم طريقة تعامد شميت، وأنها منظمة للواحد $\langle n|n\rangle = 1$.

رأينا أن متجهات الحالة المستقرة $e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle = |\psi_n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\varphi_n(x)$ هي متجهات قاعدة متعامدة وبينا كيف يمكن تنظيمها لتساوي الواحد $\langle\varphi_n(x)|\varphi_n(x)\rangle = 1$. لدينا والحالة هذه من أجل مؤثر ما تابع للزمن $A(t)$ يطبق على متجهات الحالة المستقرة

$$A_{mn}(t) = \langle\psi_m|A|\psi_n\rangle = \langle\varphi_m(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}|A\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\varphi_n(x)\rangle$$
$$= e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t}\langle m|A|n\rangle \qquad (3.23)$$

ومنه مشتق المؤثر $A$ بالنسبة للزمن حسب ((1.(3.3)) وحسب المبدأ الثالث ((1.(2.17))

$$<\frac{dA}{dt}> = \frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{d}{dt}\sum_{m,n}A_{mn}(t)$$

ومن (3.23)

$$\sum_{m,n}A'_{mn}(t) = \sum_{m,n}\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)A_{mn}(t)$$

[5] وهي الطريقة التي استعملها هايزنبرغ عام 1925 قبيل اكتشاف معادلة شرودينغر.

أي أن

$$\begin{cases} A'_{mn}(t) = \frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)A_{mn}(t) \\ = i\omega_{mn}A_{mn}(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

حيث سمينا المقدار

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} \quad (3.25)$$

وبتكرار الاشتقاق مرة ثانية نجد

$$A''_{mn}(t) = -\omega^2_{mn}A_{mn}(t) \quad (3.26)$$

لنطبق هذه المتطابقة على المؤثر $x''$ في (3.21) لتأخذ الشكل المصفوفي التالي

$$-\omega^2_{mn}x_{mn} + \omega^2 x_{mn} = 0$$

$$(\omega^2 - \omega^2_{mn})x_{mn} = 0 \quad (3.27)$$

تعني هذه العلاقة أن عناصر المصفوفة $x$، $x_{mn}$ تساوي الصفر إلا إذا كان القوس $\omega^2 - \omega^2_{mn}$ يساوي الصفر: $\omega_{mn} = \pm\omega$. سنختار ترقيم أعمدة المصفوفة $\omega_{mn}$ بحيث يقابل $\omega_{n,n+1}$ المقدار $-\omega$ و $\omega_{n,n-1}$ المقدار $\omega$ :

$$\omega_{n,n\pm1} = \mp\omega \quad (3.27)'$$

هذا يعني أن عناصر المصفوفة $x$ المختلفة عن الصفر هي العناصر من الشكل $x_{n,n\pm1}$. لنحسب هذه العناصر بأن نأخذ قاعدة حقيقية للفضاء الهيلبرتي $|\psi_n\rangle \in R$ بحيث تأخذ ذاتية الترافق الشكل $A = \tilde{A}$ أي في حال المؤثر $x$

$$x_{mn} = x_{nm}$$

وجدنا في (1.20) أن مؤثر السرعة هو $\frac{\bar{p}}{m}$. ولما كان $[p, q] = \frac{\hbar}{i}$ فإن

$[x', x] = \frac{\hbar}{im}I$ حيث $I$ هي المصفوفة الأحدية

وبتبديل $x'$ بقيمتها في (3.24) التي تبين أن عناصر $x'$ الوحيدة المختلفة عن الصفر هي حسب (3.27)'

$$\begin{cases} x'_{n,n+1} = -i\omega x_{n,n+1} \\ x'_{n,n-1} = i\omega x_{n,n-1} \end{cases} \quad (3.28)$$

نحصل على العناصر $mn$ في المبادل وبصورة خاصة على العنصر $nn$ المختلف عن الصفر

$$\frac{\hbar}{im} = x'_{n,n+1}x_{n+1,n} + x'_{n,n-1}x_{n-1,n} - x_{n,n+1}x'_{n+1,n} - x_{n,n-1}x'_{n-1,n}$$

$$= (x_{n+1,n})[x'_{n,n+1} - x'_{n+1,n}] - (x_{n,n-1})[x'_{n-1,n} - x'_{n,n-1}]$$

حيث استعملنا تساوي المصفوفة $x$ مع منقولها. أما المعقوفة الأولى فهي $-2i\omega x_{n+1,n}$ والثانية كذلك $-2i\omega x_{n,n-1}$ ومنه

$$(x_{n+1,n})^2 - (x_{n,n-1})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \qquad (3.29)$$

وهي متتالية عددية لا حد أعلى لها – وهذا غير غريب فالمصفوفة لامتناهية، ولكن لها حد أدنى لأنها لا تحتوي إلا على حدود موجبة. نختار الترقيم $n = 0$ لتعيين طاقة القاع – الطاقة الدنيا للهزاز. هذا يعني أن $0 = x_{0,-1}$ وبالتالي فإن $(x_1)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ ومنه كل حدود المتتالية

$$(x_{n,n-1})^2 = \frac{n\hbar}{2m\omega} \qquad (3.30)$$

$$x_{n,n-1} = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \qquad (3.30)'$$

$$= x_{n-1,n}$$

هذا يعني أن العناصر الوحيدة المختلفة عن الصفر هي تلك الواقعة على يمين ويسار القطر مباشرة. وتأخذ $x$ الشكل التالي

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0\ldots \\ \vdots \end{vmatrix}$$

حيث ابتدأنا بالعمود صفر والسطر صفر.

لنحسب أخيراً القيم الخاصة للهاميلتوني $H$، أي لنكتب المؤثر $H$ على شكل قطري. إن $H$ هو

$$H = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

$$E_n = H_{nn} = \frac{1}{2}m\left(x'^2\right)_{nn} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2\right)_{nn}$$

مع الملاحظة أن $x^2$ و $x'^2$ ليستا قطريتين

$$= \frac{1}{2}m\left(x'_{n,n+1}x'_{n+1,n} + x'_{n,n-1}x'_{n-1,n} + \omega^2\left(x_{n,n+1}x_{n+1,n} + x_{n,n-1}x_{n-1,n}\right)\right)$$

وبالعودة إلى (3.28) و (3.30) نجد

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\left(2x^2_{n+1,n} + 2x^2_{n,n-1}\right)$$

$$= m\omega^2\left[\frac{(n+1)\hbar}{2m\omega} + \frac{n\hbar}{2m\omega}\right]$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega$ هي طاقة القاع.

وهكذا نكون قد حصلنا على كل النتائج التي وصلنا إليها عن طريق حل معادلة شرودينغر التفاضلية وهكذا فالتمثيلان، تمثيل شرودينغر وتمثيل هايزنبرغ يوصفان بشكل كامل الميكانيك الكمومي أي الميكانيك الموجي أو ميكانيك المصفوفات.

# الفصل الثالث

## العزم الزاوي المداري والسبتن

1- العزم الزاوي المداري .............................. 101

2- الحركة في حقل مركزي .......................... 122

3- الحركة في حقل كولومبي –ذرة الهدروجين 131

4- العزم الزاوي الداخلي (الصميمي) – السبين . 141

# 1. العزم الزاوي المداري

## 1.1- علاقات المبادلة

إن العزم الزاوي في الفيزياء التقليدية هو الجداء المتجهي $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ حيث $\vec{r}$ هو وضع الجسيم (النقطة المادية) بالنسبة لنقطة O اتخذت مبدأ لقياس الأطوال و $\vec{p}$ العزم الخطي – الاندفاع – لهذا الجسيم؛ وعندما تتألف الجملة المادية من عدد من النقاط، الجسيمات، فإن العزم الزاوي في O هو مجموع العزوم الزاوية لمختلف جسيمات الجملة المادية في هذه النقطة

$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n$$

سنعرف العزم الزاوي الكمومي اعتماداً على التقابل في التمثيل Q، في التمثيل الذي نعتبر فيه مؤثر المقدار الفيزيائي الوضع $\vec{r}$ هو الدالة التي تعين هذا الوضع ومؤثر المقدار الفيزيائي الآخر، الاندفاع الخطي، المؤثر التفاضلي $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$؛ بحيث يكون مؤثر العزم الزاوي الكمومي لجسيم ما هو

$$\vec{L} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \qquad (1.1)$$

مركبات هذا المؤثر الثلاث هي

$$\begin{cases} L_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ L_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases} \qquad (1.1)'$$

لنحسب كالمعتاد مبادلات هذه المركبات مع المقادير x، y، z وكذلك مبادلات المركبات فيما بينها وذلك بجعلها تؤثر على دالة ما $f(x, y, z)$. إن

$$[L_x, x] = 0 \;;\; [L_y, y] = 0 \;;\; [L_z, z] = 0 \;, \qquad (1.2)$$

الخ. ولكن $[L_x, y]f = \frac{\hbar}{i}zf$، لأن $L_x$ لا يفعل في x، $xL_x f = L_x xf$

$$\begin{cases} [L_x, z] = \frac{\hbar}{i} y & [L_x, y] = -\frac{\hbar}{i} z \\ [L_y, z] = -\frac{\hbar}{i} x & [L_y, x] = \frac{\hbar}{i} z \\ [L_z, y] = \frac{\hbar}{i} x & [L_z, x] = -\frac{\hbar}{i} y \end{cases} \qquad (1.2)'$$

لدينا أيضاً

$$L_x L_y f = -\hbar^2 \left( y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right)\left( z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$= -\hbar^2 \left( yz\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x} - yx\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + zx\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right)$$

و

$$-L_y L_x = \hbar^2 \left( z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right)\left( y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \hbar^2 \left( zy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + x\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right)$$

تعدم المشتقات من الدرجة الثانية بعضها بعضاً ولا يبقى في نهاية المطاف إلا $\hbar^2\left( x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) f$ أي أن

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

ونجد بنفس الشكل أن

$$\begin{cases} [L_y, L_z] = i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y \end{cases} \qquad (1.3)$$

لنعين الإحداثيات x، y، z، بالأرقام 1، 2، 3 على الترتيب؛ لدينا من أجل أي إحداثيتين i و j مثلاً $[L_i, L_j] = i\hbar L_k$ شريطة أن يكون الترتيب i، j، k ترتيباً دوارياً وإلا وجب وضع إشارة ناقص أمام $L_k$ إذا كان الترتيب معاكس التدوير؛ والمبادل يساوي الصفر بطبيعة الحال عندما يتساوى الدليلان i و j. ونكتب باختصار

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k \qquad (1.4)$$

حيث $\varepsilon_{ijk}$ هو التانسور مضاد التناظر من الرتبة الثالثة الذي يلخص كل هذه الخواص. ولدينا أيضاً لتلخيص (1.2) و '(1.2)

$$[L_i, j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} k \qquad (1.5)$$

لنعرف مربع المؤثر $\vec{L}_2$ بأن نكتب

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \qquad (1.6)$$

ولنعين مبادلات $L^2$ مع مختلف المركبات بالحساب مباشرة معتمدين على ((3.15)،1)

$$\left[B^2, A\right] = -\left[A, B^2\right] = \left[B, A\right]B + B\left[B, A\right] \tag{1.7}$$

التي تعطينا

$$\left[L_1^2, L_3\right] = \left[L_1, L_3\right]L_1 + L_1\left[L_1, L_3\right]$$
$$= -i\hbar\left\{L_2L_1 + L_1L_2\right\}$$

وكذلك

$$\left[L_2^2, L_3\right] = i\hbar\left\{L_1L_2 + L_2L_1\right\}$$
$$\left[L_3^2, L_3\right] = 0$$

وعندما نجمع هذه العلاقات مع بعضها نحصل على

$$\left[L^2, L_3\right] = 0$$

كما نحصل على

$$\left[L^2, L_2\right] = 0 \qquad \left[L^2, L_1\right] = 0 \tag{1.8}$$

تعني علاقات المبادلة (1.4) أنه لا يمكن تعيين قيمة أي مركبتين للعزم الزاوي في آن واحد : إنها ليست رصودة في آن واحد بينما تعني (1.8) أنه من الممكن تعيين قيمة مربع العزم الزاوي وقيمة إحدى المركبات في آن واحد. ونضع هذه النتيجة على شكل قضية :

<u>قضية 1</u> :

لا نستطيع في الميكانيك الكمومي تعيين مركبات العزم الزاوي في آن واحد. كل ما نستطيع فعله هو تعيين $L^2$ وإحدى هذه المركبات، $L_3$ على سبيل المثال.

سنستعمل غالباً عوضاً عن المؤثرين $L_1$ و $L_2$ المؤثرين التاليين :

$$L_+ = L_1 + iL_2$$
$$L_- = L_1 - iL_2 \tag{1.9}$$

والمبادلات التالية

$$\left[L_+, L_-\right] = 2\hbar L_3 \tag{1.10}$$

التي نحصل عليها من ملاحظة أن

$$L_\pm L_\mp = L^2 - L_3^2 \pm \hbar L_3 \tag{1.10'}$$

لدينا أيضاً

$$\left[L_3, L_\pm\right] = \left[L_3, L_1\right] \pm i\left[L_3, L_2\right]$$
$$= +i\hbar L_2 \pm i \times -i\hbar L_1 = \pm\hbar\left[L_1 \pm iL_2\right] \tag{1.11}$$
$$\left[L_3, L_\pm\right] = \pm\hbar L_\pm$$

## 2.1- انحفاظ الاندفاع الخطي والعزم الزاوي المداري

رأينا في الميكانيك (I.4.§1.3) أن انحفاظ الاندفاع الخطي ناتج عن تجانس المكان، عن عدم توقف خواص الفضاء الإقليدي على انتقاء نقطة ما كمبدأ لنظمة الإحداثيات وبالتالي عدم تغير قوانين الفيزياء نتيجة الانسحاب المكاني الذي يعين وضع الجسيم A بالمتجهة $\overrightarrow{O'A} = \vec{r}'$ عوضاً عن المتجهة $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ . $\vec{r} = OA = OO' + \vec{r}'$ . رأينا كذلك (I.6.§2.2) أن الانسحاب البدائي يؤثر على دالة ما - اللاغرانجي- على النحو التالي، بفرض $\vec{a}$ متجهة صغيرة قدر ما نريد

$$\mathscr{L}(\vec{r}') = \mathscr{L}(\vec{r} - \vec{a}) = \mathscr{L}(\vec{r}) - \vec{a}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}} + ...$$

$$\mathscr{L}(\vec{r}') = \left(I - \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\mathscr{L}(\vec{r}) \qquad (1.12)$$

حيث كتبنا اختصاراً $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$ ؛ وحيث كتبنا 1 على شكل مؤثر I.

إن عدم توقف اللاغرانجي على انتقاء النقطة O يعني أن $\mathscr{L}(\vec{r}') = \mathscr{L}(\vec{r})$ أي انعدام كل من المقادير

$$a_x \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \quad ، \quad a_y \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad ، \quad a_z \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z} = 0$$

وبما أن الوسطاء $a_x$ ، $a_y$ ، $a_z$ اعتباطية فإن $\frac{d}{dt}P_x = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0$ ، الخ، أي أن الاندفاع الخطي للجسيم ثابت لا يتغير مع الزمن : $\vec{P} = cte$ . عممنا ذلك إلى حالة عدد ما n من الجسيمات $\mathscr{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ... \vec{r}_n)$ ووجدنا أن الاندفاع الخطي الكلي ثابت.

وجدنا، على نفس النحو، (I.6.§2.3) أن انحفاظ العزم الزاوي ناتج عن تناحي المكان، عن عدم توقف خواص الفضاء الإقليدي على انتقاء اتجاه معين لمتجهات القاعدة في نظمة الإحداثيات وبالتالي عدم تغير قوانين الفيزياء نتيجة الدوران الذي يعين وضع الجسيم A بالمتجهة $\overrightarrow{OA} = \vec{r}'$ في الإحداثيات الجديدة عوضاً عن المتجهة $\vec{r}$ في الإحداثيات القديمة. نعلم أن $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\delta\theta} \times \vec{r}$ حيث $\vec{\delta\theta}$ هي زاوية الدوران الصغيرة حول محور الدوران الآني. يجب إذاً ألا يتغير اللاغرانجي نتيجة هذا الدوران

$$\mathscr{L}(\vec{r}') = \mathscr{L}\left(\vec{r} + \vec{\delta r}\right)$$

$$= \mathscr{L}(\vec{r}) + \vec{\delta r}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}} + ...$$

حيث $\vec{\delta r} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{\delta\theta} \times \vec{r}$

$$= \left[I + \left(\vec{\delta\theta} \times \vec{r}\right)\vec{\nabla}\right]\mathscr{L}$$

$$\mathscr{L}(\vec{r}') = \left[I + \vec{\delta\theta}\left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right)\right]\mathscr{L}(\vec{r}) \qquad (1.13)$$

إن $\vec{r} \times \vec{\nabla}\mathscr{L}$ ليس سوى $\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ أي إنه مشتق العزم الزاوي بالنسبة للزمن ولذا فإن تناحي المكان $\mathscr{L}(\vec{r}) = \mathscr{L}(\vec{r})$ يعني انعدام هذا المشتق وبالتالي فإن العزم الزاوي للجسيم ثابت؛ وهنا أيضاً فقد عممنا ذلك إلى حالة عدد ما n من الجسيمات.

لننظر الآن في حالة الميكانيك الكمومي حيث تتعين حالة النظمة الكمومية، n جسيماً على سبيل المثال، بمتجهة الحالة $\rangle \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ... \vec{r}_n)$، حيث $\vec{r}_i \in R^3$ $i = 1,2...n$ عناصر من الفضاء الإقليدي.

ننتقل من متجهة الحالة هذه إلى متجهة جديدة نتيجة الانسحاب المكاني هي $|\psi(\vec{r}_1 - \vec{a}_1, \vec{r}_2 - \vec{a}_2, ... \vec{r}_n - \vec{a}_n)\rangle$ ونستطيع تعيين المؤثر الذي ينقلنا من المتجهة الأولى إلى المتجهة الجديدة بتعيين مولداته (انظر نهاية ملحق الفصل الخامس في I الذي أعدنا نسخه في ملحق الفصل التاسع من هذا المجلد). لدينا كما في (1.12).

$$|\psi'\rangle = |\psi(\vec{r}_1 - \vec{a}, \vec{r}_2 - \vec{a}, ... \vec{r}_n - \vec{a})\rangle = \left(I - \sum_{i=1}^{n} \vec{a}\vec{\nabla}_i\right)|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ... \vec{r}_n)\rangle \quad (1.14)$$

ومؤثر الانسحاب هو إذاً

$$e^{-\vec{a}\sum_i \vec{\nabla}_i} \quad (1.14)'$$

وعليه يجب أن تعطينا متجهتا الحالة $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle$ نفس النتائج الفيزيائية، بمعنى أنه بإمكاننا الحصول على الطاقة بأخذ $H|\psi\rangle$ وتطبيق الانسحاب على هذه المتجهة أو تطبيقه مباشرة على $|\psi'\rangle$

$$H\left(I - \vec{a}\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i\right)|\psi\rangle = H|\psi'\rangle = \left(I - \vec{a}\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i\right)H|\psi\rangle$$

أي أن

$$-H\sum_i \vec{\nabla}_i = -\sum_i \vec{\nabla}_i H$$

أو بشكل آخر

$$\left[H, \sum_i \vec{\nabla}_i\right] = 0 \quad (1.15)$$

هذا يعني أن عدم تغير قوانين الميكانيك الكمومي نتيجة الانسحاب يتضمن انحفاظ المؤثر $\sum_i \vec{\nabla}_i$، مبادله مع H يساوي الصفر. علينا إذاً القول إن هذا المؤثر متناسب مع مؤثر الاندفاع $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$.

ونجد على هذا النحو اتساق هذه النتيجة مع تعريفنا لمؤثر الاندفاع.

نرى، انطلاقاً من (1.13)، باتباع المحاكمة السابقة خطوة فخطوة أن مولدات مؤثر الدوران الذي ينقلنا من متجهة الحالة $|\psi(\vec{r}_1, ... \vec{r}_n)\rangle$ إلى $|\psi'\rangle = \left|\psi\left(\vec{r}_1 + \overline{\delta\theta}(\vec{r}_1 \times \vec{\nabla}_1) ... \vec{r}_n + \overline{\delta\theta}(\vec{r}_n \times \vec{\nabla}_n)\right)\right\rangle$ هي

$$\left(I + \overline{\delta\theta}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i\right) \quad (1.16)$$

ومؤثر الدوران هو

$$e^{\vec{\delta\theta}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i} \qquad (1.16)'$$

وأن مجموع هذه المولدات منحفظ أي أنه تبادلي مع $H$

$$\left[H, \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i\right] = 0 \qquad (1.15)'$$

وعلينا القول إذاً إن هذا المؤثر متناسب مع مؤثر العزم الزاوي ونجد من جديد علاقة التعريف (1.1)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_i = \sum \vec{L}_i \qquad (1.1)''$$

<u>قضية 2</u> :

والخلاصة إن مولد مؤثر الانسحاب في الفضاء الهيلبرتي – الذي يعنينا هنا – هو

$$\vec{\nabla} = \frac{i}{\hbar}\vec{P} \qquad (1.14)''$$

ومولد مؤثر الدوران في هذا الفضاء هو

$$\vec{r} \times \vec{\nabla} = \frac{i}{\hbar}\vec{L} \qquad (1.16)''$$

وهما مقداران منحفظان : تبادلهما مع $H$ معدوم.

رأينا في (I.5§1) أن الدورانات التي تنقل من المقرن $OXYZ$ إلى المقرن $Oxyz$ تشكل زمرة رمزنا لها بـ $SO(3)$ ووجدنا (I ملحق الفصل السابع (العلاقة5)) أن أي دوران $\mathcal{A} \in SO(3)$ يكتب على الشكل $e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}$ حيث

$$\left[\Lambda_i, \Lambda_j\right] = \varepsilon_{ijk}\Lambda_k \qquad (1.4)'$$

(كما وجدنا أن الانتقال من متجهة $\vec{r}$ إلى $\vec{r}' = g\vec{r}$ تحدده المصفوفة (عنصر الزمرة $SO(3)$) $e^{+\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}$).

إن استبدال $-\frac{i}{\hbar}\vec{L}$ بـ $\vec{\Lambda}$ في $(1.4)'$ يعطينا العلاقة

$$-\frac{1}{\hbar^2}\left[L_i, L_j\right] = -\varepsilon_{ijk}\frac{i}{\hbar}L_k$$

وهذا ما نعبر عنه بالقول.

<u>قضية 3</u> :

إن المؤثر $e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\delta\theta}\cdot\vec{L}} = D_{\mathcal{A}}$ الذي يفعل بمتجهة الحالة $\psi(\vec{r})$ هو ممثل المؤثر $\mathcal{A} = e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}$ المنتمي إلى الزمرة $SO(3)$ (انظر I ملحق الفصل الخامس وملحق الفصل السابع اللذين أعدنا نسخهما في ملحق

الفصل التاسع من هذا الكتاب) أو إن المؤثر $D_g = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{L}}$ هو ممثل المؤثر $g = e^{\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}$ الذي يفعل بالمتجهة $\vec{r}$ لينقلها إلى $\vec{r}' = g\vec{r}$ نتيجة الدوران.

## 3.1– قوانين التناظر

عرفنا في الفصل الأول القيمة الوسطية لمؤثر ما بالعلاقة

$$\langle A \rangle = \langle \psi_j | A | \psi_j \rangle \qquad (1.17)$$

عندما تكون النظمة الميكانيكية في الحالة النقية $\langle \psi_i |$، وبالعلاقة

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\rho A \qquad (1.17)'$$

حيث $\rho = \sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle \psi_i|$ هو مؤثر الكثافة، عندما تكون الحالة مزيجاً من الحالات $\langle \psi_i |$، باحتمال $p_i$ لكل منها. وينطبق هذا التعريف على التعريف الأول عندما تكون كل الاحتمالات $p_i$ مساوية للصفر ماعدا واحدة $p_j = 1$، $\rho = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ : إنه المسقِط على الحالة j.

**تعريف 1 :**

نقول عن تحويل في فضاء الحالات (فضاء هيلبرت)، $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle$، وعن تحويل في فضاء المؤثرات $A \to A'$ إنهما يحددان قانون تناظر إذا بقيت القيم الوسطى والاحتمالات دون تغيير نتيجة هذين التحويلين أي إذا تحققت المساواة

$$\mathrm{Tr}\, \rho' A' = \mathrm{Tr}\, \rho A \qquad (1.18)$$

وبشكل خاص من أجل الحالات النقية إذا تحققت العلاقتان

$$\langle A' \rangle = \langle \psi' | A' | \psi' \rangle = \langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \qquad (1.19)$$

و

$$|\langle \psi'_f | \psi'_i \rangle|^2 = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \qquad (1.20)$$

حيث رمزنا بـ $\langle \psi_i |$ إلى الحالة البدائية للنظمة و $\langle \psi_f |$ إلى الحالة النهائية، وبمربع الجداء إلى احتمال الانتقال من الحالة الأولى إلى الحالة الثانية. يجب ألا يتغير هذا الاحتمال نتيجة التحويل.

ننتقل من المتجهة $\langle \psi |$ إلى المتجهة $\langle \psi' |$ بتطبيق مؤثر $D_g$ – مصفوفة لامنتهية الأبعاد – تمثل عادة زمرة تناظر G. ولذا وضعنا الدليل $g \in G$ على المؤثر D لنشير إلى هذا التمثيل في الحالة العامة. إن المؤثر $(1.16)'$ $D_{\mathcal{A}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\delta\theta}\cdot\vec{L}}$ على سبيل المثال هو ممثل زمرة الدورانات SO(3) ذات العناصر $\mathcal{A} = e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}$، ويحدد قانون تناظر لأنه لا يغير الجداء السلمي (1.20) :

$$\langle \psi'_f | \psi'_i \rangle = \langle D_g \psi_f | D_g \psi_i \rangle$$
$$= \langle \psi_f | D_g^\dagger D_g \psi_i \rangle$$

و $D_g^\dagger D_g = I$ هو الشرط اللازم والكافي لانحفاظ الجداء السلمي (انظر I ملحق الفصل الخامس، العلاقة 5)[1]. وبالفعل إن المؤثر $D_g = e^{-\frac{i}{\hbar}\delta\theta\cdot L} = I - \frac{i}{\hbar}\delta\theta L + \ldots$ واحدي لأن $D_g^\dagger = e^{\frac{i}{\hbar}\delta\theta(L)^\dagger} = e^{\frac{i}{\hbar}\delta\theta(L)}$ لأن المؤثر $\vec{L}$ (العزم الزاوي) كالمؤثر $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} = \vec{P}$ ذاتي الترافق : $L^\dagger = L$.

أما المؤثر A فيتغير حسب العلاقة (1.19)

$$\langle A' \rangle = \langle D_g \psi | A' | D_g \psi \rangle = \langle \psi | D_g^\dagger A' D_g | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

أي أن

$$A' = D_g A D_g^{-1} \qquad (1.21)$$

لنلاحظ أن قولنا بعدم تغير النتائج الفيزيائية نتيجة التحويل $|\psi\rangle \leftarrow |\psi'\rangle = D_g|\psi\rangle$ يعني عدم تغير معادلة شرودينغر : $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \leftarrow H|\psi'\rangle = E|\psi'\rangle$. أو بعبارة أخرى إن التحويل هو تحويل المتجهات الخاصة للهاميلتوني فيما بينها. ولكن هذا يعني حسب (1.21) أن

$$H = D_g H D_g^{-1}$$

أو

$$[H, D_g] = 0 \qquad (1.21)'$$

وهما العلاقتان (1.15) و '(1.15) اللتان حصلنا عليهما من أجل تمثيل الاندفاع الخطي والعزم الزاوي. تنقسم زمر التناظر إلى فئتين، فئة التناظر الهندسي التي رأيناها في الميكانيك التقليدي والتي تعبر عن الخواص التي وضعناها للزمان والمكان، التجانس الزماني والمكاني والتناحي. إنها الزمرة التآلفية – الانسحاب والدوران في الفضاء الإقليدي مضافاً إليه الانسحاب الزماني – والانسحاب والدوران في فضاء مينكوفسكي – زمرة بوانكاريه، وزمرة لورانتس عندما لا نأخذ الانسحاب بعين الاعتبار مكتفين بالدوران في الفضاء بأبعاده الثلاثة وبالدوران الزماني المكاني – حركة نظمة غاليلية بالنسبة لنظمة غاليلية أخرى. تؤثر هذه الزمر على المتجهة $|\psi\rangle$ في الفضاء الهيلبرتي وعلى المتغير x، الذي يحدد الوضع والزمان بصورة عامة. لدينا كما في (1.14)

$$\psi'(x') = D_g \psi(x) \qquad (1.22)$$
$$x' = gx$$

أما فئة التناظر الثانية وتسمى بالتناظر الداخلي فإنها لا تؤثر على الإحداثيات والزمن، على x، وإنما على متجهة الحالة وحدها. إنه تناظر بين الجسيمات، كالتناظر بين البروتون والنوترون في التفاعلات

---

[1] يحل المؤثر $D^\dagger = \bar{\bar{D}}$ محل المؤثر $\bar{D}$ في هذه العلاقة لأن فضاء التطبيق فضاء عقدي.

النووية التي لا تتأثر بالشحنة على سبيل المثال : لا تختلف نتيجة تفاعل عشرة بروتونات عن تفاعل عشرة نوترونات أو عن 4 بروتونات و 6 نوترونات الخ. نعبر عن هذا التناظر بالعلاقة

$$\psi'(x) = D_g\psi(x) \qquad (1.23)$$

حيث بقي المتغير (الهندسي) $x$ ثابتاً في التحويل من $\psi$ إلى $\psi'$.

**انحفاظ السوية :**

لنضف إلى التناظرات الهندسية تناظراً آخر رأيناه في الميكانيك التقليدي هو تناظر السوية (Parity). قلنا إنه يمكن لنظم المحاور الثلاثة المتعامدة أن تكون مباشرة، تمثلها اليد اليمنى ويقع الدوران فيها من اليمين نحو اليسار؛ أو غير مباشرة، تمثلها اليد اليسرى (صورة الأولى في المرآة) ويقع الدوران فيها من اليسار نحو اليمين(I.2§2.3). يمثلها أيضاً عكس اتجاهات المحاور الثلاثة والانتقال من $\vec{r}$ إلى $-\vec{r}$. كما قلنا إن اختيار أحد هذين النوعين من المقارن أمر توافقي بمعنى أن النتائج الفيزيائية لا تتأثر به. ولكن هذا التناظر لا يؤدي إلى وجود مقادير فيزيائية ثابتة، إلى قوانين انحفاظ. يبقى هذا التناظر قائماً في النظريات الكمومية وبالتالي في كل التفاعلات – القوية والكهرطيسية والتثاقلية – ماعدا التفاعلات الضعيفة : إصدار $\beta$ على سبيل المثال، $n \to p + e^- + \bar{\nu}$. كما يؤدي إلى انحفاظ يطلق عيه اسم انحفاظ السوية.

إن المصفوفة التي تعبر عن الانعكاس، عن الانتقال من $\vec{r}(x, y, z)$ إلى $-\vec{r}(-x, -y, -z)$ أو إلى $(-x, y, z)$ (الصورة في المرآة) هي مصفوفة $3\times3$ قطرية معينها يساوي -1 ولا تنتمي إلى زمرة الدورانات $SO(3)$ ذات المعين المساوي للواحد. لأنه يستحيل الانتقال من المقرن المباشر إلى غير المباشر بواسطة سلسلة من الدورانات المتصلة.

ليكن $\mathscr{P}$ المؤثر الممثل للانعكاس، الذي ينقل متجهة الحالة من $|\psi(\vec{r})\rangle$ إلى $|\psi(-\vec{r})\rangle$ ولنفترض أنه لا يغير النتائج الفيزيائية

$$[\mathscr{P}, H] = 0 \qquad (1)$$

حسب '(1.21) ولنحسب قيمه الخاصة

$$\mathscr{P}|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi(-\vec{r})\rangle \qquad (2)$$

$$\mathscr{P}^2|\psi(\vec{r})\rangle = \mathscr{P}\left(\mathscr{P}|\psi(\vec{r})\rangle\right) = |\psi(\vec{r})\rangle$$

هذا يرينا أن $\mathscr{P}^2 = I$ و أن $\mathscr{P}$ هو مجرد طور $\mathscr{P} = \pm e^{i\alpha}$ (واحدي وذاتي الترافق) وبالتالي فإن قيمه الخاصة ولنرمز لها بـ $P$ هي $\pm1$ :

$$|\psi(-\vec{r})\rangle = \mathscr{P}|\psi(\vec{r})\rangle = P|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi(\vec{r})\rangle$$ ، من أجل القيمة الخاصة +1

$$|\psi(-\vec{r})\rangle = \mathscr{P}|\psi(\vec{r})\rangle = P|\psi(\vec{r})\rangle = -|\psi(\vec{r})\rangle$$ ، من أجل القيمة الخاصة -1

أو

تبين هاتان العلاقتان أنه من الضروري أن تكون متجهة الحالة زوجية $|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi(-\vec{r})\rangle$ أو فردية $|\psi(\vec{r})\rangle = -|\psi(-\vec{r})\rangle$ كي تبقى منحفظة بفعل مؤثر السوية.

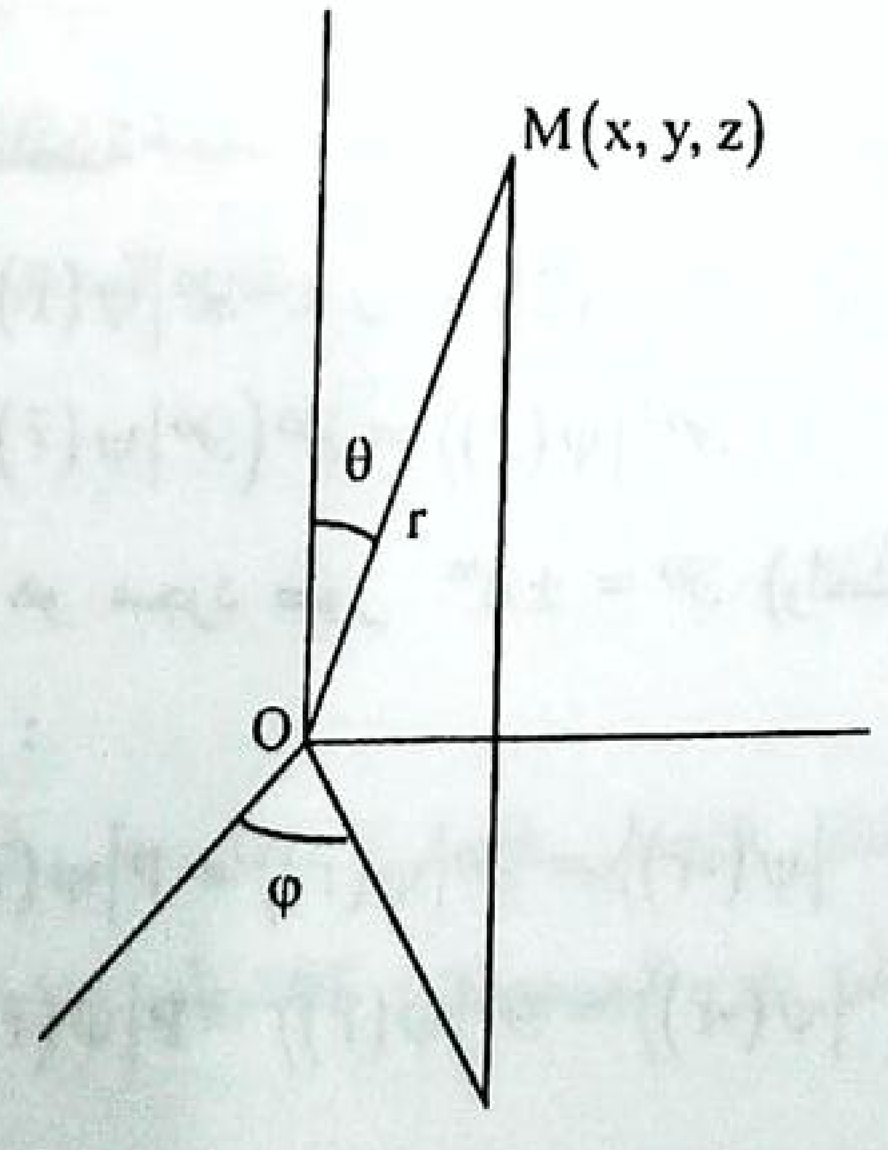
لنلاحظ أنه من الممكن دوماً الحصول انطلاقاً من دالة معينة $\psi(\vec{r})$ على دالة زوجية أو فردية من الشكل $\psi(\vec{r}) + \psi(-\vec{r})$ أو $\psi(\vec{r}) - \psi(-\vec{r})$ على الترتيب. إذا كانت $|\psi(\vec{r})\rangle$ متجهة خاصة لـ H تقابلها القيمة الخاصة E فإن $|\psi(-\vec{r})\rangle$ هي متجهة خاصة من أجل ذات القيمة الخاصة حسب (1) و(2)؛ فإذا فرضنا أن هذه القيمة الخاصة غير متدنية فإن إحدى الدالتين $|\psi(\vec{r})\rangle \pm |\psi(-\vec{r})\rangle$ تساوي الصفر حتماً أي أن المتجهات الخاصة غير المتدنية ذات سوية محددة تماماً. وهذا ما رأيناه تحديداً في (2.§2.3) الشكل. 3.

لنلاحظ من جهة أخرى، انطلاقاً من (1.1) أن $\vec{L}\mathscr{P} = \vec{L}$ لأن الانعكاس يغير في آن واحد إشارة $\vec{r}$ وإشارة $\vec{\nabla}$؛ ثم إن الجداء المتجهي شبه متجهة (أو متجهة محورية كما يقولون) لا تتأثر بالانعكاس $\mathscr{P}\vec{L} = \vec{L}$ أي أن $\left[\mathscr{P}, \vec{L}\right] = 0$ : يمكن أن يكون للنظمة سوية محددة وقيم معينة لعزمها الزاوي في آن واحد، لمسقط هذا العزم على محور معين على وجه الدقة.

## 4.1- تعيين القيم الخاصة للعزم الزاوي المداري

نعلم من الميكانيك أن مركبة العزم الزاوي على محور ما $L_3 = L_z$ مثلاً هي العزم المرافق لزاوية الدوران حول هذا المحور (انظر مثلاً (I.6.(2.24,25)) ولذلك فإنه من الأسهل لإيجاد القيم الخاصة لـ $L_3$ على سبيل المثال ومن بعدها القيم الخاصة للمؤثرات التبادلية مع $L_z$ إجراء الحساب بالإحداثيات الكروية $(r, \varphi, \theta)$ عوضاً عن الإحداثيات الديكارتية $(x, y, z)$.

لدينا $x = r\sin\theta\cos\varphi$ ؛ $y = r\sin\theta\sin\varphi$ ؛ $z = r\cos\theta$



ونجد انطلاقاً من المصفوفة الجاكوبية التي تعين تفاضلات $x, y, z$ بالنسبة لـ $r, \varphi, \theta$ :

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

ذات المعين $-r^2\sin\theta$، والمصفوفة العكسية :

$$J^{-1} = \frac{\partial(r,\varphi,\theta)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \frac{-\sin\theta}{r} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

الصيغ التالية لمركبات مؤثر العزم الزاوي المداري '(1.1)

$$\begin{cases} L_1 = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot g\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_2 = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot g\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases} \quad (1.26)$$

تذكر العلاقة الأخيرة بـ ((I.6.(2.22)) التي تعرف مسقط العزم الزاوي $L_3$ بمشتق اللاغرانجي بالنسبة للمتغير الزاوي $\varphi$. لدينا على سبيل المثال من (1.25)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + 0 - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

وكذلك

$$\frac{\partial}{\partial y} = ........ = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

ومنه العلاقة الأولى في (1.26)، الخ.

نلاحظ أن هذه العلاقات مستقلة عن $r$ وهو أمر طبيعي لأن وسطاء الدوران هي الزوايا الثلاث وحدها.

ونحصل منها ومن تعريف $L_\pm$ في (1.9) على

$$L_\pm = L_1 \pm iL_2 = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad (1.27)$$

وعلى $L^2$ من هاتين العلاقتين ومن العلاقة الثالثة في (1.26) و '(1.10) لنجد أن

$$L^2 = \hbar^2 e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left[e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right] - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - i\hbar^2\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \quad (1.28)$$

لنعد إلى العلاقة الأخيرة في (1.26) التي تعين لنا القيم الخاصة للمؤثر $L_3$ عندما نطبقه على المتجهة الخاصة $|\psi(r,\varphi,\theta)\rangle$

$$L_3|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial\varphi} = \ell_3|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle \quad (1.29)$$

حيث رمزنا وفق التقاليد للقيم الخاصة لـ $L_3$ بالأعداد m (مغنطيسية)، ومنه

$$|\psi(r,\theta,\varphi)\rangle = |f(r,\theta)e^{im\varphi}\rangle \quad (1.30)$$

يقتضي كون الدالة $\psi$ منتظمة (قيمة واحدة من أجل المتغير $\varphi$ مقاس (modulo) $2\pi$) أخذ الأعداد m قيماً صحيحة

$$m = 0 \text{ ، } m = \pm 1 \text{ ....} \quad (1.31)$$

لنلاحظ أن اختيار اتجاه ما في الفضاء أمر اعتباطي وبالتالي فإن ما يصح على الاتجاه Oz يصح على كل من الاتجاهين الآخرين Ox و Oy : إن القيم الخاصة في هذين الاتجاهين هي أعداد صحيحة موجبة أو سالبة. إن الأمر المهم هو أن هذه القيم لا تؤخذ في آن واحد في هذه الاتجاهات نظراً لـ (1.4) التي تبين أن هذه المركبات غير تبادلية وأنه يستحيل أن تكون لها متجهات خاصة مشتركة. وهكذا لا يمكننا إلا أخذ أحد الاتجاهات فقط بعين الاعتبار والنظر إلى المتجهات الخاصة المشتركة بينه وبين مؤثر تبادلي معه : $[L^2, L_3] = 0$ حسب (1.8).

تبين العلاقة $L^2 - L_3^2 = L_1^2 + L_2^2$ أن للأعداد m حداً أعلى $(L^2 - L_3^2 > 0)$، ونريد الآن إيجاد هذا الحد الأعلى وتعيين القيمة الخاصة لـ $L^2$. لدينا بالرجوع إلى العلاقات (1.11).

$$L_3L_\pm|\psi_m\rangle = (m \pm 1)\hbar|\psi_m\rangle \quad (1.32)$$

حيث $|\psi_m\rangle$ هي المتجهة الخاصة لـ $L_3$ ذات القيمة الخاصة $m\hbar$.

ومنه

**<u>قضية 4</u> :**

إن المتجهة $L_\pm|\psi_m\rangle$ هي متجهة خاصة لـ $L_3$ تقابلها القيمة الخاصة $(m \pm 1)\hbar$.

سنرمز لهذه المتجهة الخاصة بالرمز $|\psi_{m\pm1}\rangle$. نسمي الحد الأعلى للأعداد الصحيحة m، $\ell$ وبالتالي فإن

$$L_+|\psi_\ell\rangle = 0$$

ومن جهة ثانية فإن '(1.10) التي تعين العلاقة بين $L_-$ و $L_+$ تعطينا بتطبيقها على المتجهة $L_+|\psi_\ell\rangle = 0$ :

$$0 = L_-L_+|\psi_\ell\rangle = (L^2 - L_3^2 - \hbar L_3)|\psi_\ell\rangle$$

أي أن المؤثر بين قوسين يساوي الصفر، وبما أن لـ $L^2$ و $L_3$ نفس المتجهات الخاصة – فإن $\left|\psi_\ell\right\rangle$ متجهة خاصة للمؤثر $L^2$؛ ولتكن $L^2$ القيمة الخاصة المقابلة لها. لدينا إذاً $-\left[L^2, L_3\right] = 0$ بأخذ القيم الخاصة في العلاقات السابقة وملاحظة أن $L_3\left|\psi_\ell\right\rangle = \hbar\ell$

$$L^2 - \hbar^2\ell^2 - \hbar^2\ell = 0$$

ومنه

$$L^2 = \hbar^2(\ell + 1)\ell \quad (1.33)$$

وهكذا نكون قد توصلنا إلى معرفة القيم الخاصة لمربعات العزم الزاوي المداري. تأخذ $\ell$ كل القيم الصحيحة الموجبة 0، 1، 2، ... ومن أجل كل $\ell$ أي من أجل كل عزم زاو معين بالعلاقة (1.33) تأخذ القيم الخاصة لمسقط هذا العزم على المحور Oz : $L_z$، $2\ell + 1$ قيمة مختلفة تتعين بالأعداد $m = \ell, \ell - 1, ...0, ... -\ell$. معنى ذلك أن مستوى الطاقة المقابل للعزم الزاوي المعين بالعدد $\ell$ متدنٍ $(2\ell + 1)$ مرة. يقال عن هذا التدني إنه تدن حسب اتجاهات العزم. والحالة الوحيدة التي لا يحدث فيها أي تدن لمستوى الطاقة هي عندما يكون العزم مساوياً للصفر. ومركباته الثلاث معدومة عندئذ.

لنلاحظ أخيراً أننا ناقشنا هنا العزم الزاوي لنظمة مؤلفة من جسيم وحيد، إلا أن المحاكمة تنطبق على نظمة مؤلفة من عدد من الجسيمات فالعزم الزاوي تجميعي : $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$.

## 5.1– متجهات العزم الزاوي المداري الخاصة : الدالات التوافقية الكروية

لا يشكل المقداران $\ell$ و m تعريفاً تاماً لمتجهة الحالة، فهما لا يتوقفان إلا على المتغيرين φ و θ؛ لابد إذاً من وجود عامل تابع للمتغير r وحده لتعريف متجهة الحالة التي سنكتبها على الشكل

$$\left|\psi_m(r, \varphi, \theta)\right\rangle = \left|\rho_m(r, \theta)e^{im\varphi}\right\rangle = \left|\chi(r)g_m(\theta)e^{im\varphi}\right\rangle \quad (1.34)$$

ومنه، بالنظر إلى $L_+\left|\psi_\ell\right\rangle = 0$ سيعطي الصفر $m = \ell$ من أجل $g_m e^{im\varphi}$ على $L_+$ إن تطبيق المؤثر (1.27)، المعادلة التفاضلية التالية للدالة $g_\ell(\theta)$ :

$$\frac{dg_\ell}{d\theta} = \ell \text{cotg}\theta g_\ell(\theta)$$

أو

$$d\left(\text{Ln}g_\ell(\theta)\right) = \ell\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \ell\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \ell \, d \, \text{Ln}\sin\theta \quad (1.35)$$

والحل

$$g_\ell(\theta) = C(\sin\theta)^\ell$$

على $L_-$ يعطي $g_\ell e^{i\ell\varphi}$، $g_{\ell-1}e^{i(\ell-1)\varphi}$، الخ.

ونتحقق بذات الشكل أن تطبيق $L_-$ بمتجهة الحالة التابعة لـ $\theta$ بمتجهة الحالة التابعة لـ $\varphi$ بالرمز سنرمز من الآن فصاعداً إلى جداء متجهة الحالة التابعة لـ $\theta$ بمتجهة الحالة التابعة لـ $\varphi$ بالرمز $y_\ell^m(\theta,\varphi)$ :

$$y_\ell^m(\theta,\varphi) = g_\ell^m(\theta)e^{im\varphi} \qquad (1.34)'$$

إنها متجهة الحالة التي تعين في ذات الوقت المقدار $\ell$ الذي يعين العزم الزاوي الكلي حسب (1.33) ومسقطه $m$ على المحور الثالث، نرمز لها أيضاً بـ $\langle \ell, m|$. تعرف هذه الدالة باسم الدالة التوافقية الكروية Spherical Harmonic. تشكل هذه الدالات من أجل عزم زاو محدد بـ $\ell$ فضاء متجهياً بـ $(2\ell+1)$ بعداً. نعرف على هذا الفضاء شكلاً (هرميتياً) – جداءً سلمياً خطيا مرة ونصف – بالتكامل على الكرة

$$\langle y_\ell^m | y_\ell^{m'} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\pi^0 d\theta\, y_\ell^m y_\ell^{m'} \sin\theta \qquad (1.36)$$

حيث $\sin\theta$ هو الحد من $\det|J|$ الذي لا يتوقف على $r$. وننطلق من هذه العلاقة لتنظيم الدالات التوافقية مبتدئين بـ $y_\ell^\ell$ التي نكتبها على الشكل

$$y_\ell^\ell = ce^{i\ell\varphi}\sin^\ell\theta$$

$$1 = \langle \ell,\ell|\ell,\ell\rangle = \|y_\ell^\ell\|^2 = -2\pi|c|^2\int_0^\pi \sin^{2\ell+1}\theta\, d\theta = +2\pi|c|^2\int_0^\pi\left(1-\cos^2\theta\right)^\ell d\cos\theta$$

$$= 4\pi|c|^2\int_0^1\left(1-x^2\right)^\ell dx$$

نكامل هذا الحد الأخير بالتجزئة، ينعدم الحد المكامل، أما الحدود الأخرى فتعطي على التوالي

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)^\ell dx = \underbrace{[\;]_0^1}_{=0} + \int 2\ell\left(1-x^2\right)^{\ell-1}x^2dx$$

$$= \frac{2\ell 2(\ell-1)}{1\cdot 3}\int\left(1-x^2\right)^{\ell-2}x^3dx\ldots$$

$$= \frac{2\ell\cdot 2(\ell-1)\ldots 2}{1.3.5\ldots.(2\ell+1)} = \frac{2^\ell \ell!}{1.3.5\ldots.(2\ell+1)}$$

لأن كل تكامل يرفع قوة $x$ درجتين، و $\ell$ تكامل ترفعها إلى القوة $(2\ell+1)$ والتكامل الأخير يساوي الواحد.

نحول المخرج إلى عاملي بضربه بكل الأعداد الزوجية $2.4.6\ldots.2\ell = 2^\ell(1.2\ldots\ell) = 2^\ell\ell!$ وهكذا فإن

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)^\ell dx = \frac{\left(2^\ell\cdot\ell!\right)^2}{(2\ell+1)!} \qquad (1.37)$$

وهذا يعطينا $c$ المنظمة لـ $y_\ell^\ell$. سنأخذها مع الإشارة $(-1)^\ell$ لتحديد طور $e^{i\ell\varphi}$

$$c = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell\ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} \quad \text{و} \quad y_\ell^\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell\ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}\, e^{i\ell\varphi}\sin^\ell\theta \qquad (1.36)'$$

نحسب $y_\ell^m(\theta,\varphi)$ بتطبيق $L_-^{\ell-m}$ على $y_\ell^\ell$ : $y_\ell^m \sim y^{\ell-(\ell-m)}$. ننظم $y_\ell^m$ للواحد على النحو التالي

$$y_\ell^m = c_m L_-^{\ell-m} y_\ell^\ell = c_m L_- \left(L_-^{\ell-m+1} y_\ell^\ell\right)$$

ولكن الحد بين قوسين هو $\frac{1}{c_{m+1}} y_\ell^{m+1}$ ، و

$$y_\ell^m = \frac{c_m}{c_{m+1}} L_- y_\ell^{m+1} \tag{1.38}$$

ومنه

$$\langle \ell,m|\ell,m\rangle = 1 = \langle y_\ell^m | y_\ell^m\rangle = \left|\frac{c_m}{c_{m+1}}\right|^2 \langle L_- y_\ell^{m+1} | L_- y_\ell^{m+1}\rangle = \left|\frac{c_m}{c_{m+1}}\right|^2 \langle y_\ell^{m+1} | L_+ L_- y_\ell^{m+1}\rangle$$

لأن $L_+ = L_-^\dagger$ ، وبما أن $L_+L_- = L^2 - L_3^2 + \hbar L_3$ فإن تطبيق هذا المؤثر على المتجهة الخاصة $y_\ell^{m+1}$.
يعين القيمة الخاصة التالية

$$L_+L_-|\ell, m+1\rangle = \left[\ell(\ell+1) - (m+1)^2 + (m+1)\right]\hbar^2|\ell, m+1\rangle$$

أو

$$L_+L_-|\ell, m+1\rangle = \hbar^2(\ell-m)(\ell+m+1)|\ell, m+1\rangle$$

أي أن

$$\left|\frac{c_m}{c_{m+1}}\right|^2 (\ell-m)(\ell+m+1)\hbar^2 = 1$$

ومن (1.38)

$$y_\ell^m = \frac{1}{\hbar\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}} L_- y_\ell^{m+1} \tag{1.38'}$$

وبتطبيق هذه العلاقة على $y_\ell^{m+1}$ :

$$y_\ell^m = \frac{1}{\hbar^2\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)(\ell-(m+1))(\ell+m+2)}} L_- y_\ell^{m+2}$$

وبالتكرار نجد

$$y_\ell^m = \frac{1}{\hbar^{\ell-m}\sqrt{(\ell-m)(\ell-m-1)\ldots 1\cdot(\ell+m+1)\ldots 2\ell}} L_-^{\ell-m} y_\ell^\ell$$

نتمم الجداءات $(\ell+m+1)\ldots 2\ell$ في المخرج للوصول إلى عاملي $2\ell$ بحيث نحصل على

$$y_\ell^m = \frac{1}{\hbar^{\ell-m}}\sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!(2\ell)!}} L_-^{\ell-m} y_\ell^\ell \tag{1.39}_-$$

وعلى نفس النحو إذا انطلقنا بتطبيق $L_+$ على $y_\ell^{-\ell}$ :

$$y_\ell^m = \frac{1}{\hbar^{\ell-m}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!(2\ell)!}} L_+^{\ell+m} y_\ell^{-\ell} \tag{1.39}_+$$

## 6.1- الدالات التوافقية الكروية وكثيرات حدود لوجاندر Legendre

تشكل كثيرات حدود لوجاندر قاعدة للفضاءات الهيلبرتية ذات المربع الجموع على المجال [-1, +1].

**تعريف 2** :

نسمي مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة $\ell$ المعرفة بالعلاقة التالية

$$\varphi_\ell(x) = \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \qquad (1.40)_1$$

كثيرات حدود لوجاندر.

نبرهن أن هذه الدالات متعامدة بأن نكامل بالتجزئة كما فعلنا في تحديد ثابتة التنظيم لـ $y_\ell^m$. لنأخذ كثيرتي حدود $\varphi_n$ و $\varphi_m$ ولنفرض أن $n > m$ ؛ جداؤهما السلمي هو بعد المكاملة مرة واحدة بالتجزئة، حيث ينعدم الحد المكامل

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = -\int_{-1}^{+1}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx$$

ثم نكرر لنحصل بالمكاملة بالتجزئة n مرة على التكامل

$$= (-1)^n\int_{-1}^{+1}\left[\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\right](x^2-1)^n dx$$

وهو يساوي الصفر لأن مشتق كثير حدود من الدرجة $2m$ $m+n$ مرة مع $m+n>2m$ يساوي الصفر.

بينما $\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle$ هو

$$\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = (-1)^n\int_{-1}^{+1}\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n dx$$

إن الحد الأول في ثنائي الحد $x^{2n}$ هو الوحيد الذي يختلف مشتقه من الدرجة $2n$ عن الصفر ويساوي $(2n)!$ أما تكامل $(1-x^2)^n = (-1)^n(x^2-1)^n$ فقد حسبناه في الرقم السابق؛ وهكذا فإن

$$\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = \frac{(2n)!2(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(n!)^2\,2^{2n+1}}{2n+1}$$

إن تنظيم $\varphi_n$ للواحد $\|\varphi_n\| = 1$ يعني ضربه بـ $\frac{1}{n!2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ إلا أنه يفضل غالباً تنظيمه بالعلاقة

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \qquad (1.40)'$$

أي تعريف كثير حدود لوجاندر بالعلاقة

$$P_\ell(x) = \frac{1}{\ell!2^\ell}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \qquad (1.40)_2$$

وتعريف دالة لوجاندر المشاركة Associated، المتناسبة مع المشتق الـ m لـ $P_\ell$ بالعلاقة

$$P_\ell^m = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{\ell! 2^\ell}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \qquad (1.40)''$$

يعين المشتق الـ $\ell+m$ كثير حدود من الرتبة $\ell - m = 2\ell - (\ell+m)$ بـ x و $P_\ell^m$ كثير حدود من الرتبة $\ell$ بـ x : $\ell = \ell - m + m$.

لنكتب المعادلة التفاضلية (1.28) $L^2|g_\ell^m(\theta)e^{im\varphi}\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|g_\ell^m(\theta)e^{im\varphi}\rangle$ بدليل $g_\ell^m(\theta)$ وحدها، أي بعد الاشتقاق بالنسبة لـ φ، لنجد

$$-\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}g_\ell^m(\theta) = \hbar^2\ell(\ell+1)g_\ell^m(\theta)$$

لنستبدل في هذه المعادلة المتغير $\cos\theta$ بـ x : $\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{dx}$ لتصبح على الشكل

$$-\left\{-\frac{d}{dx}\left(-(1-x^2)\frac{d}{dx}\right) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right\}g_\ell^m(x) = \ell(\ell+1)g_\ell^m(x)$$

أو

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]g_\ell^m(x) = 0 \qquad (1.41)$$

لنلاحظ أننا نتحقق بسهولة، عندما نكتب $L_+$ و $L_-$ بدليل x، أن $P_\ell^m$ متناسب مع $g_\ell^m$ وبالتالي مع $y_\ell^m$

$$L_+ : \quad \left((1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx} + \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}}\right)P_\ell^m = P_\ell^{m+1} \qquad (1.42)_+$$

$$L_- : \quad \left((1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx} - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}}\right)P_\ell^m = -(\ell+m)(\ell-m+1)P_\ell^{m-1} \qquad (1.42)_-$$

كما يمكننا التحقق مباشرة من خضوع $P_\ell^m$ للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية (1.41)، أو التحقق منها باشتقاق $(1.42)_+$ والتخلص من $P_\ell^{m+1}$ بفضل المعادلة $(1.42)_-$. ولدينا في كل الأحوال

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_\ell^m(x) = 0 \qquad (1.41)'$$

لنلاحظ بتكرار ما فعلناه للتحقق من المعادلتين (1.42) أن

$$d^{\ell+m} = \frac{(\ell-m+1)}{(x^2-1)^{1/2}}d^{\ell+m-1}$$

لأن رتبة x في $d^{\ell+m}$ هي $\ell - m = 2\ell - (\ell+m)$ بينما هي $\ell - m + 1$ في $d^{\ell+m-1}$ ومنه $(x^2-1)^{1/2}$ في المخرج؛ ومن جهة أخرى فإن عامل $x^{\ell-m}$ في $d^{\ell+m}$ هو $(\ell-m+1)$ بينما يتوقف عامل $x^{\ell-m+1}$ عند $\ell-m+2$ ومنه $\ell-m+1$ في الصورة. نكرر هذه العملية 2m مرة لنحصل على

$$d^{\ell+m} = \frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)\ \dots\ (\ell+m)}{(x^2-1)^m}d^{\ell-m} \qquad (1.43)$$

$$= \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!\,(x^2-1)^m} d^{\ell-m}$$

وبالتبديل في $(1.40)''$ نكتب $P_\ell^m$ على الشكل

$$P_\ell^m = \frac{1}{\ell!2\ell!}(1-x^2)^{m/2}(-1)^m \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell \quad (1.40)'''$$

العامل $(-1)^m$ لأننا حولنا المخرج من $(x^2-1)^m$ إلى $(-1)^m(1-x^2)^m$.

تسمح لنا هذه الكتابة بالحصول على تنظيم $P_\ell^m$ بأن نضرب $(1.40)''$ و $(1.40)'''$ ببعضهما ثم المكاملة بالتجزئة $\ell - m$ مرة لنحصل، نظراً لـ $(1.40)'$ على

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell^m(x)P_\ell^m(x)dx = \frac{2}{(2\ell+1)}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \quad (1.44)$$

يدخل التكامل بالتجزئة $\ell - m$ إشارة ناقص بحيث لا يبقى إلا $(-1)^\ell$ التي تدخل في حساب الجداء $\int P_\ell(x)P_\ell(x)dx$.

وبما أن $P_\ell^m$ تخضع لنفس المعادلة $(1.41)$ التي تخضع لها $g_\ell^m$ وبالتالي $y_\ell^m = g_\ell^m e^{im\varphi}$ المنظمة للواحد فإننا سنكتب $y_\ell^m$ على الشكل

$$y_\ell^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\theta)e^{im\varphi} \quad (1.45)$$

لدينا بشكل خاص

$$y_\ell^o = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}P_\ell(\theta) \quad (1.45)'$$

لنعطي أخيراً في نهاية هذه الفقرة بعض قيم $y_\ell^m$ من أجل القيم الصغيرة لـ $\ell$ و $m$ :

$$\begin{cases} y_0^0 = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ y_1^1 = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi} \\ y_1^0 = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta \\ y_1^{-1} = \sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ y_2^2 = \sqrt{\dfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi} \\ y_2^1 = -\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{i\varphi} \\ y_2^0 = \sqrt{\dfrac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\ y_2^{-1} = \sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{-i\varphi} \\ y_2^{-2} = \sqrt{\dfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\varphi} \end{cases} \quad (1.46)$$

## 7.1– التمثيل التانسوري لزمرة الدورانات SO(3)

تشكل الدالات التوافقية الكروية، مثلها مثل كثيرات حدود لوجاندر قاعدة للفضاءات الهيلبرتية ذات المربع الجموع على المجال $[-1, +1]$ ولدينا، من أجل مختلف قيم $\ell$ : $\ell = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ ، $\ell$ فضاء جزئياً بـ $(2\ell + 1)$ بعداً، حسب القيم التي يأخذها العدد الكمومي المغنطيسي، مسقط العزم الزاوي على اتجاه معين. يمكننا والحال هذه كتابة الفضاء الهيلبرتي على شكل مجموع مباشر لهذه الفضاءات (المتعامدة والمنظمة)

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{H}_\ell \quad (1.47)$$

حيث أبعاد $\mathcal{H}_\ell$ هي على الترتيب 1، 3، 5، 7، الخ.

هو ممثل المؤثر $\psi(\vec{r})$ الذي يفعل بمتجهة الحالة $D_g = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{L}}$ قلنا من جهة أخرى إن المؤثر عن جسيم واحد ومعرفان بمتجهة الحالة $g = e^{\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}} \in SO(3)$. وعندما يكون لدينا جسيمان عوضاً $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ فإن المؤثر الدوراني الذي يفعل بـ $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ هو الجداء التانسوري للمؤثرين $g_1$ الفاعل بـ $\vec{r}_1$ و $g_2$ الفاعل بـ $\vec{r}_2$، أي إنه المصفوفة $g_1 \otimes g_2$ بتسعة سطور وتسعة أعمدة الفاعلة في الفضاء ذي الأبعاد التسعة، في الإحداثيات الكروية $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ و $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$، المؤلفة من جداء كل مركبة من

الفضاء الأول بكل مركبات الفضاء الثاني؛ وكذلك فإن المؤثر على متجهة الحالة $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ هو الجداء التانسوري لـ $D_{g_1}$ و $D_{g_2}$: $D_{g_1} \otimes D_{g_2}$

$$g_1 \otimes g_2 \rightarrow \left(D_{g_1} \otimes D_{g_2}\right)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{-i\theta_1 \ell_1} \otimes e^{-i\theta_2 \ell_2}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \qquad (1.48)$$

الجداء التانسوري $D_{g_1} \otimes D_{g_2}$ تسعة أبعاد – جداء المولدات بتسعة أبعاد – إلا أنه من الممكن كتابته على الشكل

$$D_{g_1} \otimes D_{g_2} = D^0 \oplus D^1 \oplus D^2 \qquad (1.49)$$

وكتابة الفضاء الذي تفعل فيه على الشكل

$$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

ونقول إن الجداء التانسوري قد حُلّل إلى مجموع ثلاثة تمثيلات غير قابلة للاختزال، ($9 = 1 + 3 + 5$) وعلى نفس النحو فإنه من الممكن كتابة الجداء التانسوري من الرتبة الثالثة، المؤثر على $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$، $i = 1, 2, 3$، أي كتابة المصفوفة $(3 \times 3 \times 3)$ بـ 27 بعداً وكتابة تمثيلها على $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ بتحليله إلى مجموع تمثيلات غير قابلة للاختزال هي التمثيلات الثلاثة السابقة مضافاً إليها $\ell_3$ بـ بسبعة أبعاد و $\ell_4$ بتسعة أبعاد

$$D_{g_1} \otimes D_{g_2} \otimes D_{g_2} = 3D^0 \oplus D^1 \oplus D^2 \oplus D^3 \oplus D^4 \qquad (1.49)'$$

والفضاء الذي يفعل فيه

$$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

$27 = 3 \times 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ وهكذا.

ونكتب بصورة عامة اختزال جداء تانسوري لتمثيلين غير قابلي الاختزال $D^\alpha$ و $D^\beta$، حيث $\alpha$ و $\beta$ تحددان فضائي التمثيل، إلى مجموع مباشر من التمثيلات غير قابلة الاختزال على الشكل

$$D^\alpha \otimes D^\beta = \bigoplus_\tau a_\tau D^\tau$$

حيث يحدد $\tau$ فضاء التمثيل و $a_\tau$ عدد صحيح هو عدد التمثيلات في هذا الفضاء.

<u>تعريف 3</u> :

نعني بعدم قابلية الاختزال Irrudicible عدم وجود أي فضاء جزئي في الفضاء ذي الـ $(2\ell + 1)$ بعداً يتم فيه تبادل متجهات القاعدة فيما بينها نتيجة فعل المؤثرات، المولدات $L_1, L_2, L_3$، الخ. أو بتعبير آخر عدم وجود مصفوفة جزئية تبقى مستقرة بفعل هذه المؤثرات : تبادل هذه المؤثرات كل عناصر القاعدة – كل الدالات التوافقية الكروية فيما بينها.

إن المصفوفتين المعبرتين عن $L_3$ و $L^2$ قطريتان أما مصفوفة $L_-$ فهي المصفوفة التي كل عناصرها تساوي الصفر ماعدا العناصر فوق القطرية – السطر $m$ والعمود $m + 1$ – حسب $(1.38)'$ – حيث

رتبنا متجهات القاعدة من الأعلى نحو الأسفل $\begin{pmatrix} |\ell, +\ell\rangle \\ \vdots \\ |\ell, m+1\rangle \\ |\ell, m\rangle \\ \vdots \\ |\ell, -\ell\rangle \end{pmatrix}$ ومصفوفة $L_-^\dagger = L_+$ هي تلك كل عناصرها تساوي الصفر ماعدا العناصر تحت القطرية – السطر $m$ والعمود $m-1$ –.

نلخص كل ما سبق بالمبرهنة التالية

__مبرهنة 1__ :

تتعين التمثيلات التانسورية غير القابلة للاختزال للزمرة الدورانية $SO(3)$ بإعطاء عدد صحيح $\ell$، يأخذ كل القيم من الصفر إلى اللانهاية، نسميه ثقل التمثيل وذلك في فضاءات أبعادها $(2\ell + 1)$.

__ملاحظة__ :

نقول عن تمثيل لزمرة ما، $SO(3)$ هنا، إنه منتظم على اليسار إذا حقق العلاقة التالية :

$$D_g \psi(\vec{r}) = \psi(g^{-1}\vec{r}) \qquad (1.50)$$

نتبين بسهولة أن هذه العلاقة تعرف تمثيلاً لأننا إذا سمينا

$$D_{g_1} \psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) = \psi(g_1^{-1}\vec{r})$$

فإن

$$D_{g_2} D_{g_1} \psi(\vec{r}) = D_{g_2} \phi(\vec{r}) = \phi(g_2^{-1}\vec{r}) = \psi(g_1^{-1} g_2^{-1}\vec{r}) = \psi((g_2 g_1)^{-1}\vec{r})$$
$$= D_{g_2 g_1}$$

لنكتب التمثيل $D_g$ على الشكل $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{L}}$ وعنصر الزمرة هو $g = e^{\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}$ (لا ننسى أن $g$ المؤثر على $\vec{r}$ هو مقلوب $\mathcal{A}$).

لدينا حسب (1.50)

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{L}} \psi(\vec{r}) = \psi(e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}\vec{r})$$

وإذا أخذنا حدي النشر الأولين

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{L}\right)\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - [\omega_1\Lambda_1 + \omega_2\Lambda_2 + \omega_3\Lambda_3]\vec{r}) \qquad (1.51)$$

ثم بدلنا المولدات $\Lambda_i$، بقيمها وقابلنا أمثال $\omega_1$، $\omega_2$، $\omega_3$ في طرفي العلاقة فإننا سنجد مركبات المؤثر $\vec{L}$ المساوية لما وجدناه عندما اعتمدنا مبدأ التقابل في '(1.1) مما يعني أن تمثيل الدوران بالعلاقة

(1.50) يعرف لنا تماماً عناصر المركبات $L_1$، $L_2$، $L_3$ ويعفينا من اللجوء إلى المقارنة مع العزم الزاوي التقليدي: إن الطرف الثاني في (1.51) هو

$$\psi\left(\vec{r}-\left[\omega_1\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}+\omega_2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}+\omega_3\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$

$$=\psi\left(x-\omega_2 z+\omega_3 y,\ y+\omega_1 z-\omega_3 x,\ z-\omega_1 y+\omega_2 x\right)$$

$$=\psi(x,y,z)+\frac{\partial\psi}{\partial x}(-\omega_2 z+\omega_3 y)+\frac{\partial\psi}{\partial y}(\omega_1 z-\omega_3 x)+\frac{\partial\psi}{\partial z}(-\omega_1 y+\omega_2 x)$$

وهكذا فإن المضروب بـ $-\omega_1$ في الطرف الثاني يعطينا، بمقارنته مع $-\frac{i}{\hbar}\omega_1 L_1$ في الطرف الأول

$$L_x=\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

وكذلك المضروب بـ $-\omega_2$ :

$$L_y=\frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

وأخيراً المضروب بـ $-\omega_3$ :

$$L_z=\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

## 2. الحركة في حقل مركزي

### 1.2- معادلة شرودينغر بالمتغيرات الكروية

للنظر في حالة طاقة كامنة، من الشكل $U(r)$ ، غير متوقفة مباشرة على الزمن، أي في حالة قوة مشتقة من كمون، كما سميناها في الحالة التقليدية، تقتضي انحفاظ العزم الخطي بالإضافة إلى انحفاظ الطاقة. نكتب معادلة شرودينغر في هذه الحالة على الشكل

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+U(r)\right]\left|\psi(\vec{r})\right\rangle=E\left|\psi(\vec{r})\right\rangle \tag{2.1}$$

ونكتب المؤثر اللابلاسي $\nabla^2$ بالإحداثيات الكروية $r,\varphi,\theta$ كما فعلنا في الفقرة السابقة بالاستعانة بالمصفوفة الجاكوبية (1.25)التي حسبنا بواسطتها $\frac{\partial}{\partial x}$، $\frac{\partial}{\partial y}$، $\frac{\partial}{\partial z}$. نجد أن هذا المؤثر هو

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2 tg\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2.2}$$

مع العزم الزاوي $L_1$ ، $L_2$ ، $L_3$ ويعفينا من اللجوء إلى المقارنة مع العزم الزاوي (1.50) يعرف لنا تماماً عناصر المركبات التقليدي : إن الطرف الثاني في (1.51) هو

$$\psi\left(\vec{r} - \left[\omega_1\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix} + \omega_2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix} + \omega_3\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$

$$= \psi\left(x - \omega_2 z + \omega_3 y,\ y + \omega_1 z - \omega_3 x,\ z - \omega_1 y + \omega_2 x\right)$$

$$= \psi(x, y, z) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(-\omega_2 z + \omega_3 y\right) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\omega_1 z - \omega_3 x\right) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(-\omega_1 y + \omega_2 x\right)$$

في الطرف الأول $-\frac{i}{\hbar}\omega_1 L_1$ بمقارنته مع في الطرف الثاني يعطينا، وهكذا فإن المضروب بـ $-\omega_1$

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

وكذلك المضروب بـ $-\omega_2$ :

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

وأخيراً المضروب بـ $-\omega_3$ :

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

## 2. الحركة في حقل مركزي

### 1.2– معادلة شرودينغر بالمتغيرات الكروية

لننظر في حالة طاقة كامنة، من الشكل $U(r)$ ، غير متوقفة مباشرة على الزمن، أي في حالة قوة مشتقة من كمون، كما سميناها في الحالة التقليدية، تقتضي انحفاظ العزم الخطي بالإضافة إلى انحفاظ الطاقة. نكتب معادلة شرودينغر في هذه الحالة على الشكل

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + U(r)\right]\left|\psi(\vec{r})\right\rangle = E\left|\psi(\vec{r})\right\rangle \tag{2.1}$$

ونكتب المؤثر اللابلاسي $\nabla^2$ بالإحداثيات الكروية $r, \varphi, \theta$ كما فعلنا في الفقرة السابقة بالاستعانة بالمصفوفة الجاكوبية (1.25)التي حسبنا بواسطتها $\frac{\partial}{\partial x}$ ، $\frac{\partial}{\partial y}$ ، $\frac{\partial}{\partial z}$. نجد أن هذا المؤثر هو

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \mathrm{tg}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{2.2}$$

الذي نصيغه على الشكل

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad (2.2)'$$

بحيث يظهر المؤثر $L^2$، مربع مؤثر العزم الزاوي، كما حصلنا عليه في (1.28)، وتأخذ معادلة شرودينغر الشكل التالي

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{r^2\hbar^2}\right) + U(r)\right]\left|\psi(r,\varphi,\theta)\right\rangle = E\left|\psi(r,\varphi,\theta)\right\rangle \qquad (2.3)$$

يحدد المؤثر $L^2$ توقف متجهة الحالة على المتغيرين الزاويين $\varphi$ و $\theta$ اللذين يعينان العددين $\ell$ و $m$، ونكتب متجهة الحالة بفصل هذين المتغيرين عن $r$ على الشكل (1.34)

$$\left|\psi(r,\varphi,\theta)\right\rangle = \left|R(r)g_\ell^m(\theta)e^{im\varphi}\right\rangle$$

$$= \left|R(r)y_\ell^m(\theta,\varphi)\right\rangle$$

حيث $y_\ell^m$ الدالة التوافقية الكروية المقابلة للعددين $\ell, m$. وبما أن $L^2\left|y_\ell^m(\theta,\varphi)\right\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)\left|y_\ell^m\right\rangle$ فالمعادلة (2.3) تأخذ الشكل التالي بعد التخلص من العامل $y_\ell^m$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R(r) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))R(r) = 0 \qquad (2.4)$$

لنلاحظ قبل متابعة البحث أن المعادلة (2.3) تقابل المعادلة التقليدية للهاميلتوني في الإحداثيات الكروية

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

وذلك بمقابلة الاندفاع $P_r$، مسقط $\vec{P}$ على اتجاه القطر $\vec{r}$ بالمؤثر المتناظر وذاتي الترافق

$$P_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{P} + \vec{P}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

إن الحد الثاني في الطرف الأيمن هو، كمؤثر على $\psi$ : $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\psi\right) = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\nabla}\psi + \frac{2}{r}\psi$، لأن $\frac{2}{r} = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\nabla}$، ومن جهة أخرى فإن $\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$ لأن $\vec{\nabla} \equiv \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}$، ومنه

$$P_r\psi = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{r}r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right)$$

أو

$$P_r\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi)$$

وأخيراً

$$P_r^2 = -\hbar^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

لنلاحظ كذلك أن المعادلة القطرية Radial (2.4) لا تحتوي على العدد المغنطيسي m وهذا طبيعي لأن الحل الذي سنحصل عليه بدليل $\ell$ متدن $2\ell + 1$ مرة.

## 2.2- حل المعادلة القطرية

نستبدل في هذه المعادلة بـ R الدالة

$$\chi(r) = rR(r) \qquad (2.5)$$

لنتخلص من $r^2$ بين القوسين ولتصبح (2.4) على الشكل

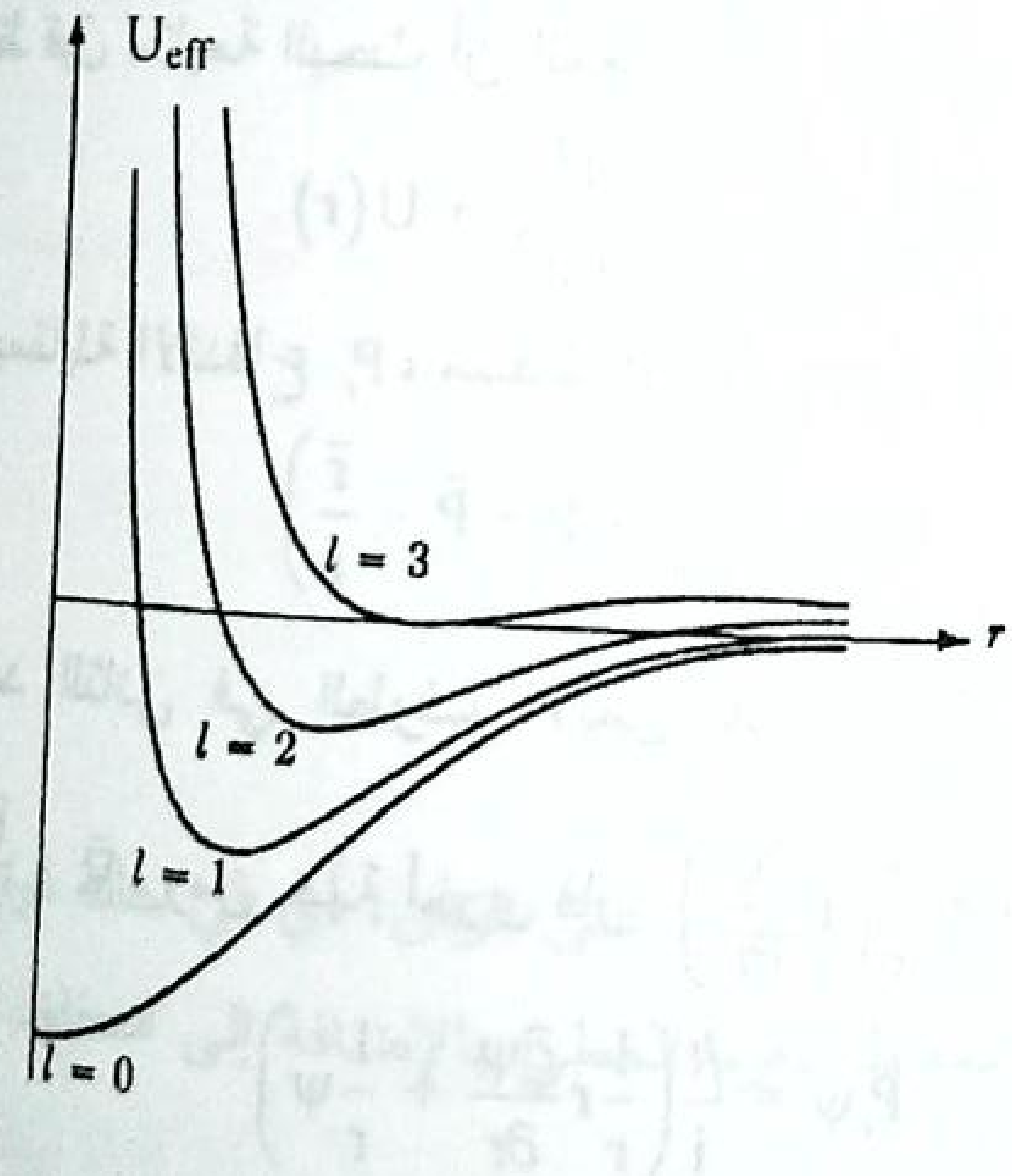
$$\chi'' + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U(r)\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\chi = 0 \qquad (2.6)$$

حيث حذفنا العامل $\frac{1}{r}$.

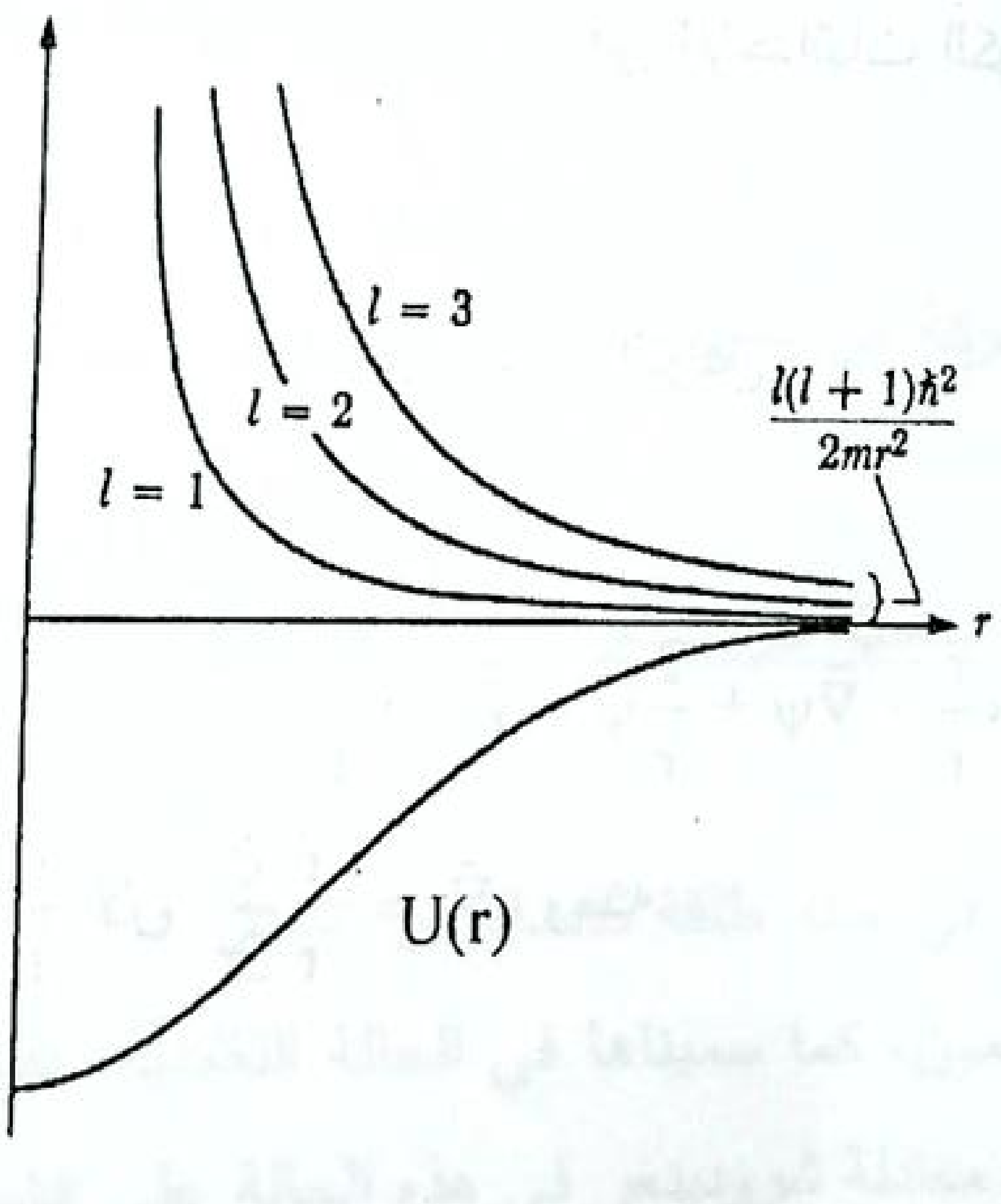
إن المعادلة (2.6) معادلة ببعد واحد، درسناها بالتفصيل في الفصل السابق وبينا على وجه الخصوص أن طيف الطاقة طيف غير متدن. يمكننا وضع المعادلة (2.6) في صيغة مقابلة تماماً لـ ((2.4).2) وللصيغة التقليدية في ذات الوقت بأن نعرف الكمون الفعال ولنرمز له بـ $U_{eff}$ على النحو التالي

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = U(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \qquad (2.7)$$

الحد الثاني يقابل القوة النابذة التي تحد من عمق بئر الكمون، الشكل. 1.




الشكل. 1b




الشكل. 1a

يبين الشكل.1a صورة كمون قطري نموذجي $U(r)$ لقوة جاذبة وثلاث صور نموذجية هي أيضاً لكمون قوة نابذة من أجل بعض قيم العزم الزاوي المتناسبة عكساً مع مربع البعد القطري عن مركز الكمون. أما الشكل.1b فيعطي صور الكمون الفعال في الحالات الأربعة السابقة. تشبه حالة الكمون الفعال من أجل $\ell = 1, 2$ حالة الكمون الفعال التقليدي (I. §4.4).

يمكننا تعيين الخطوط العريضة لحل المعادلة (2.6) انطلاقاً من الاعتبارات التالية. إذا كان الكمون منتهياً في كل الفضاء فإن $\chi(r)$ منته أيضاً ويساوي الصفر من أجل $r = 0$ حسب (2.5)

$$\chi(0) = 0 \tag{2.8}$$

وسيبقى هذا الشرط محققاً في حالة كمون متناه إلى اللانهاية من أجل $r \to 0$ كما سنرى في الفقرة القادمة. أما شرط تنظيم $\chi$ فهو

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = \int_0^\infty |\chi|^2 dr$$

حيث لم نأخذ بعين الاعتبار إلا القيم الموجبة لـ $r$ نظراً لـ (2.8) : الحركة من جانب واحد بالنسبة للنقطة O.

نحدد مستويات الطاقة المنفصلة بالأرقام $n$ : 0، 1، 2، ... حيث $n_o$ هي طاقة القاع والطاقات التالية محددة بعدد العقد – بعدد المرات التي تنعدم فيها متجهة الحالة. وبما أن الهاميلتوني تبادلي مع $L^2$ و $L_3$ فإن الأعداد $n$، $\ell$، $m$ تعين كلياً متجهة الحالة، وتسمى تقليدياً على الترتيب العدد الكمومي القطري والعدد الكمومي المداري والعدد الكمومي السمتي أو المغنطيسي. يرمز عادة للأعداد الكمومية المدارية $\ell = 0, 1, 2, 3...$ بالأسماء S، P، D، F ومن بعدها بالترتيب الأبجدي g، h، i ومنشأ هذه التسمية دراسة الأطياف الضوئية حيث S من Sharp، حاد و P من Principal رئيسي ثم المنتشر والدقيق. ويوضع رقم مستوى الطاقة على يسار الحرف فـ $^2D$ مثلاً تعني $n = 2$ و $\ell = 2$، الخ.

سنفرض الآن أن

$$\lim_{r \to 0} U(r) r^2 = 0 \tag{2.9}$$

وهو محقق من أجل $U(r) \sim r^n$ حيث $n \geq -2$، ومحقق بشكل خاص من أجل الحقل الكهربائي الراكد $U \sim \frac{1}{r}$، ونبحث عن حل $R(r)$ على شكل كثير حدود بـ $r$ حده الأول $r^s$ وهو الحد الوحيد الذي نحتفظ به في جوار النقطة O – كل الحدود التي تليه تتناهى نحو الصفر بأسرع من تناهيه بالذات. لنكتب (2.4) في جوار النقطة صفر آخذين بعين الاعتبار (2.9) وكون $Er^2 \to 0$ في كل الأحوال :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \ell(\ell + 1) R = 0 \tag{$2.4)_0$}$$

ولنبدل فيها $R$ بـ $cr^s$ فنجد أن

$$s(s + 1) - \ell(\ell + 1) = 0$$

ومنه، إما

$$s = \ell$$

وإما

$$s = -(\ell + 1)$$

هذه الإمكانية الثانية مرفوضة لأنها تؤدي إلى حل لامنته لـ $R$ عندما تتناهى $r$ نحو الصفر. والنتيجة إذاً أن $s = \ell$ وأن $R$ من أجل $\ell$ معطاة، ونرمز له بـ $R_\ell$، متناسب مع $r^\ell$ :

$$R_\ell \approx c^{\ell e} r^\ell \tag{2.10}$$

يمكننا تعيين الخطوط العريضة لحل المعادلة (2.6) انطلاقاً من الاعتبارات التالية. إذا كان الكمون منتهياً في كل الفضاء فإن $\chi(r)$ منته أيضاً ويساوي الصفر من أجل $r = 0$ حسب (2.5)

$$\chi(0) = 0 \tag{2.8}$$

وسيبقى هذا الشرط محققاً في حالة كمون متناه إلى اللانهاية من أجل $r \to 0$ كما سنرى في الفقرة القادمة. أما شرط تنظيم $\chi$ فهو

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = \int_0^\infty |\chi|^2 dr$$

حيث لم نأخذ بعين الاعتبار إلا القيم الموجبة لـ $r$ نظراً لـ (2.8) : الحركة من جانب واحد بالنسبة للنقطة O.

تحدد مستويات الطاقة المنفصلة بالأرقام $n$ : 0، 1، 2، ... حيث $n_o$ هي طاقة القاع والطاقات التالية محددة بعدد العقد – بعدد المرات التي تنعدم فيها متجهة الحالة. وبما أن الهاميلتوني تبادلي مع $L^2$ و $L_3$ فإن الأعداد $n$، $\ell$، $m$ تعين كلياً متجهة الحالة، وتسمى تقليدياً على الترتيب العدد الكمومي القطري والعدد الكمومي المداري والعدد الكمومي السمتي أو المغنطيسي. يرمز عادة للأعداد الكمومية المدارية $\ell = 0, 1, 2, 3 ...$ بالأسماء S، P، D، F ومن بعدها بالترتيب الأبجدي g، h، i ومنشأ هذه التسمية دراسة الأطياف الضوئية حيث S من Sharp، حاد و P من Principal رئيسي ثم المنتشر والدقيق. ويوضع رقم مستوى الطاقة على يسار الحرف فـ $^2D$ مثلاً تعني $n = 2$ و $\ell = 2$، الخ.

سنفرض الآن أن

$$\lim_{r\to 0} U(r) r^2 = 0 \tag{2.9}$$

وهو محقق من أجل $U(r) \sim r^n$ حيث $n \geq -2$، ومحقق بشكل خاص من أجل الحقل الكهربائي الراكد $U \sim \frac{1}{r}$، ونبحث عن حل $R(r)$ على شكل كثير حدود بـ $r$ حده الأول $r^s$ وهو الحد الوحيد الذي نحتفظ به في جوار النقطة O – كل الحدود التي تليه تتناهى نحو الصفر بأسرع من تناهيه بالذات. لنكتب (2.4) في جوار النقطة صفر آخذين بعين الاعتبار (2.9) وكون $Er^2 \to 0$ في كل الأحوال :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \ell(\ell+1) R = 0 \tag{$2.4)_0$}$$

ولنبدل فيها $R$ بـ $cr^s$ فنجد أن

$$s(s+1) - \ell(\ell+1) = 0$$

ومنه، إما

$$s = \ell$$

وإما

$$s = -(\ell + 1)$$

هذه الإمكانية الثانية مرفوضة لأنها تؤدي إلى حل لامنته لـ $R$ عندما تتناهى $r$ نحو الصفر. والنتيجة إذاً أن $s = \ell$ وأن $R$ من أجل $\ell$ معطاة، ونرمز له بـ $R_\ell$، متناسب مع $r^\ell$ :

$$R_\ell \approx c^{te} r^\ell \tag{2.10}$$

إن احتمال وجود الجسيم في المجال $[r, r+dr]$ البعيد بالمقدار $r$ عن مركز الحقل هو $r^2|R^2|$ ويتناسب إذاً مع $r^{2(\ell+1)}$ ويتناهى بسرعة نحو الصفر كلما كان $\ell$ كبيراً.

## 3.2- حالة جسيم حر $U(r) = 0$ : الموجات الكروية

عندما تكون حصيلة القوى المطبقة على الجسيم مساوية للصفر، عندما يكون الكمون مساوياً للصفر، سندرس هنا المعادلة (2.4) في أبسط الحالات. نكتب الطاقة بدليل متجهة الموجة $k$ :

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{2.11}$$

لأننا في حالة طيف متصل – عوضاً عن $n$ وبدليل $\ell$ على الشكل ونكتب متجهة الحالة بدليل $k$ – المتغير المتصل

$$\psi_{k\ell m} = R_{k\ell}(r)\, y_\ell^m(\theta, \varphi) \tag{2.12}$$

والمعادلة التفاضلية التي يحققها $R_{k\ell}$ هي (2.4) مع $U = 0$، أي المعادلة

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{k\ell}}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R_{k\ell} = 0 \tag{2.13}$$

أو

$$R''_{k\ell} + \frac{2}{r}R'_{k\ell} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R_{k\ell} = 0 \tag{2.13'}$$

ننظم $\psi_{k\ell m}$ على النحو التالي

$$\int \overline{\psi_{k'\ell'm'}}\, \psi_{k\ell m} d\tau = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}\delta\left(\frac{k'-k}{2\pi}\right)$$

حيث $d\tau$ هو عنصر الحجم. لا ننسى أننا كتبنا علاقة التعامد بدليل $p$ على الشكل ((2.15).2)

$$\int \psi_{p'}\psi_p d\tau = \delta\left(\frac{p'-p}{2\pi\hbar}\right) = \delta\left(\frac{k'-k}{2\pi}\right)$$

ينتج التعامد بين الدالتين $\psi_{k\ell m}$ و $\psi_{k'\ell'm'}$ من أجل العددين الكموميين $\ell$ و $m$ بواسطة الدالتين التوافقيتين الكرويتين $y_\ell^m$ و $y_{\ell'}^{m'}$. يبقى إذاً من أجل الحد القطري

$$\int_0^\infty R_{k'\ell}R_{k\ell}r^2dr = \delta\left(\frac{k'-k}{2\pi}\right) \tag{2.14}$$

$r^2dr$ هو عنصر الحجم الذي لا يتوقف على الزوايا $\varphi$ و $\theta$. نكتب (2.14) بدليل الطاقة ((1.9).2)

$$\int_0^\infty R_{E'\ell}R_{E\ell}r^2dr = \delta(E'-E) \tag{2.14'}$$

وحسب ((2.17).2) فإن

$$R_{E\ell} = \left(\frac{1}{2\pi}\frac{dk}{dE}\right)^{1/2} R_{k\ell} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2\pi k}}R_{k\ell} \tag{2.15}$$

تأخذ '(2.13) من أجل $\ell = 0$ بعد ضرب كل حدودها بـ r الشكل التالي

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_{k0}) + k^2 rR_{k0} = 0 \tag{2.16}$$

إن حل هذه المعادلة المنتهي من أجل $r = 0$ والمنظم وفق الشرط (2.14)[2] هو

$$R_{k0} = 2\frac{\sin kr}{r} \tag{2.17}$$

أما من أجل $\ell \neq 0$ فإننا نفتش عن حل من الشكل

$$R_{k\ell}(r) = r^{\ell}\chi_{k\ell}(r)$$

الذي يعطينا بالتبديل في '(2.13) المعادلة التفاضلية التالية بالدالة $\chi_{k\ell}$ :

$$\chi''_{k\ell}(r) + \frac{2(\ell+1)}{r}\chi'_{k\ell}(r) + k^2\chi_{k\ell}(r) = 0$$

نلاحظ أننا عندما نشتق هذه المعادلة مرة أخرى فإنه من الممكن إعادتها إلى معادلة من الدرجة الثانية من جديد باستبدال $\chi'_{k\ell}$ بـ $r\chi_{k,\ell+1}$ :

$$\chi_{k,\ell+1} = \frac{\chi'_{k\ell}}{r} \tag{2.18}$$

أي أن المعادلة

$$\chi'''_{k\ell} + \frac{2(\ell+1)}{r}\chi''_{k\ell} + \left(k^2 - \frac{2(\ell+1)}{r^2}\right)\chi'_{k\ell} = 0$$

هي

$$\chi''_{k,\ell+1} + \frac{2(\ell+2)}{r}\chi'_{k,\ell+1} + k^2\chi_{k,\ell+1} = 0$$

نعمم بالتكرار العلاقة (2.18) ونكتب

$$\chi_{k\ell} = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}\chi_{k0} \tag{2.18'}$$

---

[2] لأن $4\int_0^{\infty}\frac{\sin k'r \sin kr}{r^2}r^2dr = 2\pi\delta(k'-k)$ بحيث يتحول $\sin k'r\sin kr = -\frac{1}{4}\left(e^{i(k'+k)r} + e^{-i(k'+k)r} - e^{i(k'-k)r} - e^{-i(k'-k)r}\right)$ التكامل $\int_0^{\infty}$ إلى $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i(k'+k)r} - e^{i(k'-k)r}\right)dr$ ؛ تكامل الحد الأول مهمل لأن $k + k'$ موجب دوماً.

**ملاحظة :** $\vec{r}$، $\vec{p}$، $\vec{L}$، مثلها مثل أي جداء متجهي تدخل فيه، تخضع منشأ العلاقة (2.18) هو كون المؤثرات لعلاقات المبادلة '(1.2) على سبيل المثال (التي كتبناها من أجل $\vec{L}$ و $\vec{r}$) وعن كل ما ينتج عنها من وجود مؤثرات تزيد أو تنقص من قيم $\ell$. وهذا حال المؤثر $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ وما يفعله بـ $\ell$.

ولدينا في نهاية الأمر

$$R_{k\ell} = (-1)^{\ell}\, 2\frac{r^{\ell}}{k^{\ell}}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}\frac{\sin kr}{r} \qquad (2.19)$$

اخترنا كما في حالة الدالات الكروية $(-1)^{\ell}$ ووضعنا $k^{\ell}$ في المخرج لتسهيل التنيظم.

يمكن التعبير عن الحل (2.19) للمعادلة التفاضلية (2.13) بواسطة دالات بسل Bessel الكروية ذات الترتيب نصف الصحيح، $J_{\ell+\frac{1}{2}}$ :

$$R_{k\ell} = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr) = 2kJ_{\ell}(kr) \qquad (2.20)$$

أي المرتبطة بعلاقة التكرار

$$J_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \qquad [3](2.21)$$

حيث $x = kr$.

لنفتش عن القيم المقاربة لـ $R_{k\ell}$ من أجل $r \to \infty$ و $r \to 0$ مع الملاحظة أن الاشتقاق مرة واحدة لـ $\frac{\sin kr}{r}$ يعطينا $\frac{kcoskr}{r} - \frac{\sin kr}{r^2}$؛ وهكذا فإن الحد الذي يتناقص ببط، من أجل $r \to \infty$ هو الحد الذي نحصل عليه باشتقاق $\sin kr$ $\ell$ مرة لأنه متناسب مع $\frac{1}{r^{\ell}}$ بينما الحدود التالية متناسبة مع $\frac{1}{r^n}$، $n > \ell$؛ والاشتقاق $-\frac{d}{dr}$ مرة واحدة (لا تنسى $(-1)^{\ell}$) يعني الانتقال من المتغير $kr$ إلى $kr - \frac{\pi}{2}$؛ وهكذا فإن القيمة المقاربة لـ $R_{k\ell}$ في جوار اللانهاية هي

$$R_{k\ell} \approx \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{\pi\ell}{2}\right) \qquad (2.22)$$

وهو مقدار مثله مثل $R_{k0}$ منظم وفق الشرط (2.17)، مما يبرر الشكل الذي أعطيناه للعوامل في (2.19).

أما من أجل القيم الصغيرة لـ $r$ فإننا ننشر $\sin kr$ ولا نحتفظ إلا بالحد الذي يعطي أصغر قوة لـ $r$ أي تلك التي تؤدي إلى القوة صفر في الاشتقاق بالنسبة لـ $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}$. نكتب إذاً

---

[3] لدينا دالات بسل الأولى بدليل المتغير x

$$J_0 = \frac{\sin x}{x} \quad ، \quad J_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad ، \quad J_2 = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3\cos x}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}\frac{\sin kr}{r} \approx \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}(-1)^{\ell}\frac{(kr)^{2\ell+1}}{r(2\ell+1)!}$$

إن اشتقاق $r^{2\ell}$ بالنسبة للمؤثر التفاضلي $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ يخفض القوة درجتين : $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)r^{2\ell} = 2\ell r^{2\ell-2}$، وبالتالي نصل بتكرار العملية $\ell$ مرة إلى القوة المطلوبة $\ell = 0$ مع العامل $2\ell\cdot 2\ell-2\ldots 2\ell-2(\ell-1)$ أي أن

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}\frac{(-1)^{\ell}(kr)^{2\ell+1}}{r(2\ell+1)!} = \frac{(-1)^{\ell}k^{2\ell+1}\cdot 2\ell\cdot 2\ell-2\ldots 2\ell-2(\ell-1)}{(2\ell+1)!}$$

يحذف هذا العامل كل الحدود الزوجية في عاملي $(2\ell+1)$ ونحصل على

$$= \frac{(-1)^{\ell}k^{2\ell+1}}{1.3.5\ldots 2\ell+1} = \frac{(-1)^{\ell}k^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$$

حيث الرمز !! يعني المضاريب من نفس السوية – مفردة أو زوجية – وهي فردية هنا.

ولدينا أخيراً بالعودة إلى (2.19) المقاربة التالية في جوار الصفر

$$R_{k\ell} = \frac{2k^{\ell+1}r^{\ell}}{(2\ell+1)!!} \qquad (2.23)$$

ويختفي العامل $(-1)^{\ell}$ في $R_{k\ell}$ نتيجة ضربه بـ $(-1)^{\ell}$ الناتج عن نشر $\sin kr$ في جوار الصفر. تتفق هذه النتيجة مع ما وصلنا إليه في (2.10) عند تعيينا للخطوط العريضة لحل المعادلة التفاضلية (2.6).

## 4.2– حالة جسيم حر : الموجات المستوية

تشكل متجهات الحالة $\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi)$ قاعدة تامة لنشر أي متجهة حالة في الإحداثيات الكروية حيث فصلنا بين المتغيرين الزاويين المعبر عنهما بالدالات التوافقية الكروية التي تعين العزم الزاوي والمتغير القطري المعبر عنه بواسطة دالات بسل :

$$\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) = R_{k\ell}(r)y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi) = 2kJ_{\ell}(kr)y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi) \qquad (2.24)$$

لنكتب بدليل هذه المتجهات متجهة حالة جسيم حر – حصيلة القوة مساوية للصفر كما في الرقم السابق– ينتشر على شكل موجة مستوية في اتجاه معين، لنسمه المحور السمتي OZ الذي يعمل الزاوية $\theta$ مع الاتجاه القطري $r$ . $z = r\cos\theta$ ولما كان اتجاه الانتشار محور تناظر فإن الحدود التابعة لـ $\varphi$ – $m$ – ثابتة وتساوي الصفر وكذلك فإن $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k$ ثابتة فرضاً لأن الجسيم حر ولا يبقى من المتغيرات الثلاث التي تحدد متجهات القاعدة إلا $\ell$ وحده. لدينا إذاً

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty}a_{\ell}\psi_{k\ell 0} = \sum_{\ell=0}^{\infty}a_{\ell}R_{k\ell}(r)y_{\ell}^{0}(\theta) \qquad (2.25)$$

لنكتب الطرف الثاني في هذه العلاقة بدليل '(1.45)، (2.19) و (2.20) على الشكل

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}\frac{\sin kr}{r} \approx \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}(-1)^{\ell}\frac{(kr)^{2\ell+1}}{r(2\ell+1)!}$$

إن اشتقاق $r^{2\ell}$ بالنسبة للمؤثر التفاضلي $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ يخفض القوة درجتين : $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)r^{2\ell} = 2\ell r^{2\ell-2}$، وبالتالي نصل بتكرار العملية $\ell$ مرة إلى القوة المطلوبة $\ell = 0$ مع العامل $2\ell \cdot 2\ell - 2 \ldots 2\ell - 2(\ell - 1)$ أي أن

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell}\frac{(-1)^{\ell}(kr)^{2\ell+1}}{r(2\ell+1)!} = \frac{(-1)^{\ell}k^{2\ell+1}\cdot 2\ell\cdot 2\ell-2\ldots\cdot 2\ell-2(\ell-1)}{(2\ell+1)!}$$

يحذف هذا العامل كل الحدود الزوجية في عاملي $(2\ell + 1)$ ونحصل على

$$= \frac{(-1)^{\ell}k^{2\ell+1}}{1.3.5\ldots 2\ell+1} = \frac{(-1)^{\ell}k^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$$

حيث الرمز !! يعني المضاريب من نفس السوية – مفردة أو زوجية – وهي فردية هنا.

ولدينا أخيراً بالعودة إلى (2.19) المقاربة التالية في جوار الصفر

$$R_{k\ell} = \frac{2k^{\ell+1}r^{\ell}}{(2\ell+1)!!} \qquad (2.23)$$

ويختفي العامل $(-1)^{\ell}$ في $R_{k\ell}$ نتيجة ضربه بـ $(-1)^{\ell}$ الناتج عن نشر $\sin kr$ في جوار الصفر. تتفق هذه النتيجة مع ما وصلنا إليه في (2.10) عند تعييننا للخطوط العريضة لحل المعادلة التفاضلية (2.6).

## 4.2– حالة جسيم حر : الموجات المستوية

تشكل متجهات الحالة $\psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi)$ قاعدة تامة لنشر أي متجهة حالة في الإحداثيات الكروية حيث فصلنا بين المتغيرين الزاويين المعبر عنهما بالدالات التوافقية الكروية التي تعين العزم الزاوي والمتغير القطري المعبر عنه بواسطة دالات بسل :

$$\psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{k\ell}(r)y_{\ell}^{m}(\theta, \varphi) = 2kJ_{\ell}(kr)y_{\ell}^{m}(\theta, \varphi) \qquad (2.24)$$

لنكتب بدليل هذه المتجهات متجهة حالة جسيم حر – حصيلة القوة مساوية للصفر كما في الرقم السابق– ينتشر على شكل موجة مستوية في اتجاه معين، لنسمه المحور السمتي OZ الذي يعمل الزاوية $\theta$ مع الاتجاه القطري $r$ . $z = r\cos\theta$ . ولما كان اتجاه الانتشار محور تناظر فإن الحدود التابعة لـ $\varphi$ – $m$ – ثابتة وتساوي الصفر وكذلك فإن $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ثابتة فرضاً لأن الجسيم حر ولا يبقى من المتغيرات الثلاث التي تحدد متجهات القاعدة إلا $\ell$ وحده. لدينا إذاً

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty}a_{\ell}\psi_{k\ell 0} = \sum_{\ell=0}^{\infty}a_{\ell}R_{k\ell}(r)y_{\ell}^{0}(\theta) \qquad (2.25)$$

لنكتب الطرف الثاني في هذه العلاقة بدليل '(1.45)، (2.19) و (2.20) على الشكل

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell P_\ell(\cos\theta)\frac{r^\ell}{k^\ell}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^\ell \frac{\sin kr}{r} \tag{2.26}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} c'_\ell y^0_\ell J_\ell(kr)$$

ننشر طرفي (2.26) كسلسلة بـ $(r\cos\theta)^n$ ونساوي بين الحدين اللذين هما من نفس القوة بـ $(r\cos\theta)$ على متجهات القاعدة.

لتحديد المقادير الثابتة $c_\ell$ – مساقط الموجة المستوية على متجهات القاعدة.

إن أعلى قوة بـ $\cos\theta$ في كثير حدود لوجاندر $(1.40)_2$ $(x = \cos\theta)$ هي $\ell$ التي نحصل عليها بالاشتقاق $\ell$ مرة. ويدخل هذا الاشتقاق المضروب $2\ell \cdot 2\ell - 1 \ldots 2\ell - \ell$ ليصبح المضروب الكلي لـ $\cos^\ell\theta$ هو

$$\frac{2\ell \cdot 2\ell - 1 \ldots 2\ell - \ell}{\ell! 2^\ell} = \frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2 2^\ell}$$

ومن جهة ثانية فإن أخفض قوة لـ $r$ في $R_{k\ell}$ هي $r^\ell$. نأخذ من أجل $\ell$ معينة قيمة $R_{k\ell}$ في جوار الصفر (2.23) ونكتب طرفي (2.26) على الشكل

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ikr\cos\theta)^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2 2^\ell}\cos^\ell\theta \cdot \frac{k^{\ell+1} r^\ell}{(2\ell+1)!!} \cdot (-1)^\ell$$

يأتي الحد $(-1)^\ell$ من كوننا لم ندخله في كتابة $R_{k\ell}$ أو $J_\ell$ في (2.26) لنلاحظ كما فعلنا في حساب ثابتة تنظيم $y^\ell_\ell$ أن $(2\ell+1)! \equiv 2^\ell \ell! .1.3.5..(2\ell+1)$ ومنه، نظراً لأن $(i)^\ell(-i)^\ell = 1$،

$$(i)^\ell = c_\ell \cdot \frac{k}{(2\ell+1)}(i)^\ell (i)^\ell$$

ولدينا أخيراً النشر التالي للموجة المستوية

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-i)^\ell (2\ell+1)\, P_\ell(\cos\theta)\frac{r^\ell}{k^\ell}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^\ell \frac{\sin kr}{kr} \tag{2.26'}$$

والتي تأخذ في المسافات البعيدة $r \to \infty$، بالنظر إلى (2.22)، الشكل التالي

$$e^{ikz} \approx \frac{1}{kr}\sum_{\ell=0}^{\infty} (i)^\ell (2\ell+1)\, P_\ell(\cos\theta)\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \tag{2.26''}$$

**ملاحظة :**

يمكننا حساب الثوابت $c'_\ell$ مباشرة انطلاقاً من خواص $y^o_\ell$ : لدينا نظراً لتعامدها وتنظيمها للواحد

$$c'_\ell J_\ell(kr) = \langle y^o_\ell | e^{ikz} \rangle = \int \overline{y}^o_\ell e^{ikr\cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi$$

وبالنظر إلى (1.39) ومن بعدها إلى (1.27)

$$= \frac{1}{(2\ell!)^{1/2}\hbar^\ell} \int \overline{L}^\ell_- \overline{y}^\ell_\ell e^{ikr\cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{(2\ell!)^{1/2}\hbar^{\ell}} \int \bar{y}_\ell^{\ell} L_+^{\ell} e^{ikr\cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$c_\ell^{'} J_\ell(kr) = \frac{i^\ell \pi^{1/2}(2\ell+1)^{1/2}}{2^\ell \ell!}(kr)^\ell \int_0^\pi \sin^{2\ell}\theta e^{ikr\cos\theta} \sin\theta d\theta$$

يعطينا التكامل عندما نأخذه في جوار $r = 0$ الدالة $J_\ell(kr)$ المتناسبة مع (2.23) ويبقى

$$c_\ell^{'} = i^\ell \left[4\pi(2\ell+1)\right]^{1/2}$$

الذي كان من الممكن أن نحصل عليه من $c_\ell$ نظراً لأن $y_\ell^{o} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\ell+1}{2}\right)^{1/2} P_\ell$ ((1.45)') ولأن $c_\ell$ متناسب مع $(-1)^\ell c_\ell$.

## 3. الحركة في حقل كولومبي – ذرة الهدروجين

### 1.3- الوحدات الكولومبية

نعطي في هذه الفقرة شكلاً خاصاً للحقل المركزي هو شكل تفاعل كهربائي راكد بين شحنة موجبة، شحنة نواة الذرة $Z|e|$، حيث $|e|$ القيمة المطلقة لشحنة الإلكترون و $Z$ العدد الذري للنواة (عدد البروتونات فيها) وشحنة سالبة $e$ هي شحنة الإلكترون. ولا نأخذ بعين الاعتبار هنا تفاعل إلكترونات الذرة فيما بينها. إن ذرة الهيدروجين أبسط مثال على هذا التفاعل حيث التفاعل بين البروتون والإلكترون؛ يأتي بعده الذرات الشبيهة به $He^+$، $Li^{++}$ الخ. نكتب الطاقة الكامنة $U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$ (في الوحدات M.k.S) على الشكل

$$U = \frac{-\alpha}{r} \tag{3.1}$$

أبعاد $\alpha$ هي أبعاد طاقة مضروبة بطول : $L \cdot ML^2T^{-2} = [\alpha]$ فهي بعد فعل[4] وهي بدون بعد في حال قسمتها على $\hbar$ وتساوي من أجل $Z = 1$ :

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o \hbar} = \frac{1}{137} \tag{3.1'}$$

نرى بسهولة أن أبعاد المقادير التالية $\frac{\hbar^2}{m\alpha}$ ، $\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$ ، $\frac{\hbar^3}{m\alpha^2}$ هي بالترتيب أبعاد طول، وطاقة وزمن؛ نستعمل هذه المقادير كوحدات قياس عوضاً عن الوحدات الأخرى في كل هذه الفقرة خاصة وأن وحدتي

---

[4] عندما نأخذ بعين الاعتبار أن أبعاد الطول والزمن واحدة في نظرية النسبية (الملاحظة 2 في الفقرة 4.2 الفصل السابع I) حيث سرعة الضوء C = 1 وإلا وجب وضع C في مخرج (3.1)'.

نستبدل بالمتغيرين r و E الطول والطاقة الجديدتين ستبسطان شكل المعادلة القطرية (2.4) و (2.6). في المعادلة (2.4) المتغيرين الجديدين

$$\begin{cases} r = \dfrac{\hbar^2}{m\alpha}\rho \\ E = \dfrac{m\alpha^2}{\hbar^2}\varepsilon \end{cases} \qquad (3.2)$$

اللذين يسمحان لنا بالتخلص من المضروب $\frac{\hbar^2}{2m}$ وتأخذ المعادلة (2.4) الشكل الجديد

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}R + 2\left(\varepsilon + \frac{1}{\rho}\right)R = 0 \qquad (3.3)$$

وضعنا الحد الأول في (2.4) على الشكل $R'' + \frac{2}{r}R'$ ثم قمنا بالتبديل بضرب كل عناصر المخرج المتناسبة مع $r^2$ التي أبعادها $\left[L^2\right]$ بـ $\left(\frac{\hbar^2}{m\alpha}\right)^2$ و $E$ بـ $\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$ و $\frac{\alpha}{r}$ بـ $\frac{1}{\frac{\hbar^2}{m\alpha}\rho}$. وتخلصنا من المضروب المشترك لكل الحدود الذي هو $\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$.

سنوجه عنايتنا في البدء لدراسة الطيف المنفصل – حيث الطاقة الكلية سالبة – ونأخذ عوضاً عن العدد الذي يقيس الطاقة $\varepsilon$ المقدار

$$n = \frac{1}{(-2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.4)$$

وعوضاً عن العدد $\rho$ مقداراً آخر يسمح لنا بالتخلص من $n$ في المخرج هو $\frac{2\rho}{n}$ وسنبقي على الرمز $\rho$ تجنباً لتعدد الرموز، بحيث تكتب المعادلة (3.3) على الشكل

$$\frac{4}{n^2}\left(\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}R\right) + 2\left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n\rho}\right)R = 0$$

أو

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}R + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{\rho}\right)R = 0 \qquad (3.4)'$$

سيتحول شكل هذه المعادلة عندما ننتقل من المتغير R إلى المتغير $\chi$ كما في (2.5)

$$\chi(\rho) = \rho R(\rho) \qquad (3.5)$$

إلى المعادلة

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\chi + \left(\frac{n}{\rho} - \frac{1}{4}\right)\chi = 0 \qquad (3.6)$$

على غرار التحويل من (2.4) إلى (2.6). إن كل ما يفعله تبديل المتغير (3.5) هو التخلص من الحد بالمشتق الأول لـ R.

## 2.3– حل المعادلة القطرية

نفتش عن حل للمعادلة (3.6) على شكل جداء لكثير حدود بدالة أسية متناقصة – كي يبقى الحل مقبولاً في اللانهاية. إن شكل المعادلة (3.6) من أجل $\rho$ كبيرة جداً هو $\chi'' - \frac{1}{4}\chi = 0$ والحل المقبول هو $\chi = e^{-\rho/2}$. ولنفتش الآن عن كثير الحدود ولنرمز له بـ $F(\rho)$

$$\chi = F(\rho)e^{-\rho/2} = \sum_k a_k \rho^k e^{-\rho/2} \tag{3.7}$$

إن

$$\chi'' = \left(F'' - F' + \frac{1}{4}F\right)e^{-\rho/2}$$

وبالتالي فإن $F(\rho)$ يخضع، بوضعه في المعادلة (3.6)، إلى المعادلة التالية

$$F'' - F' + \left(\frac{n}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right)F = 0 \tag{3.8}$$

ومهمتنا الآن هي إيجاد الشروط التي تحققها $a_k$، أمثال $\rho^k$ في كثير الحدود، ليكون الحل مقبولاً، أي منتهٍ في جوار النقطة صفر. لدينا من (3.8) الشرط الأول الذي يضمن بقاء $F$ منتهياً من أجل $\rho = 0$.

$$\ell(\ell+1)a_1 = 0 \tag{3.9}$$

ثم الثاني، الذي نحصل عليه بأخذ $F$ من الدرجة الثانية

$$(2 - \ell(\ell+1))a_2 + (n-1)a_1 = 0 \tag{3.10}$$

وتليه الشروط الأخرى من أجل $k \geq 2$ :

$$F'(k) = \sum_k k a_k \rho^{k-1}$$

$$F''(k) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k \rho^{k-2}$$

وبالتبديل في (3.8) نحصل على العلاقة التي تعمم (3.10)

$$[k(k-1) - \ell(\ell+1)]a_k + (n - (k-1))a_{k-1} = 0$$

أو بشكل آخر

$$[k(k+1) - \ell(\ell+1)]a_{k+1} + (n-k)a_k = 0 \tag{3.10'}$$

ومنه

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-n}{k(k+1) - \ell(\ell+1)} \qquad k \geq 2 \tag{3.11}$$

$n$ و $\ell$ محددان بقيمة الطاقة وقيمة العزم الزاوي وهكذا فإن نسبة المثلين المتتاليين عندما تتناهى $k$ إلى اللانهاية هي

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{k+1}$$

إنها نسبة المثلين المتتاليين في نشر الدالة الأسية $e^{\rho}$. وكثير الحدود F غير مقبول في هذه الحالة، إنه يعطي $\chi = e^{\rho}e^{-\rho/2} = e^{\rho/2}$. لا بد إذاً من توقف k عند حد معين، أي أن يكون $k - n = 0$ و $a_{n+1} = 0$. يجب والحالة هذه أن يكون n عدداً صحيحاً، مما يقيد قيم الطاقة حسب (3.4)، كما يجب ألا يكون المخرج في (3.11) مساوياً للصفر من أجل كل قيم k، $k \le n$ وإلا لأصبحت كل المقادير $a_k$ غير منتهية في (3.11). هذا يعني أن

$$k(k+1) \neq \ell(\ell+1)$$

يجب أن تكون $k \neq \ell$ أو $k \neq -(\ell+1)$. الشرط الثاني محقق دوماً ويبقى لزوم الشرط $k \neq \ell$. كما أن $k < \ell$ مستحيل لأنه يؤدي بالتدريج إلى انعدام كل الأمثال $a_k$ حسب (3.9) و (3.10) : $a_1 = 0$ إذا كان $1 \le \ell$ ثم $a_2 = 0$ إذا كان $2 < \ell$ ... ويفرض $a_k$ تساوي الصفر فإن $a_{k+1} = 0$ إذا كان $k + 1 < \ell + 1$ لم يبق لدينا إلا

$$\ell + 1 \le k \le n$$

وكثير الحدود المطلوب هو

$$F(\rho) = \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k \rho^k$$

وحل المعادلة (3.6) هو

$$\chi_{n\ell} = \left( \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k \rho^k \right) \rho^{-\rho/2} \qquad (3.12)$$

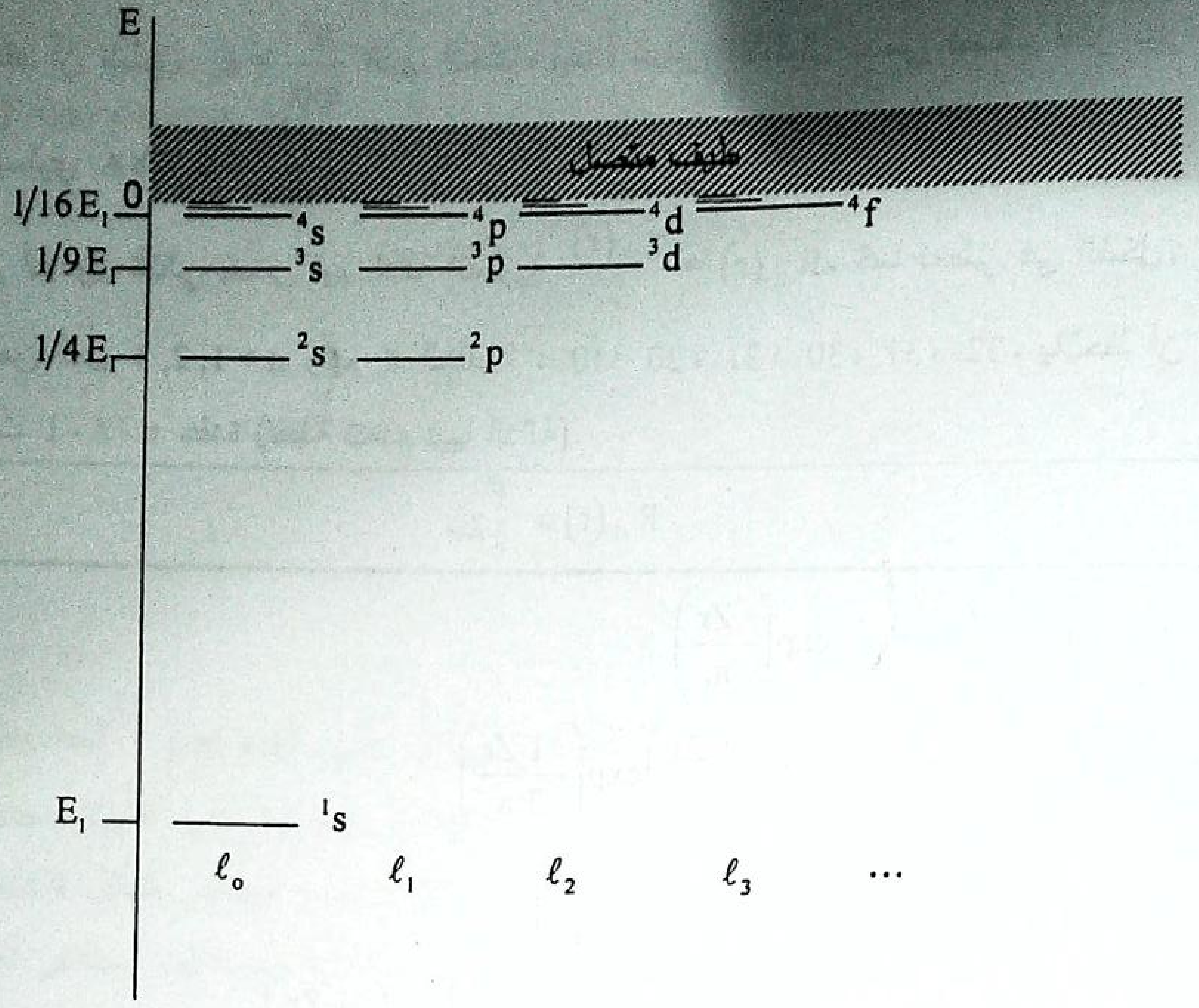
ومنه حسب (3.5)

$$e^{\rho/2} R_{n\ell}(\rho) = \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k \rho^{k-1} = \rho^{\ell} \sum_{k'=0}^{n-\ell-1} a_{k'} \rho^{k'} \qquad (3.12)'$$

يتوقف هذا الحل على إعطاء العددين الكموميين اللذين يعينان الطاقة والعزم الزاوي؛ أما مستويات الطاقة المسموح بها فهي محددة بالعدد n حسب (3.4) و (3.2)

$$E_n = \frac{m\alpha^2}{\hbar^2}\varepsilon = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{E_R}{n^2} \qquad (3.13)$$

حيث يطلق على الطاقة $\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ من أجل $Z = 1$ اسم طاقة ريدبرغ Rydberg، يرمز لها بـ $E_R$ وتساوي 13,6.eV. إنها بالقيمة المطلقة طاقة الإلكترون من أجل $n = 1$. إنها أخفض قيمة للطاقة –طاقة القاع– وهكذا فإن هناك عدداً لامنته من مستويات الطاقة بين طاقة القاع $(n = 1)$ السالبة والطاقة 0. يضيق المجال الفاصل بين مستويي طاقة متجاورين كلما ازدادت قيمة n وتتراكم المستويات حول $E = 0$ بحيث يتصل الطيف المنفصل مع الطيف المتصل المرتبط بالطاقات الموجبة كما يبين مخطط مستويات طاقة الهدروجين التالي.




يطلق على n اسم العدد الكمومي الرئيسي. والفرق بينه وبين العدد الكمومي القطري $n_r$ هو أن هذا الأخير يبدأ بالصفر بينما يبدأ n من $\ell + 1$ :

$$n_r = n - \ell - 1$$

يأخذ $\ell$ من أجل n محدد كل القيم بين الصفر و $n - 1$، أي أن الطاقة متدنية بالنسبة للعدد الكمومي المداري $\ell$، إضافة إلى تدنيها بالنسبة للعدد الكمومي المغنطيسي، $(2\ell + 1)$ مرة من أجل $\ell$ معطاة وهكذا فإن نتيجة هذا التدني المزدوج هو

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell + 1) = n^2 \qquad (3.14)$$

إن التدني بالنسبة للعدد الكمومي المداري خاص بالكمون الكولومبي (ويسمى تدنياً طارئاً أو كولومبياً). نذكر أن (3.13) كانت معروفة تجريبياً من دراسة طيف الهدروجين الضوئي منذ مطلع القرن العشرين قبل نشوء النظرية الكمومية كما حددت طاقة ريدبرغ تجريبياً منذ ذلك التاريخ. وقد استطاع بور باللجوء إلى منوال، سنلقي الضوء عليه في الفصول القادمة، إعطاء الصيغة (3.12) للدالة القطرية إلا أن الميكانيك الكمومي هو الوحيد الذي استطاع، بعد ثلاثة عشر عاماً من منوال بور، التعبير عن هذه النتائج بشكل منطقي متسق غاية الاتساق سواء باللجوء إلى طريقة المصفوفات (باولي 1926) أو بحل معادلة شرودينغر كما فعل شرودينغر بعد باولي ببضعة أشهر.

لنتذكر كذلك أن الطول $\frac{\hbar^2}{m\alpha} = a_0$ الذي اتخذناه وحدة لقياس الأطوال يسمى نصف قطر بور من أجل $Z = 1$ ويساوي $\frac{\hbar^2}{m\alpha} = 0{,}528\,\mathring{A}$.

نعطي في الجدول التالي بعض قيم الدالة القطرية $R_{n\ell}(r) = \frac{\chi_{n\ell}(r)}{r}$. كما نعطي في الشكل. 2 صورة $R_{n\ell}(r)$ من أجل $n = 1, 2, 3$ وقيم $\ell$ المقابلة : 10؛ 20، 21؛ 30، 31، 32. يلاحظ أن لكل من هذه الدالات $n - \ell - 1$ عقدة (نقطة تنعدم فيها الدالة).

| $R_{nl}(r) \equiv \frac{1}{r}\chi_{nl}$ |
|---|
| $R_{10}(r) = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \cdot 2\exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)$ |
| $R_{20}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \cdot 2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Zr}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{Zr}{a_0}\right)$ |
| $R_{21}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{Zr}{a_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{Zr}{a_0}\right)$ |
| $R_{30}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \cdot 2\left[1 - \frac{2}{3}\frac{Zr}{a_0} + \frac{2}{27}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{1}{3}\frac{Zr}{a_0}\right)$ |
| $R_{31}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{Zr}{a_0}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{Zr}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{1}{3}\frac{Zr}{a_0}\right)$ |
| $R_{32}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\exp\left(-\frac{1}{3}\frac{Zr}{a_0}\right)$ |

الشكل. 2

لنكتب أخيراً قيم مستويات الطاقة بدليل (3. 1, 2, 4) وثابتة البنية الدقيقة fine structure (3.1)' التي سنطلق عليها أيضاً اسم $\alpha$؛ إنها:

$$E_n = \frac{-m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{mZ^2e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2\, 2\hbar^2 n^2}$$

$$= -\frac{mZ^2}{2n^2}\alpha^2 = -\left(\frac{1}{137}\right)^2 \frac{mZ^2}{2n^2}$$

## 3.3- كثيرات حدود لاكير Laguerre

رأينا (2.§3.2) أنه يمكن إنشاء قاعدة لفضاء هيلبرتي معرف على $[-\infty, +\infty]$ : $L_2[-\infty, +\infty]$ وذلك بإيجاد وسيلة لجعل المتتالية $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ ...$n = 0, 1, 2$ متعامدة وحصلنا على كثيرات حدود هيرميت كمتجهات حالة للهزاز التوافقي، رأينا كذلك (§1.6) أن كثيرات حدود لوجاندر تشكل قاعدة للفضاءات الهيلبرتية على المجال $[-1, +1]$ وأن الدالات التوافقية الكروية متناسبة مع دالات لوجاندر المشاركة. أما في حالة الفضاء الهيلبرتي المعرف على $[0, +\infty]$ : $L_2[0, \infty]$ فإن منشأ القاعدة $R_{n\ell}(r)$ لمتجهات الحالة القطرية هو كثير حدود لاكير، الذي نرمز له بـ $L_n$ ونعرفه بالعلاقة (قارن مع العلاقة (2.(3.14)).

**تعريف 4 :**

كثير حدود لاكير هو

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n\left(e^{-x}x^n\right)}{dx^n} \tag{3.15}$$

نعرف الجداء السلمي بين متجهتين بالعلاقة

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{nm} \tag{3.16}$$

ونعرف كثيرات حدود لاكير المشاركة (أو المعممة) كما يلي

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right) \tag{3.17}$$

ولدينا طبعاً

$$L_n^{(0)}(x) = \frac{1}{n!}L_n(x)$$

$e^{-x}$، تؤمن التناهي $x^n e^{-x} \underset{n\to\infty}{\to} 0$، فإن $L_n^{(\alpha)}(x)$

وكما أن $L_m$، $L_n$ متعامدان بوجود كثافة احتمال $x^\alpha e^{-x}$؛ ولدينا بدليل الدالة غاما المعرفة بـ

و $L_m^{(\alpha)}(x)$ متعامدان بوجود كثافة احتمال $x^\alpha e^{-x}$؛ ولدينا بدليل الدالة غاما المعرفة بـ $\frac{1}{\Gamma(\gamma)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^t t^{-\gamma} dt$ :

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{nm} \qquad (3.18)$$

وتخضع كثيرات الحدود هذه إلى علاقة التكرار التالية

$$\frac{d^k}{dx^k} L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^k L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) \qquad (3.19)$$

وترتبط بكثيرات حدود هيرميت وفق العلاقتين التاليتين

$$\begin{cases} H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2) \\ H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2) \end{cases} \qquad (3.20)$$

إن حل المعادلة القطرية $(3.4)'$ المباشر هو بكتابة $R$ على الشكل

$$R = \rho^\ell e^{-\rho/2} w(\rho) \qquad (3.12)''$$

بحيث تأخذ المعادلة الشكل التالي

$$\rho w'' + (2\ell + 2 - \rho) w' + (n - \ell - 1) w = 0 \qquad (3.21)$$

نفتش كالمعتاد عن حل منته في جوار الصفر وفي اللانهاية. يجب إذاً ألا تتباعد الدالة $w$ في اللانهاية بأسرع من قوى $\rho$. إن ما يحقق هذا الحل هو الدالة $F$ فوق الهندسية[5] (Hypergeometric) المتدنية؛ يرمز لها بدليل ثلاثة مضامين على الشكل التالي $F = F(\alpha, \gamma, Z)$ وعندما يكون $\alpha = -n$ عدداً صحيحاً سالباً فإن $F$ هي حل $(3.21)$

$$w = F(-n + \ell + 1, 2\ell + 2, \rho) \qquad (3.22)$$

يجب لكي يتحقق شرط التناهي أن يكون $-n + \ell + 1 \le 0$، $n \ge \ell + 1$ كما رأينا. وتصبح الدالة كثيرة الحدود $F$ التي وجدناها بطرق ابتدائية. تنطبق كثيرات الحدود هذه $F(-n, m, \rho)$، حيث $0 \le m \le n$، مع ثابتة تناسب، على كثيرات حدود لاكير المعممة والمنظمة

$$L_n^{(m)}(\rho) = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F(-(n-m), m+1, \rho) \qquad (3.23)$$

التي نكتبها من أجل $m = 2\ell + 1$ وباستبدال $n$ بـ $n + \ell$ على الشكل

$$L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho) = (-1)^{2\ell+1} \frac{((n+\ell)!)^2}{(2\ell+1)!(n-\ell-1)!} F(-n + \ell + 1, 2\ell + 2, \rho) \qquad (3.23)'$$

---

[5] أدخل هذا المفهوم في منتصف القرن التاسع عشر للتعبير عن الهندسة في فضاء تتجاوز أبعاده الثلاثة أبعاد المألوفة، ومنه مفاهيم فوق المستوى وفوق السطح، الخ.

لدينا بالتالي حل المعادلة القطرية حسب "(3.12) و (3.21) شريطة ألا ننسى أن $\rho = \frac{2r}{n}$ مقيس بالوحدات الكولومبية وأن تنظيم $R_{n\ell}$ هو $\int_0^\infty R_{n\ell}^2 r^2 dr = 1$

$$R_{n\ell} = \frac{-2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{[(n+\ell)!]^3}}\, e^{-r/n}\left(\frac{2r}{n}\right)^{\ell} L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{n}\right) \tag{3.24}$$

$$= \frac{2}{n^{\ell+2}(2\ell+1)!}\sqrt{\frac{(n+\ell)!}{(n-\ell-1)!}}(2r)^{\ell} e^{-r/n} F\left(-n+\ell+1, 2\ell+2, \frac{2r}{n}\right) \tag{3.24'}$$

لم نعر هنا اهتماماً لكيفية تنظيم كثيرات حدود لاكير لأن المسألة تقنية صرفة ويتم الأمر بالتكامل بالتجزئة على غرار ما فعلناه من أجل كثيرات الحدود السابقة.

**<u>تعريف 5</u> :**

معادلة غاوص ومعادلة لابلاس.

يمكن التعبير عن كل كثيرات الحدود المتعامدة التقليدية كحالات خاصة للدالات فوق الهندسية $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ التي هي حل للمعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية، التي نكتفي بها في حالتنا، ذات الشكل

$$x(1-x)y''(x) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y'(x) - \alpha\beta y(x) = 0 \tag{3.25}$$

المعروفة باسم معادلة غاوص.

أما الدالة فوق الهندسية المتدنية $F(\alpha, \gamma, x)$ فهي حل للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية من الشكل (3.21)

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \tag{3.20'}$$

تخضع كثيرات حدود لاكير $L_n(x)$ إلى ذات المعادلة؛ نتحقق بسهولة أن

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_x(x) = 0$$

أي أن كثير حدود لاكير هو $L_n(x) = F(-n, 1, x)$

لنشر هنا إلى أن المعادلة (3.21) هي حالة خاصة من فئة المعادلات من الدرجة n حيث الأمثال دالات خطية (من الدرجة الأولى) بالمتغير x، التي نكتبها على الشكل

$$F(y) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i x)y^{(n-i)}(x) = 0 \tag{3.26}$$

حيث $y^{(n-i)}$ هو المشتق $(n-i)$ للدالة y.

تعرف هذه المعادلة باسم معادلة لابلاس، إذ إنه هو من وجد حلاً لها من الشكل

$$y = \int_{(c)} Ze^{nz} dz$$

حيث $Z$ دالة بالمتغير $z$ و $(c)$ خط التكامل المستقل عن $x$.[6]

## 4.3- الطيف المتصل

الطاقة موجبة في هذه الحالة وتأخذ كل القيم الممكنة بين الصفر واللانهاية. تتراوح قيم العدد الكمومي المداري $\ell$ من أجل قيمة معينة للطاقة بين الصفر واللانهاية. فهي لم تعد محددة برقم مستوى الطاقة $n$ ولم تعد العلاقة (3.14) التي تعين التدني المزدوج $n^2$ : $\ell = 0, 1 ..., n-1$ و $-\ell \leq m \leq \ell$ صالحة، والتدني في الطيف المتصل تدن لامنته بالنسبة لـ $\ell$، ولدينا من أجل كل $\ell$ $2\ell+1$ قيمة ممكنة للعدد الكمومي المغنطيسي. يصبح العدد $n$ المعرف بالعلاقة (3.4) عدداً تخيلياً نكتبه على الشكل

$$n = \frac{-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \tag{3.27}$$

إن وحدة قياس متجهة الموجة $k$ في الوحدات الكولومبية، حيث أخذنا وحدة الطاقة $\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$، هي $\left(\frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4}\right)^{1/2}$ ولدينا حسب (3.2)

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{m\alpha^2}{\hbar^2}\varepsilon$$

$$k^2 = \frac{2m^2\alpha^2}{\hbar^4}\varepsilon$$

و $k = \sqrt{2\varepsilon}$ في هذه الوحدات؛ أي أن

$$n = \frac{-i}{\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{-i}{k} \tag{3.27'}$$

نستبدل من جهة ثانية بالطول $r$، عوضاً عن $\rho$ في (3.2) المقيس بالوحدات الكولومبية المقدار $\rho = \frac{2r}{n}$ أي

$$\rho = 2ikr \tag{3.28}$$

لا يختلف حل المعادلة التفاضلية في حالة الطيف المتصل عن الحل '(3.24) للطيف المنفصل بدليل الدالة فوق الهندسية المتدنية إلا بكون هذه الدالة معرفة على الحقل العقدي، $n$ و $\frac{2r}{n}$ عقديان والحل هو

$$R_{k\ell} = \frac{c_{k\ell}}{(2\ell+1)!}(2kr)^{\ell} e^{-ikr} F\left(\frac{i}{k} + \ell + 1, 2\ell + 2, 2ikr\right) \tag{3.29}$$

---

[6] يمكن لمن يرغب في معرفة كيفية إيجاد الحل بالتفصيل الرجوع إلى كتب التحليل الرياضي، إلا أنه من الممكن الاكتفاء بالتلخيص الذي تورده كتب الميكانيك الكمومي المرجعية. انظر على سبيل المثال الملاحق d، e، f في كتاب Landau and Lifchitz , Quantum Mechanics أو A. Messiah , Mécanique Quantique المترجم إلى الإنكليزية، الجزء الأول، الملحق B.

حيث Z دالة بالمتغير z و (c) خط التكامل المستقل عن x.[6]

## 4.3- الطيف المتصل

الطاقة موجبة في هذه الحالة وتأخذ كل القيم الممكنة بين الصفر واللانهاية. تتراوح قيم العدد الكمومي المداري $\ell$ من أجل قيمة معينة للطاقة بين الصفر واللانهاية. فهي لم تعد محددة برقم مستوى الطاقة n ولم تعد العلاقة (3.14) التي تعين التدني المزدوج $n^2$ : $\ell = 0, 1..., n-1$ و $-\ell \leq m \leq \ell$ صالحة، والتدني في الطيف المتصل تدن لامنته بالنسبة لـ $\ell$، ولدينا من أجل كل $\ell$ $2\ell + 1$ قيمة ممكنة للعدد الكمومي المغنطيسي. يصبح العدد n المعرف بالعلاقة (3.4) عدداً تخيلياً نكتبه على الشكل

$$n = \frac{-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \tag{3.27}$$

إن وحدة قياس متجهة الموجة k في الوحدات الكولومبية، حيث أخذنا وحدة الطاقة $\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$، هي $\left(\frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4}\right)^{1/2}$ ولدينا حسب (3.2)

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{m\alpha^2}{\hbar^2}\varepsilon$$

$$k^2 = \frac{2m^2\alpha^2}{\hbar^4}\varepsilon$$

و $k = \sqrt{2\varepsilon}$ في هذه الوحدات؛ أي أن

$$n = \frac{-i}{\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{-i}{k} \tag{3.27'}$$

نستبدل من جهة ثانية بالطول r، عوضاً عن ρ في (3.2) المقيس بالوحدات الكولومبية المقدار $\rho = \frac{2r}{n}$ أي

$$\rho = 2ikr \tag{3.28}$$

لا يختلف حل المعادلة التفاضلية في حالة الطيف المتصل عن الحل '(3.24) للطيف المنفصل بدليل الدالة فوق الهندسية المتدنية إلا بكون هذه الدالة معرفة على الحقل العقدي، n و $\frac{2r}{n}$ عقديان والحل هو

$$R_{k\ell} = \frac{c_{k\ell}}{(2\ell+1)!}(2kr)^{\ell} e^{-ikr} F\left(\frac{i}{k} + \ell + 1, 2\ell + 2, 2ikr\right) \tag{3.29}$$

---

[6] يمكن لمن يرغب في معرفة كيفية إيجاد الحل بالتفصيل الرجوع إلى كتب التحليل الرياضي، إلا أنه من الممكن الاكتفاء بالتلخيص الذي تورده كتب الميكانيك الكمومي المرجعية. انظر على سبيل المثال الملاحق d، e، f في كتاب Landau and Lifchitz , Quantum Mechanics أو A. Messiah , Mécanique Quantique المترجم إلى الإنكليزية، الجزء الأول، الملحق B.

حيث $c_{k\ell}$ ثابتة تنظيم. يمكن إعطاء شكل تكاملي لهذا الحل، كما هو الحال في كل معادلات لابلاس ولكن في المستوى العقدي. إنه من الشكل

$$R_{k\ell} = c_{k\ell}(2kr)^{\ell} e^{-ikr} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\xi} \left(1 - \frac{2ikr}{\xi}\right)^{-\frac{i}{k}-\ell-1} \xi^{-2\ell-2} d\xi \quad (3.30)$$

يبرهن أن $R_{k\ell}$ حقيقي. ثم إن النشر المقارب للدالة F - بدليل الدالات $\Gamma$ والدالات $G(\alpha, \beta, z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{2\pi i} \int \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{-\alpha} t^{\beta-1} e^{t} dt$ يعين $R_{k\ell}$، يحدد ثابتة التنظيم ويعطي قيمة $R_{k\ell}$ من أجل القيم الكبيرة لـ r

$$R_{k\ell} \approx \frac{2}{r} \sin\left(kr + \frac{1}{k} \mathrm{Ln}\, 2kr - \frac{\pi}{2}\ell + \delta_{\ell}\right) \quad (3.31)$$

حيث

$$\delta_{\ell} = \text{مضمون}\, \Gamma\left(\ell + 1 - \frac{i}{k}\right)$$

## 4. العزم الزاوي الداخلي (الصميمي) – السبين

### 1.4 – العزم الزاوي والعزم المغنطيسي

اعتمدنا على مبدأ التقابل لتعريف العزم الزاوي بالعلاقة (1.1)؛ ووجدنا أنه، على غرار العزم الزاوي التقليدي مقدار منحفظ وتبادلي مع الهاميلتوني حسب '(1.15) – نظراً لتناحي الفضاء الإقليدي الذي قبلنا به فضاءً للفيزياء الكمومية اللانسبوية. أو بتعبير أكثر دقة، فقد طابقنا بين مركبات العزم الزاوي الثلاث، كمؤثر، وبين مولدات زمرة الدوران $SO(3)$، وعينا فضاءات تمثيل هذه الزمرة : فضاءات الدالات التوافقية الكروية كمتجهات خاصة لـ $L^2$ ولمسقط العزم على محور معين، $L_z$ مثلاً.

ولكن كيف نقيس العزم الزاوي ؟ إن تعريفه بالعلاقة (1.1) لا يجدي نفعاً لأنه يستحيل حسب مبدأ اللاتحديد معرفة $\vec{r}$ و $\vec{p}$ في آن واحد. هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن الميكانيك الكمومي يقوم أساساً على مفهوم الهاميلتوني، مفهوم الطاقة ولا سبيل أمامنا لقياس العزم الزاوي الكمومي بمقابلته بالعزم الزاوي التقليدي وبالعلاقة التي يخضع لها

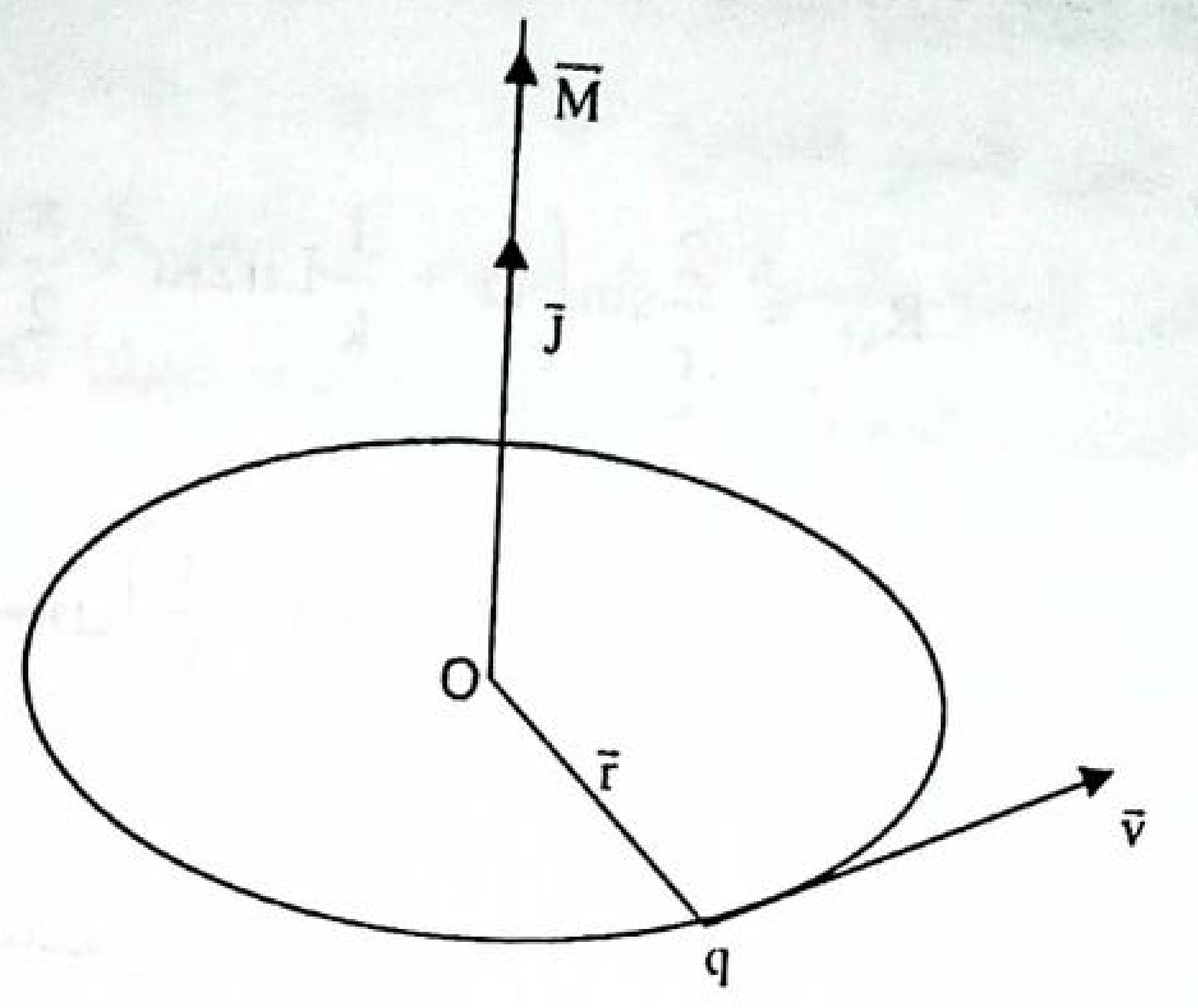
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overline{\mathcal{M}_0}$$

حيث $\overline{\mathcal{M}_0}$ عزم القوى المطبقة.

إن ما يسعفنا هنا هو العلاقة التقليدية بين العزم الزاوي المداري والعزم المغنطيسي، فكما نعلم تحدث شحنة كهربائية q - الإلكترون مثلاً - في حركتها الدائرية تحت تأثير قوة مركزية عزماً زاوياً عمودياً على الدائرة، قيمته في مركز الدائرة هي

$$\vec{J} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad ; \quad J = mrv \tag{4.1}$$

كما تحدث عزماً مغنطيسياً له نفس المنحى هو شدة التيار $q\upsilon$، حيث $\upsilon$ تواتر الحركة الدائرية، مضروباً بسطح الدائرة، الشكل.3




الشكل.3

$$\left|\vec{M}\right| = q\upsilon\pi r^2 = q\frac{v\pi r^2}{2\pi r} = \frac{qvr}{2} \tag{4.2}$$

والنتيجة أن

$$\vec{M} = \frac{q}{2m}\vec{J} \tag{4.3}$$

لـ $\vec{M}$ و $\vec{J}$ ذات الاتجاه أو اتجاهان متعاكسان حسب إشارة q (أبعاد $\vec{J}$ هي $[M][L^2][T^{-1}]$ وأبعاد $\vec{M}$ هي $[Q][L^2][T^{-1}]$ والنسبة $\frac{[Q]}{[M]}$). تبقى علاقة التناسب هذه صحيحة من أجل العزم الزاوي الكمومي الذي درسناه حتى الآن والذي أطلقنا عليه اسم العزم الزاوي المداري. ولما كان هذا العزم مقيساً بوحدات $\hbar$ فإن وحدة قياس العزم المغنطيسي من أجل الإلكترون هي

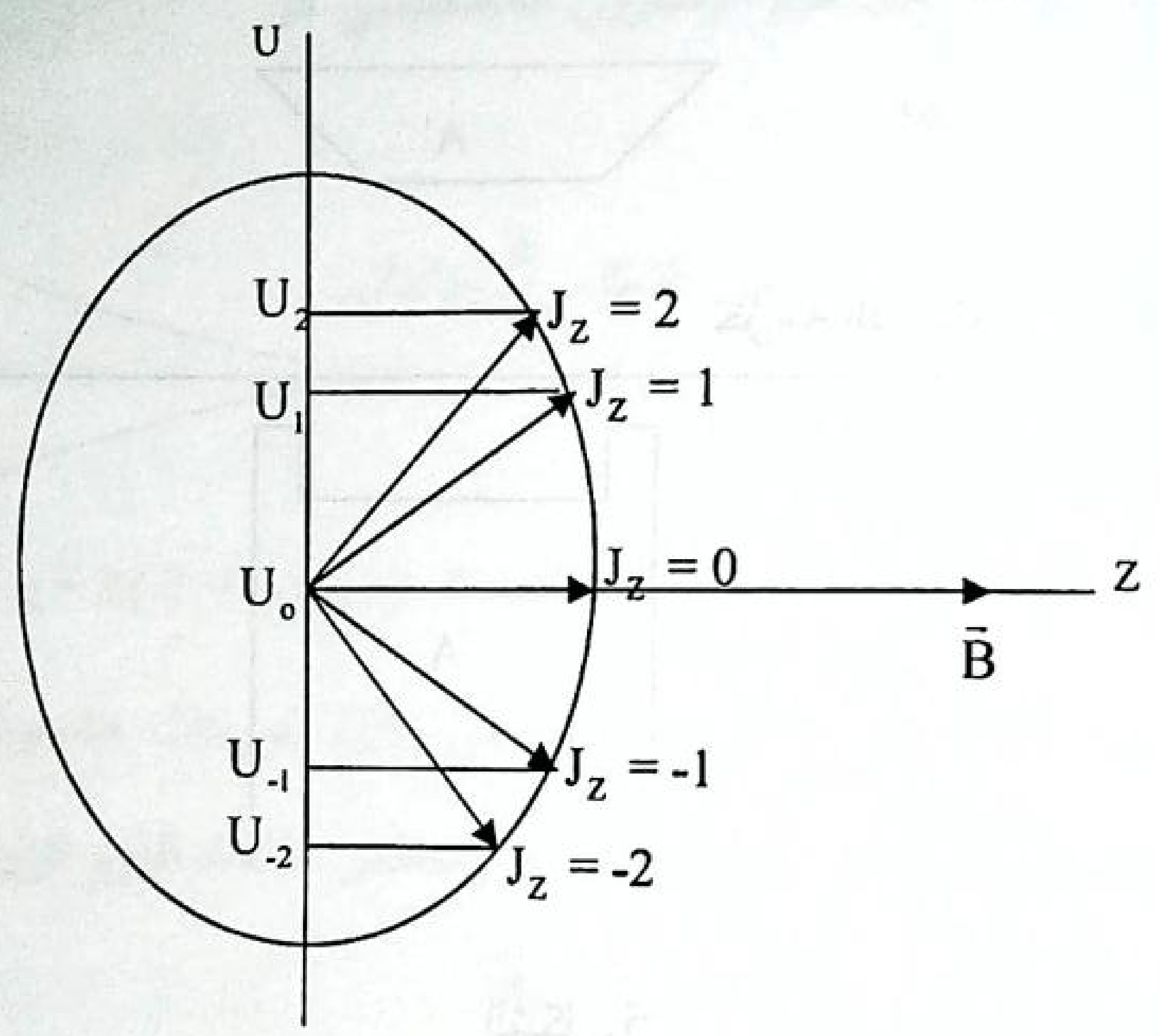
$$\frac{|e|\hbar}{2m_e} = \mu_B \tag{4.4}$$

حيث -e شحنة الإلكترون السالبة $m_e$ كتلته، و $\mu_B$ ماغنتون بور. $\frac{|e|\hbar}{2m_e} = \mu_B$،

إن طاقة تفاعل العزم المغنطيسي مع الحقل المغنطيسي هي من الشكل

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{-q}{2m}\vec{J} \cdot \vec{B} \tag{4.5}$$

سنستعمل هذه العلاقة للتخلص من تدني مستويات الطاقة، المعينة بـ $\ell$، بالنسبة للعدد الكمومي المغنطيسي : $(2\ell + 1)$ مرة، وذلك بإدخال حقل مغنطيسي نسمي منحاه OZ، يقضي على تناظر الفضاء، على تناحيه، ويفصل بالتالي بين الـ $2\ell + 1$ طاقة التي كانت متطابقة. وهكذا تنقسم أي طاقة $U_o$، حسب قيم مسقط العزم الزاوي على OZ أي العدد الكمومي المغنطيسي (وهذا هو سبب هذه التسمية) $-\ell$، $-\ell + 1 \ldots 0 \quad 1 \ldots \ell$ إلى $2\ell + 1$ مستوى مختلف – لدينا على سبيل المثال من أجل $J = \ell = 2$ الانفصام إلى خمس مستويات، الخ، الشكل.4 – أربع مستويات طاقة جديدة تضاف إلى الطاقة المقابلة لـ $m = 0$

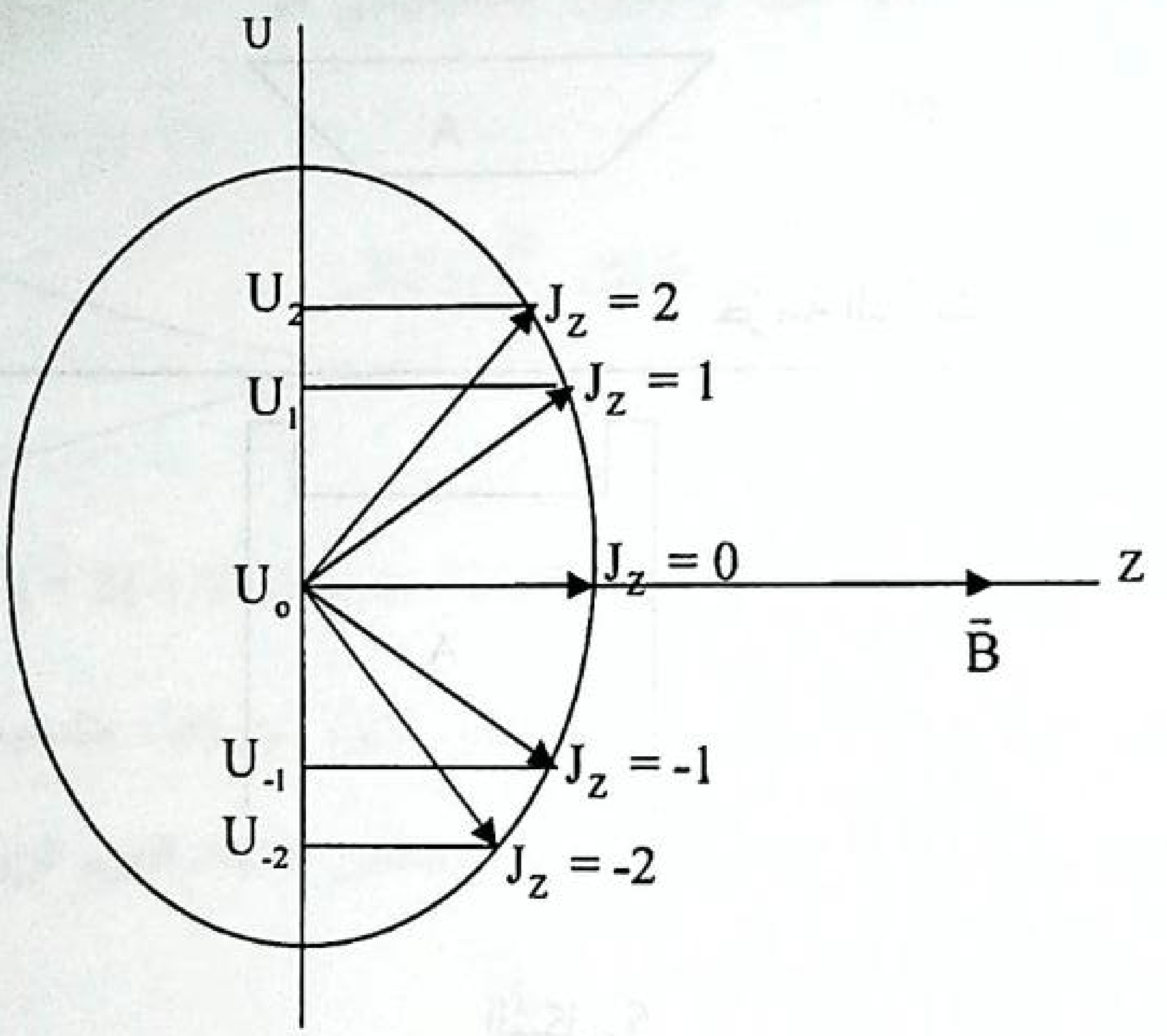



الشكل. 4

## 2.4– تجربة شتيرن وغيرلاش Stern-Gerlach (1922)

ليست أهمية هذه التجربة، الأولى من نوعها، في تبيانها تكميم قيم العزم الزاوي، بمعنى أن مساقطه على محور معين لا تأخذ إلا قيماً منفصلة، بقدر تبيانها وجود نوع جديد من العزم الزاوي، مستقل عن حركة الجسيم بالنسبة لجسيم آخر والذي سميناه العزم المداري، ولكنه يرتبط بالجسيم بذاته، يحدد خواصه تماماً كما تحدد الشحنة والكتلة على سبيل المثال هذه الخواص، نطلق عليه لتمييزه عن العزم الزاوي المداري اسم العزم الداخلي (الصميمي)، أو السبين، وهي كلمة تعني لغة "اللف" وإن كنا لا نتصور جسيماً أولياً، إلكترون، فوتون أو كوارك، يدور حول نفسه كما تدور الأرض أو الدوامة الجهرية حول محورها. كل ما

سنستعمل هذه العلاقة للتخلص من تدني مستويات الطاقة، المعينة بـ $\ell$، بالنسبة للعدد الكمومي المغنطيسي : $(2\ell + 1)$ مرة، وذلك بإدخال حقل مغنطيسي نسمي منحاه OZ، يقضي على تناظر الفضاء، على تناحيه، ويفصل بالتالي بين الـ $2\ell + 1$ طاقة التي كانت متطابقة. وهكذا تنقصم أي طاقة $U_o$، حسب قيم مسقط العزم الزاوي على OZ أي العدد الكمومي المغنطيسي (وهذا هو سبب هذه التسمية) $-\ell$، $-\ell + 1 \ldots 0 \quad 1 \ldots \ell$ إلى $2\ell + 1$ مستوى مختلف – لدينا على سبيل المثال من أجل $J = \ell = 2$ الانفصام إلى خمس مستويات، الخ، الشكل.4 – أربع مستويات طاقة جديدة تضاف إلى الطاقة المقابلة لـ $m = 0$



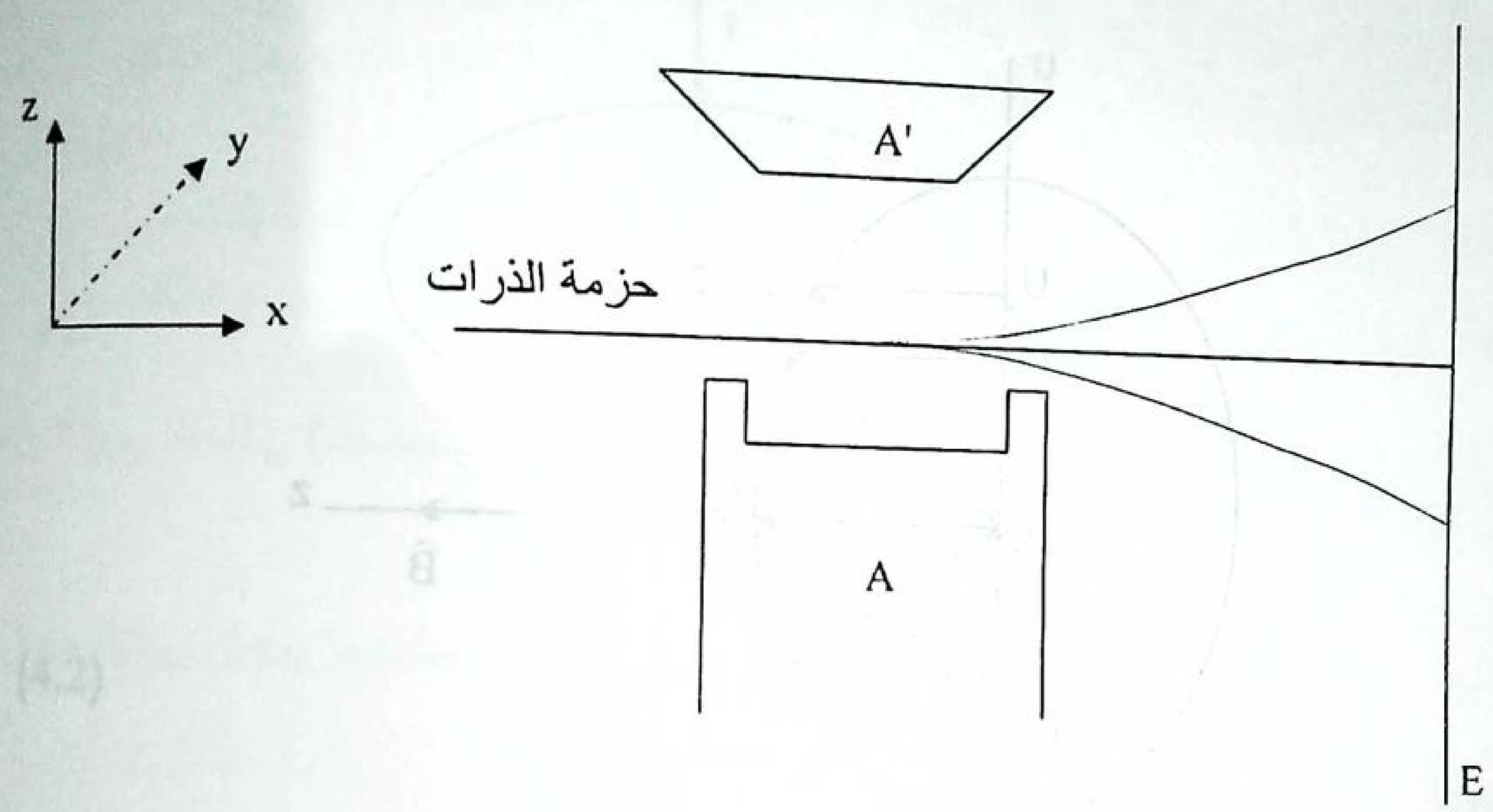

الشكل. 4

## 2.4– تجربة شتيرن وغيرلاش Stern-Gerlach (1922)

ليست أهمية هذه التجربة، الأولى من نوعها، في تبيانها تكميم قيم العزم الزاوي، بمعنى أن مساقطه على محور معين لا تأخذ إلا قيماً منفصلة، بقدر تبيانها وجود نوع جديد من العزم الزاوي، مستقل عن حركة الجسيم بالنسبة لجسيم آخر والذي سميناه العزم المداري، ولكنه يرتبط بالجسيم بذاته، يحدد خواصه تماماً كما تحدد الشحنة والكتلة على سبيل المثال هذه الخواص، نطلق عليه لتمييزه عن العزم الزاوي المداري اسم العزم الداخلي (الصميمي)، أو السبين، وهي كلمة تعني لغةً "اللف" وإن كنا لا نتصور جسيماً أولياً، إلكترون، فوتون أو كوارك، يدور حول نفسه كما تدور الأرض أو الدوامة الجهرية حول محورها. كل ما

يهمنا هو أنه موجود، يمكن قياسه ويفرق بين نوعين أساسيين من مكونات المادة التي أطلقنا عليها اسم الجسيمات الأولية. مبدأ التجربة هو التالي :

تُسخن ذرات الفضة، المعدة في حالة القاع حيث $\ell = 0$ والعزم الزاوي المداري معدوم، في فرن لتشكل بعد تبخرها حزمة من الذرات تمر عبر سلسلة من الثقوب وصولاً إلى ما بين قطبي مغنطيس غير متناظر - الحقل بين القطبين غير متجانس - مقطعه هو A'A، الشكل.5. بحيث تتغير شدة الحقل $\vec{B}$ بسرعة كبيرة.




الشكل.5

إن تغيير الطاقة الناتج عن دخول العزم الزاوي $\vec{J}$ إلى هذا الحقل هو حسب (4.5)

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

والقوة المؤثرة على ذرة الفضة في اتجاه غراديان الحقل

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = M\cos\theta \frac{\partial B}{\partial z}$$

حيث $M\cos\theta$ هو مسقط العزم المغنطيسي (أو العزم الزاوي) على اتجاه الحقل OZ. بينت تجربة شتيرن وغيرلاش أن هذا المسقط، لا يساوي الصفر ولا تشكل ذرات الفضة بقعة في اتجاه Ox كما هو متوقع، ولكنه مُكمم، ولا يأخذ - وهو الأهم - إلا قيمتين (كما في الشكل) : لا توجد على الكاشف E إلا بقعتين أولاهما تبين أن مسقط العزم هو في اتجاه غراديان B والأخرى في الاتجاه المعاكس.

تبين هذه التجربة أن قيم العزم الزاوي (وبالتالي المغنطيسي) لا تتحدد بإعطاء عدد صحيح $\ell$ : $\ell = 0, 1..., \infty$ فحسب، وإنما بإعطاء عدد نصف صحيح أيضاً $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}...$ ويبقى التدني مساوياً

$(2\ell+1)$، أو $(2J+1)$ وذلك بالانتقال في المسقط على محور معين بأعداد صحيحة بفضل المؤثرين $L_+$ $(J_+)$ و $L_-$.

سنعمم إذاً العلاقة (4.3) بأن نكتب من أجل كل نظمة كمومية، وبشكل خاص من أجل كل جسيم أولي العلاقة بين العزمين الزاوي والمغنطيسي على الشكل

$$\overline{M} = g\frac{q}{2m}\vec{J} \qquad (4.6)$$

حيث g ثابتة تميز النظمة – الجسيم – تعرف باسم ثابتة لاندي Landé و $\vec{J}$ العزم الزاوي المداري أو السبيني (أو مجموعهما كما سنرى). لدينا، على سبيل المثال من أجل السبين $\frac{1}{2}$، ونرمز للعزم بـ $\vec{S}$، $g=2$ من أجل الإلكترون؛ وهكذا فإن عزم الإلكترون المغنطيسي هو

$$\overline{M}_e = -2\frac{|e|\hbar}{2m_e}\vec{S} \qquad (4.7)$$

سنرى بعد قليل أنه من الأفضل كتابة $\vec{S}$ على الشكل $\frac{\vec{\sigma}}{2}$ وبالتالي

$$\overline{M}_e = -2\frac{|e|\hbar}{2m_e}\frac{\vec{\sigma}}{2} = -\mu_B\vec{\sigma} \qquad (4.7)'$$

و $g=2(2{,}793)$ من أجل البروتون ذي السبين $\frac{1}{2}$ والشحنة $+e$ و $g=2(-1{,}913)$ من أجل النوترون ذي السبين $\frac{1}{2}$ والشحنة صفر. صحيح أن النوترون مؤلف من ثلاث كواركات مشحونة ولكن الشحنة الكلية معدومة ومع ذلك فإن عزمها المغنطيسي متناسب مع e ومعاكس لاتجاه العزم الزاوي للنوترون:

$$\overline{M}_p = 2.2{,}793\frac{|e|\hbar}{2m_p}\frac{\vec{\sigma}}{2} = 2{,}793\mu'_B\vec{\sigma} \qquad (4.7)''$$

حيث $\mu'_B = \frac{|e|\hbar}{2m_p}$ هو ماغنتون بور النووي و $m_p$ كتلة البروتون.

وأخيراً

$$\overline{M}_n = 2(-1{,}913)\frac{|e|\hbar}{2m_n}\frac{\vec{\sigma}}{2} = -1{,}913\mu'_B\vec{\sigma} \qquad (4.7)'''$$

$$m_n \simeq m_p$$

## 3.4– جمع العزوم الزاوية

سنقبل إذاً، قبيل البرهان الذي سيأتي لاحقاً، أن منشأ هذا العزم المغنطيسي الجديد هو عزم زاو، أي أنه ناتج عن تمثيل لزمرة الدورانات $SO(3)$ مختلف عن التمثيل التانسوري للعزم الزاوي المداري الذي استعرضناه في الفقرة الأولى ولخصناه في §1.7 هذا يعني أن متجهة الحالة $\langle\psi|$ لا تتوقف على الوضع

$\psi(\vec{r},\sigma)$ : $\sigma$ أو وحده $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$ وإنما على متغير إضافي داخلي هو السبين الذي سنرمز له بـ . بعبارة أخرى فإن $\langle\psi|$ هي جداء متجهتي حالة مستقلة إحداهما عن الأخرى تنتمي الأولى منها إلى الفضاء الهيلبرتي الذي تعينه المتغيرات $(r, \theta, \varphi)$ – $|\psi_{n,\ell,m}\rangle$ على سبيل المثال الذي رأيناه في الفقرة السابقة –، وتنتمي الأخرى $|\psi_\sigma\rangle$ إلى الفضاء الهيلبرتي الذي يعينه التمثيل الجديد – السبينوري Spinoriel – لزمرة الدورانات. تنتمي $|\psi\rangle$ إلى فضاء هيلبرتي هو الجداء التانسوري لهذين الفضائين

$$|\psi\rangle = |\psi_{n,\ell,m}\rangle \otimes |\psi_\sigma\rangle$$

إن العزم الزاوي السبيني جمعي مثله مثل العزم الزاوي المداري ونكتب مؤثر العزم الزاوي الكلي لمجموعة من الجسيمات – لذرة ما مثلاً – على الشكل

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad (4.8)$$

حيث $\vec{L}$ هو العزم المداري الكلي و $\vec{S}$ العزم السبيني الكلي. تكافئ هذه العلاقة ثلاث علاقات $J_x = L_x + S_x$ ، $J_y = L_y + S_y$ ، $J_z = L_z + S_z$ .

وبما أن $\vec{S}$ تمثيل لزمرة الدورانات فإن مركباته تخضع لنفس علاقات المبادلة التي تخضع لها مركبات $\vec{L}$ (1.4) ومولدات عناصر زمرة الدورانات '(1.4) – وهي قاعدة عامة في تمثيل الزمر. يمكن برهانها ولكننا اكتفينا بالتحقق منها في (1.4). لدينا إذاً

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k \qquad (4.9)$$

لدينا كذلك كل علاقات المبادلة الناتجة عن (1.4)؛ وعلى وجه الخصوص

$$[S^2, S_3] = 0 \qquad (1.8)_s$$

$$[S_+, S_-] = 2\hbar S_3 \qquad (1.10)_s$$

حيث

$$S_\pm S_\mp = S^2 - S_3^2 \pm \hbar S_3 ، \quad S_\pm = S_1 \pm iS_2 \qquad (1.10)'_s$$

نرمز للقيم الخاصة لـ $S_3$ بـ $\hbar m$ كما فعلنا في (1.29) مع فارق أساسي هو أن إعطاء m قيماً صحيحة لم يعد ضرورياً. لقد كان سبب هذا التحديد هو الشكل التفاضلي لـ $L_3$ : $L_3 = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ و $\psi \sim e^{im\varphi}$. أما $S_3$ فلا علاقة له بالزوايا إطلاقاً؛ كما بينت تجربة شتيرن وغيرلاش من جهة أخرى أنه من الممكن أن تأخذ m قيماً نصف صحيحة وتنتقل من قيمة ما m إلى القيمة المجاورة $m \pm 1$ بتطبيق المؤثر $S_\pm$، أعلى هذه القيم ولنرمز له بـ s يحقق العلاقة (1.33)

$$S^2 = \hbar^2 s(s+1) \qquad (1.33)_s$$

وبعد الفضاء هو كما في حال العزم المداري هو $2s+1$. إنه ذو بعدين في تجربة شتيرن وغيرلاش و $s = \dfrac{1}{2}$.

وحده $(r, \theta, \varphi) = \vec{r}$ وإنما على متغير إضافي داخلي هو السبين الذي سنرمز له بـ $\sigma$ : $\psi(\vec{r}, \sigma)$. أو بعبارة أخرى فإن $|\psi\rangle$ هي جداء متجهتي حالة مستقلة إحداهما عن الأخرى تنتمي الأولى منهما إلى الفضاء الهيلبرتي الذي تعينه المتغيرات $(r, \theta, \varphi)$ – $|\psi_{n,\ell,m}\rangle$ على سبيل المثال الذي رأيناه في الفقرة السابقة –، وتنتمي الأخرى $|\psi_\sigma\rangle$ إلى الفضاء الهيلبرتي الذي يعينه التمثيل الجديد – السبينوري Spinoriel – لزمرة الدورانات. تنتمي $|\psi\rangle$ إلى فضاء هيلبرتي هو الجداء التانسوري لهذين الفضائين

$$|\psi\rangle = |\psi_{n,\ell,m}\rangle \otimes |\psi_\sigma\rangle$$

إن العزم الزاوي السبيني جمعي مثله مثل العزم الزاوي المداري ونكتب مؤثر العزم الزاوي الكلي لمجموعة من الجسيمات – لذرة ما مثلاً – على الشكل

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad (4.8)$$

حيث $\vec{L}$ هو العزم المداري الكلي و $\vec{S}$ العزم السبيني الكلي. تكافئ هذه العلاقة ثلاث علاقات $J_x = L_x + S_x$ ، $J_y = L_y + S_y$ ، $J_z = L_z + S_z$.

وبما أن $\vec{S}$ تمثيل لزمرة الدورانات فإن مركباته تخضع لنفس علاقات المبادلة التي تخضع لها مركبات $\vec{L}$ (1.4) ومولدات عناصر زمرة الدورانات '(1.4) – وهي قاعدة عامة في تمثيل الزمر. يمكن برهانها ولكننا اكتفينا بالتحقق منها في (1.4). لدينا إذاً

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k \qquad (4.9)$$

لدينا كذلك كل علاقات المبادلة الناتجة عن (1.4)؛ وعلى وجه الخصوص

$$[S^2, S_3] = 0 \qquad (1.8)_s$$

$$[S_+, S_-] = 2\hbar S_3 \qquad (1.10)_s$$

حيث

$$S_\pm S_\mp = S^2 - S_3^2 \pm \hbar S_3 \text{ ،} \quad S_\pm = S_1 \pm iS_2 \qquad (1.10)'_s$$

نرمز للقيم الخاصة لـ $S_3$ بـ $\hbar m$ كما فعلنا في (1.29) مع فارق أساسي هو أن إعطاء m قيماً صحيحة لم يعد ضرورياً. لقد كان سبب هذا التحديد هو الشكل التفاضلي لـ $L_3$ : $L_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ و $\psi \sim e^{im\varphi}$. أما $S_3$ فلا علاقة له بالزوايا إطلاقاً؛ كما بينت تجربة شتيرن وغيرلاش من جهة أخرى أنه من الممكن أن تأخذ m قيماً نصف صحيحة وتنتقل من قيمة ما m إلى القيمة المجاورة $m \pm 1$ بتطبيق المؤثر $S_\pm$، أعلى هذه القيم ولنرمز له بـ s يحقق العلاقة (1.33)

$$S^2 = \hbar^2 s(s+1) \qquad (1.33)_s$$

وبعد الفضاء هو كما في حال العزم المداري هو $2s+1$. إنه ذو بعدين في تجربة شتيرن وغيرلاش و $s = \frac{1}{2}$.

هذا يعني أنه من اللازم توسيع المبرهنة 1 لتأخذ بعين الاعتبار هذا الواقع الجديد وتصبح على الشكل التالي :

**مبرهنة 2 :**

تتعين تمثيلات الزمرة الدورانية – التانسورية والسبينورية – غير القابلة للاختزال بإعطاء عدد صحيح أو نصف صحيح، j، يأخذ القيم 0، $\frac{1}{2}$، 1، $\frac{3}{2}$، 2 ... إلى اللانهاية نسميه ثقل التمثيل، وذلك في فضاءات أبعادها $(2j + 1)$. وهكذا فإن j عدد صحيح أو نصف صحيح حسب قيم السبين الكلي لأن قيم العزم المداري الكلي صحيحة دوماً.

إن
$$\left[\vec{L}, \vec{S}\right] = 0 \qquad (4.10)$$

لأن هذين المؤثرين لا يفعلان في نفس الفضاء الهيلبرتي، يفعل الأول في متجهات الحالة المتوقفة على الوضع والثاني على تلك المتوقفة على السبين، وبالتالي فإن
$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \qquad (4.11)$$

ونظراً لهذه العلاقة أيضاً ولـ ((1.(3.15)) المطبقة على كل مركبة من المركبات الثلاث $i, j, k$ للمؤثرات المتجهة
$$\left[L_i^2, L_iS_i\right] = L_i\left[L_i, L_iS_i\right] + \left[L_iS_i, L_i\right]L_i$$

فإن كل مبادل من هذين المبادلين يساوي الصفر :
$$L_iL_iS_i - L_iS_iL_i = L_iL_iS_i - L_iL_iS_i = 0$$

وبالتالي فإن
$$\left[L^2, \vec{L} \cdot \vec{S}\right] = 0 \qquad (4.12)$$

ولدينا علاقة مماثلة من أجل $S^2$ وبالتالي من أجل $J^2$.

ترينا العلاقة (4.10) بالحساب مباشرة أو الاعتماد على ((1.(3.15)) أن
$$\left[\vec{L}, S^2\right] = \left[L^2, S^2\right] = 0 \qquad (4.13)$$

ثم إن العلاقات الثلاث الأخيرة تبين أن
$$\left[J^2, L^2\right] = 0 \qquad (4.14)$$
$$\left[J^2, S^2\right] = 0 \qquad (4.15)$$

وأخيراً فإن $J_z = L_z + S_z$ تبادلي مع كل $L^2$ و $S^2$ و $J^2$ نظراً للعلاقتين (1.8) و $(1.8)_S$ والعلاقة (4.12) الصحيحة أيضاً من أجل $S^2$ و $J^2$ كما قلنا. وهكذا

**قضية 5 :** إن المؤثرات الأربعة $J^2$، $L^2$، $S^2$ و $J_z$ تبادلية : إنها رصودة في آن واحد.

إن الفضاء الذي يفعل فيه $J$ هو الجداء التانسوري للفضاء الذي يفعل فيه العزم الزاوي المداري والمحدد بالعدد الصحيح $\ell$ – ثقل التمثيل التانسوري – ذي الـ $2\ell + 1$ بعداً بالفضاء الذي يفعل فيه العزم الزاوي السبيني المحدد بالعدد الصحيح أو نصف الصحيح $s$ – ثقل التمثيل السبينوري – ذي الـ$(2s+1)$بعداً. ولدينا إذاً فضاء بـ $(2\ell+1)(2s+1)$ بعداً وبالتالي $(2j+1) = (2\ell+1)(2s+1)$ مسقط ممكن للعزم الزاوي الكلي على اتجاه معين؛ نرمز بالعدد $m_j$ لقيمة هذا المسقط الذي تبلغ قيمته العظمى

$$(m_j)_{max} = \ell + s \tag{4.16}$$

بتطبيق المؤثر $L_-$ أو $S_-$ الذي يخفض هذه القيمة نحصل على قيم $m_j$ التالية الممكنة وعددها $2j+1$ بوحدة إلى أن نصل إلى أصغر العددين $-\ell$ أو $-s$، أي أن $m_j$ تتراوح بين $\ell + s$ و $|\ell - s|$

$$|\ell - s| \le m_j \le \ell + s \tag{4.17}$$

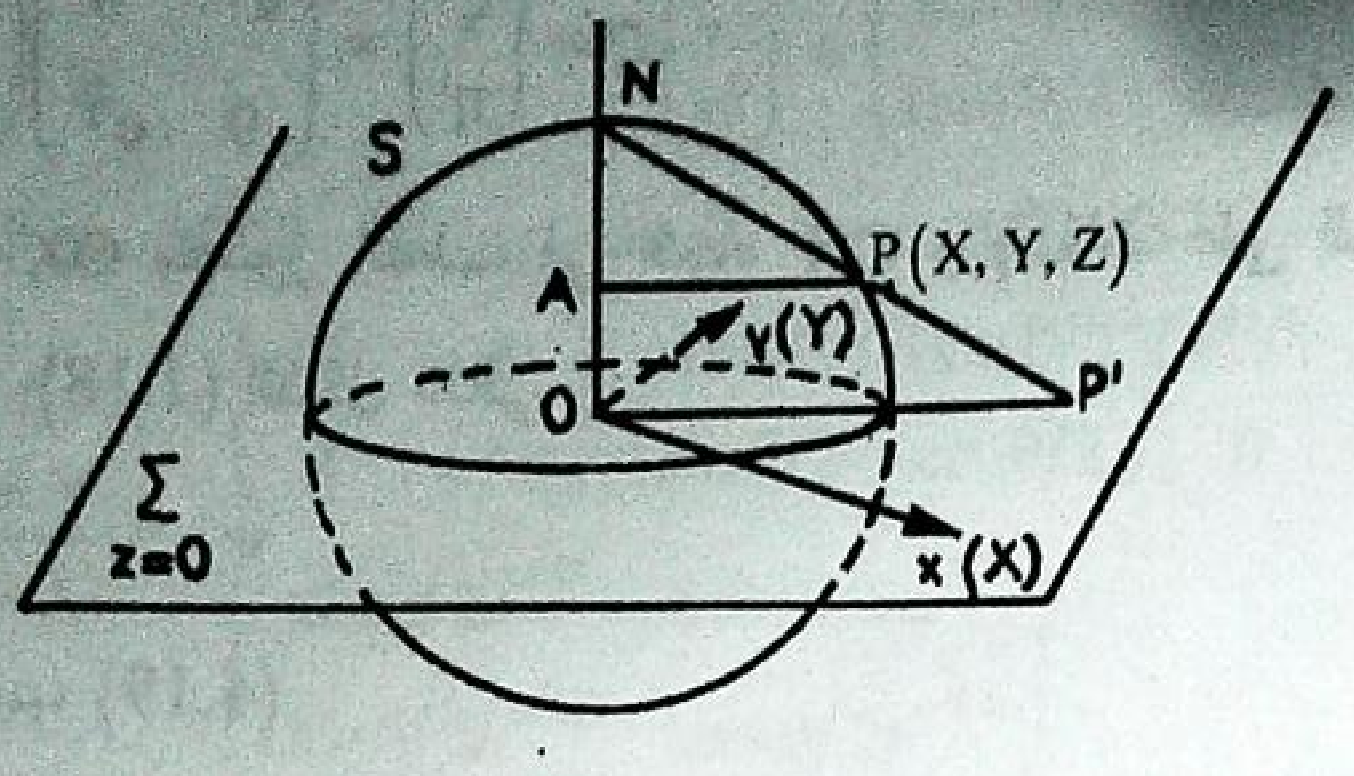
بتخفيضها بواسطة $L_-$ : لنجد من جديد أن $(2\ell+1)$ و $S_-$ إمكانية بتخفيض القيمة بواسطة $(2s+1)$

$$(2j+1) = (2\ell+1)(2s+1) \tag{4.17'}$$

## 4.4– توصيف الدوران بمصفوفة 2x2. كرة ريمان

عرّفنا الدوران بواسطة زوايا أولر $(I.\S5)$، بدوران حول المحور $OZ$ بزاوية $\psi$ متبوع بدوران حول الخط العقدي – دوران من نوع الدوران حول $OX$ بزاوية $\theta$ – وأخيراً بدوران حول $Oz$ بزاوية $\varphi$. يمكننا هندسياً مقابلة هذه الدورانات بتحويلات في مستوى عقدي، في فضاء ذي بعدين، سنحدد خواصه فيما يلي، وذلك بواسطة إسقاط هذه الدورانات على المستوى العقدي على النحو التالي :

لتكن لدينا الكرة الواحدية – نصف قطرها يساوي 1 – ذات المركز $O$ في الفضاء الإقليدي العادي $R^3$؛ ولنرمز لها بـ $S^2$. وليكن $N$ القطب الشمالي لهذه الكرة. ننظر للمستوى $XY$ كمستوى عقدي نرمز له بـ $\Sigma$ ونكتب نقاطه على الشكل $\zeta = X + iY$. نسقط أي نقطة من الكرة $P(X, Y, Z)$ على $\Sigma$ انطلاقاً من $N$؛ يقع هذا الإسقاط في النقطة $P'$، الشكل.6. نرى على الشكل بسهولة أن



الشكل.6

$$\frac{OP'}{AP} = \frac{NO}{NA}$$

أي أن النقطة $\zeta$ المعينة لـ $OP'$ هي

$$\zeta = 1 \cdot \frac{AP}{NA} = \frac{X + iY}{1 - Z} \qquad (4.18)_1$$

ونعبر عن $X, Y, Z$، إحداثيات $P$، بدليل $\zeta$ ومرافقها العقدي

$$\bar{\zeta} = \frac{X - iY}{1 - Z}$$

لدينا

$$X = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \quad , \quad Y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)} , \quad Z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \qquad (4.19)$$

نقابل في هذا الإسقاط النقطة N بالنقطة $\zeta = \infty$ في $\Sigma$. ونكون بذلك قد طابقنا بهذا الإسقاط المسمى بالإسقاط المجسم Stereographic المستوى العقدي مضافاً إليه النقطة في اللانهاية مع الكرة المسماة بكرة ريمان.

سنكتب تجنباً للإحداثيات في اللانهاية العدد العقدي $\zeta$ على الشكل

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta} \qquad (4.18)'$$

ونكتب $\zeta = (\xi, \eta)$، تسمى الإحداثيات $\xi$، $\eta$ بالإحداثيات الإسقاطية العقدية المتجانسة لأن $(\xi, \eta)$ و $(\lambda\xi, \lambda\eta)$ تمثلان ذات النقطة P من الكرة ونكتب النقطة في اللانهاية التي تمثل القطب N على الشكل $(1, 0)$. تأخذ العلاقات (4.19) في هذه الإحداثيات الشكل التالي

$$X = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}} \quad , \quad Y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})} , \quad Z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}} \qquad (4.19)'$$

إن دوران الكرة حول المحور OZ بالزاوية $\psi$ يحول $\zeta$ إلى $\zeta' = e^{i\psi}\zeta$ وإذا أردنا كتابة هذا التحويل بدليل $\xi$ و $\eta$ فإنه حسب $(4.18)'$ المصفوفة القطرية

$$\zeta' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.20)$$

نعبر عن الدوران حول OX بتصور القطب في اتجاه OX والإسقاط على المستوى (العقدي) (Y,Z) لتأخذ $\zeta$ المعبر عنها بـ $(4.18)_1$ الشكل التالي

$$w_x = \frac{Y + iZ}{1 - X} \qquad (4.18)_2$$

التي نكتبها بدليل $\zeta$ حسب (4.19)

$$w_x = \frac{i(\bar{\zeta} - 1)(\zeta + 1)}{(\bar{\zeta} - 1)(\zeta - 1)} = \frac{i(\zeta + 1)}{(\zeta - 1)}$$

يحول دوران الكرة حول OX – الخط العقدي – بالزاوية $\theta$ $w_x$ إلى $w'_x = e^{i\theta} w_x$ وبالتالي $\zeta$ إلى $\zeta'$، حسب العلاقة السابقة

$$\frac{\zeta' + 1}{\zeta' - 1} = e^{i\theta} \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$$

نكتب هذه العلاقة بدليل الإحداثيات الإسقاطية على الشكل

$$\frac{\xi' + \eta'}{\xi' - \eta'} = e^{i\theta} \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta} \qquad (4.21)$$

ونفتش عن حل لهذه المعادلة بواسطة مصفوفة كما في (4.20) – عناصرها عقدية

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.22)$$

وبتبديل $\xi' = \alpha\xi + \beta\eta$ و $\eta' = \gamma\xi + \delta\eta$ بـ $\xi'$ و $\eta'$ في (4.21) المكتوبة على الشكل

$$(\xi' + \eta')(\xi - \eta) = e^{i\theta} (\xi + \eta)(\xi' - \eta')$$

نحصل على العلاقات التالية بين عناصر هذه المصفوفة :

$$\alpha + \gamma = e^{i\theta} (\alpha - \gamma)$$

الناتجة عن تساوي مضروب $\xi^2$ في طرفي (4.21)، والعلاقة التالية الناتجة عن تساوي مضروب $\eta^2$

$$\delta + \beta = e^{i\theta} (\delta - \beta) \quad \text{أو} \quad ; \quad -(\beta + \delta) = e^{i\theta} (\beta - \delta)$$

أي أن النسبة

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\cos\theta/2}{i\sin\theta/2}$$

لا تقدم العلاقة بين تساوي مضاريب $\xi\eta$ أي علاقة جديدة ولكننا سنفترض أن معين المصفوفة يساوي الواحد

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

مما يجعلنا نطابق $\alpha$ و $\delta$ مع $\cos\theta/2$ و $\beta$ و $\gamma$ مع $i\sin\theta/2$ ونكتب مصفوفة الدوران حول OX ببعدين بدليل $\xi$، $\eta$ على الشكل

$$\zeta' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.20)$$

نعبر عن الدوران حول OX بتصور القطب في اتجاه OX والإسقاط على المستوى (العقدي) $(Y, Z)$ لتأخذ $\zeta$ المعبر عنها بـ $(4.18)_1$ الشكل التالي

$$w_x = \frac{Y + iZ}{1 - X} \qquad (4.18)_2$$

التي نكتبها بدليل $\zeta$ حسب (4.19)

$$w_x = \frac{i(\bar{\zeta} - 1)(\zeta + 1)}{(\bar{\zeta} - 1)(\zeta - 1)} = \frac{i(\zeta + 1)}{(\zeta - 1)}$$

يحول دوران الكرة حول OX – الخط العقدي – بالزاوية $\theta$ $w_x$ إلى $w'_x = e^{i\theta} w_x$ وبالتالي $\zeta$ إلى $\zeta'$، حسب العلاقة السابقة

$$\frac{\zeta' + 1}{\zeta' - 1} = e^{i\theta} \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$$

نكتب هذه العلاقة بدليل الإحداثيات الإسقاطية على الشكل

$$\frac{\xi' + \eta'}{\xi' - \eta'} = e^{i\theta} \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta} \qquad (4.21)$$

ونفتش عن حل لهذه المعادلة بواسطة مصفوفة كما في (4.20) – عناصرها عقدية

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.22)$$

وبتبديل $\xi' = \alpha\xi + \beta\eta$ و $\eta' = \gamma\xi + \delta\eta$ بـ $\xi'$ و $\eta'$ في (4.21) المكتوبة على الشكل

$$(\xi' + \eta')(\xi - \eta) = e^{i\theta}(\xi + \eta)(\xi' - \eta')$$

نحصل على العلاقات التالية بين عناصر هذه المصفوفة :

$$\alpha + \gamma = e^{i\theta}(\alpha - \gamma)$$

الناتجة عن تساوي مضروب $\xi^2$ في طرفي (4.21)، والعلاقة التالية الناتجة عن تساوي مضروب $\eta^2$

$$-(\beta + \delta) = e^{i\theta}(\beta - \delta) \quad ; \quad \text{أو} \quad \delta + \beta = e^{i\theta}(\delta - \beta)$$

أي أن النسبة

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\cos\theta/2}{i\sin\theta/2}$$

لا تقدم العلاقة بين تساوي مضاريب $\xi\eta$ أي علاقة جديدة ولكننا سنفترض أن معين المصفوفة يساوي الواحد

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

مما يجعلنا نطابق $\alpha$ و $\delta$ مع $\cos\theta/2$ و $\beta$ و $\gamma$ مع $i\sin\theta/2$ ونكتب مصفوفة الدوران حول OX ببعدين بدليل $\xi$، $\eta$ على الشكل

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.23)$$

وهكذا فإن الانتقال من المقرن OXYZ إلى Oxyz بواسطة زوايا أولر الثلاث هو الجداء التالي

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta/2 e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & i\sin\theta/2 e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \\ i\sin\theta/2 e^{-i\frac{(\varphi-\psi)}{2}} & \cos\theta/2 e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{pmatrix} \qquad (4.24)$$

## 5.4– الزمرة SU(2) ومصفوفات باولي

لنلاحظ أن المصفوفة A هي مصفوفة من الشكل $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ وذلك بأن نكتب $\beta = \sin\theta e^{i(\frac{\varphi}{2}-\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{2})}$ و $-i\sin\theta e^{-i(\frac{\varphi-\psi}{2})} = \bar{\beta} = \sin\theta e^{-i(\frac{\varphi}{2}-\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{2})}$ .

لنأخذ مرافق هذه المصفوفة

$$A^{\dagger} = \bar{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \qquad (4.25)$$

لنتحقق بسهولة أن

$$A^{\dagger}A = AA^{\dagger} = I \qquad (4.26)$$

أي أن مصفوفة الانتقال A هي مصفوفة واحدية تفعل في فضاء ذي بعدين. لنلاحظ أيضاً أنه من اللازم أن يكون معين المصفوفة مختلفاً عن الصفر حتى نستطيع التعبير عن الدوران بالاتجاه المعاكس بمقلوب المصفوفة A ؛ أما اختيارنا لقيمة المعين، تنظيمه ليكون مساوياً للواحد، فليس ذا تأثير في المحاكمة. نرمز لهذه المصفوفات التي تمثل زمرة الدورانات في الفضاء المتجهي ذي البعدين بالرمز SU(2)، S من خاصة (المعين يساوي الواحد) و U لأنها واحدية و 2 بعد الفضاء وهكذا نكون قد برهنا القضية التالية:

**قضية 6 :**

يقابل كل دوران، كل عنصر من SO(3)، انتقال واحدي في الفضاء ببعدين، عنصر من SU(2). لنلاحظ أن هذه المقابلة التي أطلقنا عليها اسم تشاكل ليست واحداً لواحد أي أن التشاكل ليس تقابلياً لأننا اخترنا الإحداثيات الإسقاطية المتجانسة $(\xi, \eta)$ التي تعين ذات النقطة P عندما تضرب بثابتة، أو بكلمة أخرى تعين الإحداثيات $(\xi, \eta)$ و $(-\xi, -\eta)$ نفس النقطة وبالتالي فإن $\pm A$ من SU(2) تقابلان نفس العنصر $\mathcal{A}$ من SO(3). إن $\pm$ هما العنصران $\pm I$ من SU(2)، نرمز لهما بـ $Z_2$ (إنهما زمرة جزئية

من $SU(2)$ متميزة بمعنى أن المجموعة $SU(2)/Z_2$ تشكل زمرة). نعبر عن كون $SO(3)$ و $SU(2)$ متشاكلين مقاس إشارة بقولنا

**لازمة :**

إن $SO(3)$ و $SU(2)/Z_2$ متشاكلان تقابلياً ونكتب

$$SO(3) \leftrightarrow SU(2)/Z_2 \qquad (4.27)$$

ونكون بذلك قد برهنا على ما جاء في المبرهنة 2 بوجود تمثيل ثقله $j$ نصف صحيح $j = \frac{1}{2}$ في فضاء ببعدين : $2 = (2j + 1)$

إن كون المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

واحدية يخفض عدد الوسطاء فيها من 8 (لا ننسى أن عناصر المصفوفة عقدية) إلى 4 فقط كما إن كونها ذات معين يساوي 1 ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) يجعل عدد الوسطاء يساوي 3، أي أنه يساوي عدد وسطاء العنصر $\mathcal{A} = SO(3)$. وهكذا فإن لـ $SU(2)$ ذات العدد من المولدات وذات علاقات المبادلة $(1.4)'$ التي تخضع لها مولدات $\mathcal{A}$. لدينا من $(4.20)$ و $(4.23)$

$$\begin{cases} \Lambda_3 = \Lambda_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \Lambda_1 = \Lambda_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (4.28)_{1,2}$$

ونحصل على $\Lambda_2$ بتطبيق $(1.4)'$

$$\{[\Lambda_3, \Lambda_1] = \Lambda_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.28)_3$$

كان بإمكاننا التعبير عن الدوران حول $OY$ بزاوية قدرها $\chi$ كما فعلنا في $(4.18)_2$

$$w_y = \frac{Z + iX}{1 - Y}$$

للوصول إلى المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\chi/2 & -\sin\chi/2 \\ \sin\chi/2 & \cos\chi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.29)$$

التي تعطينا المولد $\Lambda_2$ أعلاه.

من $SU(2)$ متميزة بمعنى أن المجموعة $SU(2)/Z_2$ تشكل زمرة). نعبر عن كون $SO(3)$ و $SU(2)$ متشاكلين مقاس إشارة بقولنا

**لازمة :**

إن $SO(3)$ و $SU(2)/Z_2$ متشاكلان تقابلياً ونكتب

$$SO(3) \leftrightarrow SU(2)/Z_2 \qquad (4.27)$$

ونكون بذلك قد برهنا على ما جاء في المبرهنة 2 بوجود تمثيل ثقله j نصف صحيح $j = \frac{1}{2}$ في فضاء ببعدين : $2 = (2j + 1)$

إن كون المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

واحدية يخفض عدد الوسطاء فيها من 8 (لا ننسى أن عناصر المصفوفة عقدية) إلى 4 فقط كما إن كونها ذات معين يساوي 1 ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) يجعل عدد الوسطاء يساوي 3، أي أنه يساوي عدد وسطاء العنصر $\mathcal{A} = SO(3)$. وهكذا فإن لـ $SU(2)$ ذات العدد من المولدات وذات علاقات المبادلة $(1.4)'$ التي تخضع لها مولدات $\mathcal{A}$. لدينا من $(4.20)$ و $(4.23)$

$$\begin{cases} \Lambda_3 = \Lambda_z = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \Lambda_1 = \Lambda_x = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (4.28)_{1,2}$$

ونحصل على $\Lambda_2$ بتطبيق $(1.4)'$

$$\{[\Lambda_3, \Lambda_1] = \Lambda_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.28)_3$$

كان بإمكاننا التعبير عن الدوران حول OY بزاوية قدرها $\chi$ كما فعلنا في $(4.18)_2$

$$w_y = \frac{Z + iX}{1 - Y}$$

للوصول إلى المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\chi/2 & -\sin\chi/2 \\ \sin\chi/2 & \cos\chi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.29)$$

التي تعطينا المولد $\Lambda_2$ أعلاه.

يأخذ العاملون في تطبيق الميكانيك الكمومي[7] الخط العقدي N على يمين OY، بين OY و -OX، يعبرون عن الدوران حول OY بالزاوية χ - أي أن المصفوفة التي يستعملونها هي منقولة المصفوفة أعلاه : إنها

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\chi/2 & \sin\chi/2 \\ -\sin\chi/2 & \cos\chi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (4.30)$$

أي أنهم يأخذون منقولة المصفوفة $\Lambda_2$ : $\tilde{\Lambda}_2 = -\Lambda_2$ . لا يغير هذا التعارف شيئاً في النتائج مادامت كل المصفوفات معرفة مقاس إشارة. يجب فقط أن نحدد الإشارات. سنأخذ $\Lambda_1$ و $\Lambda_3$ كما في السابق ونأخذ $\Lambda_2$ كما يفعلون ونكتب إذاً من أجل $\Lambda_2$ الجديدة

$$[\Lambda_3, \Lambda_1] = \Lambda_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.28)'_3$$

بدلاً عن العلاقة $(4.28)_3$.

إن استبدال $\frac{i}{\hbar}\vec{S}$ بـ $\vec{\Lambda}$ هو الذي يعطينا علاقات المبادلة التي يخضع لها مؤثر العزم الزاوي في الفضاء ذي البعدين

حيث $\vec{S} = \frac{\hbar}{i}\vec{\Lambda} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

أي أن

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_Y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (4.31)$$

تعرف هذه المصفوفات باسم مصفوفات باولي $\vec{\sigma}$ وتحقق طبعاً علاقات المبادلة

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \qquad (4.32)$$

وهكذا فإن دوران الكرة الذي ينقل OXYZ إلى Oxyz المحدد بعنصر المصفوفة $\mathcal{A} \subset SO(3)$ حيث $\mathcal{A} = e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{\Lambda}}$ يقابل بالمصفوفة (التي نرمز لها بنفس الرمز A أيضاً) $A \in SU(2)$ المعنية بـ

$$A = e^{\frac{i}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}} \qquad (4.33)$$

<u>قضية 7</u> :

تحقق مصفوفات باولي المعرفة في (4.31) بالإضافة إلى علاقات المبادلة (4.32) العلاقات التالية

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \end{cases} \qquad (4.34)$$

ومنه علاقات المبادلة المضادة التالية :

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i \equiv [\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij} \qquad (4.34)'$$

---

[7] يأخذون الزوايا التالية : $\alpha = \frac{\pi}{2} - \psi$ وهي الزاوية بين $\overline{OY}$ والخط العقدي الواقع على يمينها، $\beta = \theta$ و $\gamma = \frac{\pi}{2} + \varphi$ الزاوية بين الخط العقدي و Oy ويكتبون المصفوفة (4.24) بدليل هذه الزوايا.

$$Tr\sigma_i = 0$$

لدينا أيضاً

$$(\sigma\vec{a})(\sigma\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a}\times\vec{b})$$

وأخيراً

حيث $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متجهتان في الفضاء الإقليدي.

إن الطرف الأيسر في العلاقة الأخيرة هو

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_i a^i\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\sigma_j b^j\right) = \sum_{i,j=1}^{3}\sigma_i\sigma_j a^i b^j$$

لدينا من أجل $i = j$ $\quad \vec{a}\,\vec{b} = \sum_i \sigma_i^2 a^i b^i$ نظراً للعلاقة الأولى في (4.34)، ومن أجل $i \neq j$ لدينا $\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k a^i b^j$ نظراً للعلاقة '(4.34) التي تعطينا من أجل k تساوي 1 مثلاً الحد $i\sigma_1(a^2b^3 - a^3b^2)$، الخ. ومنه الحد الثاني في المتطابقة.

## 6.4– فضاء السبينورات والزمرة SL(2)

نريد تزويد الفضاء ببعدين، نرمز له بـ E ولعناصره بـ $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$، المعرف على حقل الأعداد العقدية بجداء سلمي ثنائي الخطية. ونتحقق من كونه سلمياً بعدم تغيره نتيجة التحويلات (المصفوفات 2×2) في الفضاء E. لنرمز للمصفوفة بـ

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

وللتحويل بـ

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

نتحقق بسهولة من أجل أي متجهتين x و y تتحولان بالمصفوفة B أن

$$x'^1y'^2 - x'^2y'^1 = (ad - cb)\left[x^1y^2 - x^2y^1\right] \qquad (4.35)$$

وهكذا فإن المقدار $x^1y^2 - x^2y^1$ سلمي إذا كان معين المصفوفة B يساوي الواحد؛ و $B^{-1}$ موجوداً.

**<u>تعريف 6 :</u>**

نطلق على زمرة المصفوفات B ذات العناصر في $\mathbb{C}$ وذات المعين المساوي للواحد في الفضاء ذي البعدين اسم $SL(2,\mathbb{C})$ ونقول عن الفضاء ذي البعدين الذي يحقق العلاقة (4.35) إنه فضاء سبينوري ببعدين.

لدينا أيضاً $Tr\sigma_i = 0$

وأخيراً $(\sigma\vec{a})(\sigma\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b})$

حيث $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متجهتان في الفضاء الإقليدي.

إن الطرف الأيسر في العلاقة الأخيرة هو

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_i a^i\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\sigma_j b^j\right) = \sum_{i,j=1}^{3}\sigma_i\sigma_j a^i b^j$$

لدينا من أجل $i = j$ $\vec{a}\vec{b} = \sum_i \sigma_i^2 a^i b^i$ نظراً للعلاقة الأولى في (4.34)، ومن أجل $i \neq j$ لدينا $\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k a^i b^j$ نظراً للعلاقة '(4.34) التي تعطينا من أجل k تساوي 1 مثلاً الحد $i\sigma_1(a^2b^3 - a^3b^2)$،

الخ. ومنه الحد الثاني في المتطابقة.

## 6.4– فضاء السبينورات والزمرة SL(2)

نريد تزويد الفضاء ببعدين، نرمز له بـ E ولعناصره بـ $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$، المعرف على حقل الأعداد العقدية بجداء سلمي ثنائي الخطية. ونتحقق من كونه سلمياً بعدم تغيره نتيجة التحويلات (المصفوفات 2×2) في الفضاء E. لنرمز للمصفوفة بـ

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

وللتحويل بـ

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

نتحقق بسهولة من أجل أي متجهتين x و y تتحولان بالمصفوفة B أن

$$x'^1y'^2 - x'^2y'^1 = (ad - cb)\left[x^1y^2 - x^2y^1\right] \quad (4.35)$$

وهكذا فإن المقدار $x^1y^2 - x^2y^1$ سلمي إذا كان معين المصفوفة B يساوي الواحد؛ و $B^{-1}$ موجوداً.

**تعريف 6 :**

نطلق على زمرة المصفوفات B ذات العناصر في $\mathbb{C}$ وذات المعين المساوي للواحد في الفضاء ذي البعدين اسم $SL(2, \mathbb{C})$ ونقول عن الفضاء ذي البعدين الذي يحقق العلاقة (4.35) إنه فضاء سبينوري ببعدين.

إن $SU(2)$ زمرة جزئية من $SL(2,\mathbb{C})$. كما أصبحت الموجة $\psi$ تكتب بدليل متجهتي القاعدة، المتجهتين الخاصتين لـ $\sigma_3$، على الشكل $\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}$ وتنتمي بالتالي إلى الفضاء السبينوري.

نعرف إذاً في الفضاء السبينوري ذي البعدين جداءً سلمياً (لا يتغير تحت تأثير $SL(2,\mathbb{C})$، وبشكل خاص تحت تأثير $SU(2)/Z_2 \leftrightarrow SO(3)$، أي أنه سلمي بالنسبة للدورانات) مضاد التناظر

$$x^1y^2 - x^2y^1 = -\left(y^1x^2 - y^2x^1\right)$$

ونكتب

$$(x, y) = -(y, x) \qquad (4.35)'$$

وهكذا فإننا إذا قبلنا تعريف طويلة المتجهة بالجداء السلمي للمتجهة بذاتها فإن طويلة السبينور معدومة

$$(x, x) = 0$$

ونقول إن السبينورات متناحية.

سنكتب هذا الجداء السلمي على شكل جداء داخلي متناظر بأن نعرف التطبيق $\varepsilon : E \to K$، $\varepsilon \in E'$ (حيث $E'$ ثنائي الفضاء $E$ تعريفاً و $K = \mathbb{C}$ حقل الأعداد السلمية) بأن نكتب كما فعلنا مراراً وتكراراً

$$(x, y) = \langle x|\varepsilon y\rangle = \langle\tilde{\varepsilon}x|y\rangle = \langle y|\tilde{\varepsilon}x\rangle \qquad (4.36)$$

– العلاقة الأخيرة تعبير عن تناظر الفضائين، $E$ ثنوي $E'$ – جاعلين من الجداء السلمي تطبيقاً $K \to E : (x, y) = \varepsilon_y(x)$ أو لـ $\tilde{\varepsilon}_x(y)$، لا فرق، عوضاً عن $E \times E \to K$.

علينا الآن تعيين التطبيق $\varepsilon$، "التانسور المتري"، الذي ينقلنا من الإحداثيات مضادة التغيير $x^i$ إلى الإحداثيات مسايرة التغيير $x_i$ في الفضاء $E'$ :

$$x^i = \varepsilon^{ij}x_j \qquad \text{الجمع على } j = 1, 2$$

$$x_j = \varepsilon_{kj}x^k = \tilde{\varepsilon}_{jk}x^k \qquad \text{الجمع هنا على } k$$

ومنه

$$x^i = \varepsilon^{ij}\tilde{\varepsilon}_{jk}x^k \qquad \text{أي أن}$$

$$\varepsilon^{ij}\tilde{\varepsilon}_{jk} = \delta^i_k$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$$

ولدينا من تضاد التناظر

$$(x, y) = -(y, x) = -\langle y|\varepsilon x\rangle$$

وبالمقارنة مع الطرف الأخير في (4.36) نرى أن

$$\varepsilon^{-1} = \tilde{\varepsilon} = -\varepsilon \qquad (4.37)$$

تحدد هذه العلاقة شكل التانسور $\varepsilon$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

ترينا $\tilde{\varepsilon} = -\varepsilon$ أن $a = d = 0$ وأن $b = -c$ كما تبين العلاقة الأخرى $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ أن $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

لدينا أيضاً $b^2 = 1$ لأن $\varepsilon\varepsilon^{-1} = I$. نختار $b = -1$ ونكتب

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

وهكذا فإن التانسور المتري مضاد التناظر خلافاً للتانسورات المترية المتناظرة عادة في الفضاءات الإقليدية وشبه الإقليدية – فضاء مينكوفسكي على سبيل المثال، ولذا فقد وضعنا كلمة تانسور بين علامتين لنطلق عليه الآن اسم السبينور المتري.

لدينا

$$x^i = \varepsilon^{ij} x_j$$

أي أن

$$x^1 = -x_2 \quad و \quad x^2 = x_1 \tag{4.39}$$

يعطينا التانسور $\tilde{\varepsilon}$ نفس هذه النتيجة. نكتب الجداء السلمي مضاد التناظر (4.35) على الشكل

$$x \cdot y = (x, y) = x^1 y_1 + x^2 y_2 = -(y^1 x_1 + y^2 x_2) = -(y, x)$$

ترينا العلاقات السابقة أنه في حال تطبيق مؤثر ما $B$ على المتجهة مضادة التغيير $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ فإن تطبيقه على المتجهة مسايرة التغيير $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ هو :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \tilde{\varepsilon} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \tilde{\varepsilon} B \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \tilde{\varepsilon} B \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \tilde{\varepsilon} B \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

كما ترينا أن انحفاظ الجداء السلمي (4.36) بالمؤثر $B$

$$(x', y') = (x, y)$$

$$\langle Bx | \varepsilon By \rangle = \langle x | \tilde{B} \varepsilon B y \rangle = \langle x | \varepsilon y \rangle$$

و

$$\tilde{B} \varepsilon B = \varepsilon \tag{4.41}$$

هذا إذا كان الانتقال بالمؤثر $B$؛ أما إذا كان بالمؤثر $\bar{B}$ فتأخذ العلاقة الشكل

$$B^{\dagger} \varepsilon \bar{B} = \varepsilon \tag{4.41'}$$

نريد الآن فيما يتعلق بالموجة $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$، إضافة إلى عدم تغيرها بالزمرة $SL(2, \mathbb{C})$ وبشكل خاص عدم تغيرها بالنسبة لتمثيل زمرة الدورانات $\psi^1\psi_1 + \psi^2\psi_2 = 0$، بقاء الاحتمال ثابتاً

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}^1\psi^1 + \bar{\psi}^2\psi^2 = \text{ثابـــت} \tag{4.42}$$

أي دون تغيير نتيجة تطبيق المصفوفة $B \in SL(2,\mathbb{C})$ عليه. سننظر إلى المتجهتين $\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ ومرافقها العقدي $\begin{pmatrix} \bar{\psi}^1 \\ \bar{\psi}^2 \end{pmatrix}$ كمتجهتين مستقلتين عن بعضهما (كثيراً ما نأخذ كمتغيرين مستقلين العددين $z$ و $\bar{z}$ اللذين يعرفان العدد العقدي عوضاً عن العددين $x, y$ : $z = x + iy$) ونكتب متجهة الحالة $\bar{\psi}$ على الشكل

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^1 \\ \bar{\psi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^2 \\ -\varphi^1 \end{pmatrix} \qquad (4.43)$$

بحيث يأخذ الاحتمال شكل جداء سلمي منحفظ

$$\bar{\psi}\psi = \psi^1\varphi_1 + \psi^2\varphi_2 = \psi^1\varphi^2 - \psi^2\varphi^1$$

لنفرض الآن أن السبينور مضاد التغير $\psi$ يتحول بفعل المصفوفة $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ذ $SL(2,\mathbb{C})$ إلى $\psi'$ ولننظر إلى العلاقة بين هذه المصفوفة والمصفوفة $C$ التي يتحول بواسطتها السبينور مضاد التغير $\varphi$ المقابل لـ $\bar{\psi}$. لدينا من (4.43) و (4.40)،

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}'^1 \\ \bar{\psi}'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \tilde{\varepsilon}\, C\, \varepsilon \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \tilde{\varepsilon}\, C\, \varepsilon \begin{pmatrix} \bar{\psi}^1 \\ \bar{\psi}^2 \end{pmatrix}$$

ولدينا من جهة أخرى حسب تعريف $B$.

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}'^1 \\ \bar{\psi}'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}^1 \\ \bar{\psi}^2 \end{pmatrix}$$

أي أن

$$\tilde{\varepsilon}\, C\, \varepsilon = \bar{B} \qquad (a)$$

و

$$C = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad (b)$$

وهي نتيجة كان من الممكن الحصول عليها مباشرة انطلاقاً من علاقة التعريف (4.43) لـ $\varphi^2$ و $-\varphi^1$. ثم إن $\bar{B}$ تحقق العلاقة '(4.41) التي تعطي مع العلاقة (a)

$$\tilde{\varepsilon}\, C\, \varepsilon = \left(B^{\dagger}\varepsilon\right)^{-1} \varepsilon = \tilde{\varepsilon}\, B^{\dagger -1}\, \varepsilon$$

ومنه

$$C = B^{\dagger -1}$$

**<u>قضية 8</u> :** يتحول السبينور $\bar{\psi}$ المعرف بـ (4.42) بمقلوب المرافق $B^{\dagger -1}$ للمؤثر $B$ الذي يتحول بواسطته السبينور $\psi$.

نتحقق مباشرة من هذه القضية بأخذ جداء $C$ ( المعرف بـ (b)) بـ $B^{\dagger}$ : $CB^{\dagger} = I$.

**ملاحظة هامة :** عندما يتحول السبينور $\psi$ بمؤثر ينتمي إلى الحالة الخاصة $SU(2)$ وليس بـ $SL(2,\mathbb{C})$ فإن $BB^{\dagger}=I$ ويتحول السبينور $\overline{\psi}$ بذات المؤثر $B$ : $C=B$؛ ونتحقق من ذلك مباشرة عندما نكتب $B$ الواحدية على الشكل

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

ومن العلاقة (b) أعلاه.

$$C=\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}=B$$

والخلاصة إن فضاء السبينورات هو فضاء ذو بعدين معرف على حقل الأعداد العقدية، مزود بجداء سلمي ثنائي الخطية ومضاد التناظر (طويلة المتجهة تساوي الصفر)، يبقى ثابتاً أمام التحويلات المنتمية إلى الزمرة $SL(2,\mathbb{C})$ (المصفوفات 2x2 التي عناصرها أعداد عقدية ومعينها يساوي الواحد)، ويصمد بشكل خاص أمام التحويلات المنتمية إلى الزمرة الجزئية $SU(2)$ التي طابقناها مع زمرة الدورانات. فضلنا التحدث منذ الآن عن الزمرة $SL(2,\mathbb{C})$ لأنه من الممكن البرهان، بالإسقاط المجسم لكرة ريمانية، تشاكل هذه الزمرة مع زمرة لورانتس $SO(3,1)$، أي أن فضاء السبينورات هو الفضاء الذي يبقى الجداء السلمي المعرف عليه ثابتاً أمام الدورانات المكانية – التي هي زمرة جزئية من زمرة لورانتس تقابلها الزمرة الجزئية $SU(2)$ – وكذلك أمام الدورانات الزمانية المكانية. ينتج انحفاظ العزم الزاوي المداري كما رأينا عن عدم تغير متجهة الحالة نتيجة مؤثر الدوران وينتج انحفاظ العزم الزاوي الصميمي (السبين) عن عدم تغير متجهة الحالة نتيجة الدوران الزماني المكاني. إن الدخول في هذه التفاصيل يخرجنا من الإطار الذي حددناه لهذا الكتاب ولكننا نشير إلى أن مولدات زمرة لورانتس الستة (انظر ملحق الفصل السابع من كتاب الميكانيك) تقابل مولدات الزمرة $SL(2,\mathbb{C})$ الستة (ثمانية أعداد حقيقية مع المعادلة $ad-bc=1$ التي تعطينا علاقتين $Re(ad-bc)=1$ ، $Im\ ad-bc=0$).

## 7.4– الجداء التانسوري للفضاءات السبينورية

لابد لنا من التوقف قليلاً للتذكير ببعض خواص التانسورات قبل متابعة البحث.

إن التانسور من الرتبة $n$ على فضاء متجهي $E$ أبعاده $m$ هو تطبيق متعدد الخطية :

$$T:\overbrace{E\times E\times\ldots E}^{n}\to\mathbb{C} \qquad (1)$$

لنأخذ كي لا نثقل الكتابة تانسوراً من الرتبة الثالثة لثلاث متجهات X ، Y ، Z ولنكتبه كتطبيق ثلاثي الخطية لمتجهات القاعدة $e_i$

$$T(X, Y, Z) = T(X^i e_i, Y^j e_j, Z^k e_k) = T(e_i, e_j, e_k) X^i Y^j Z^k = T_{ijk} X^i Y^j Z^k \qquad (2)$$

الجمع على كل الأدلة i ، j ، k من 1 إلى m.

يمكننا على نفس النحو تعريف التانسور على الفضاءات $\overbrace{E' \times E' \ldots E'}^{n}$ حيث $E'$ ثنوي E ومتجهات القاعدة فيه $\varepsilon^i$

$$T(X, Y, Z) = T(X_i \varepsilon^i, Y_j \varepsilon^j, Z_k \varepsilon^k) = T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k) X_i Y_j Z_k = T^{ijk} X_i Y_j Z_k \qquad (3)$$

ويمكننا تعريف التانسور على $\overbrace{E \times \ldots \times E}^{s}\ \overbrace{E' \times \ldots \times E'}^{r}$ ، $r + s = n$ ونكتب على سبيل المثال من أجل $n = 3$ و $s = 2$

$$T(X, Y, Z) = T(X^i e_i, Y_j \varepsilon^j, Z^k e_k) = T(e_i, \varepsilon^j, e_k) X^i Y_j Z^k = T_i{}^j{}_k X^i Y_j Z^k \qquad (4)$$

نكتب التانسور T على الشكل $T = V_1 \otimes V_2 \ldots \otimes V_n \in E^{\otimes n}$ ؛ لدينا على سبيل المثال من أجل تانسور من الرتبة الثانية

$$T = V \otimes W$$

و

$$T(X, Y) = (V \otimes W)(X, Y) = (V \cdot X)(W \cdot Y) = \left(V_i \varepsilon^i(X^k e_k)\right)\left(W_j \varepsilon^j(Y^k e_k)\right) = V_i W_j X^i Y^j$$

لأن $\varepsilon^i(e_k) = \delta^i_k$ و $\varepsilon^i(e_\ell) = \delta^i_\ell$

ومنه

$$(\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j)(X, Y) = X^i Y^j \qquad (5)$$

تشكل التانسورات المعرفة بـ (1) فضاء متجهياً، يعمم مفهوم ثنوي الفضاء بـ $m^n$ بعداً قاعدته هي تعميم القاعدة (5) ونكتبه على الشكل

$$T = T_{i_1 \ldots i_n} (\varepsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_n}) \qquad (6)$$

ولدينا من أجل $n = 3$ مثلاً

$$T(X, Y, Z) = T_{ijk} (\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j \otimes \varepsilon^k)(X, Y, Z) = T_{ijk} X^i Y^j Z^k$$

كما في التعريف (2) : نقول إن التانسور المعرف بـ (6) تانسور مساير التغيير. نعرف بنفس الشكل التانسور مضاد التغيير

$$T = T^{i_1 \dots i_n}\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots \otimes e_{i_n}\right) \qquad (7)$$

الذي يعطينا من أجل $n = 3$ العلاقة (3). كما يمكننا أخيراً تعريف التانسور الـ $s$ مرة مساير التغيير و $r$ مرة مضاد التغيير ونكتبه على الشكل

$$T = \sum_{i,j} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s} \otimes e_{i_1} \dots \otimes e_{i_r}\right) \qquad (8)$$

يمكن ضرب التانسورات ببعضها للحصول على تانسورات برتب أكبر $E^{\otimes n+n'} = E^{\otimes n} \otimes E^{\otimes n'}$ ويمكن الانتقال من التانسورات مسايرة التغيير إلى تانسورات مضادة التغيير أو إلى تانسورات مختلطة باستعمال التانسور المتري الذي يتيح لنا رفع أو تخفيض الأدلة. إلا أن ما يهمنا هنا هو تقليص (Contraction) رتبة التانسور :

إنه في الحالة العامة الانتقال من التانسور الـ $s$ مرة مساير التغيير و $r$ مرة مضاد التغيير المعرف بالعلاقة (8) إلى تانسور $s-1$ مرة مساير التغيير و $r-1$ مرة مضاد التغيير وذلك بتحويل الجداء التانسوري لمتجهتين $\varepsilon^{j_\ell}$ و $e_{i_k}$ من القاعدة في الفضاء التانسوري إلى جداء داخلي $\langle \varepsilon^{j_\ell}, e_{i_\ell} \rangle$ نرمز لمؤثر التقليص الذي يحقق هذا التحويل بـ $C^{i_k}_{j_\ell}$ ونكتب

$$C^{i_k}_{j_\ell} T = \sum_{i,j} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \langle \varepsilon^{j_\ell}, e_{i_k} \rangle \left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \overset{\vee}{\varepsilon}^{j_\ell} \dots \otimes e_{i_1} \dots \overset{\vee}{e}_{i_k} \dots \otimes e_{i_r}\right) \qquad (9)$$

نقصد بالرمز $v$ التعبير عن غياب المتجهة من قاعدة التانسور. إن

$$\langle \varepsilon^{j_\ell}, e_{i_k} \rangle = \delta^{j_\ell}_{i_k} \qquad (10)$$

لا ننسى أن إشارة الجمع $\sum_{i,j}$ هي الجمع على كل قيم الـ $i$ من $1$ إلى $n$ وكل قيم $j$؛ وهكذا فإن الجداء الداخلي يساوي الصفر إلا عندما تكون $i_k = j_\ell$ ونحصل على :

$$C^{i_k}_{j_\ell} T = \sum_{i,j} T^{i_1 \dots i_k \dots i_r}_{j_1 \dots j_\ell \dots j_s} \delta^{j_\ell}_{i_k}\left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \overset{\vee}{\varepsilon}^{j_\ell} \dots \otimes e_{i_1} \dots \overset{\vee}{e}_{i_k} \dots \otimes e_{i_r}\right) \qquad (11)$$

$$= \sum_{\substack{i \neq i_k \\ j \neq j_\ell}} \tilde{T}^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}}\left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \overset{\vee}{\varepsilon}^{j_\ell} \dots \otimes e_{i_1} \dots \overset{\vee}{e}_{i_k} \dots \otimes e_{i_r}\right)$$

$$i_k = j_\ell = 1$$

حيث $\tilde{T}$ هي مركبات التانسور المقلص والجداء التانسوري المكون لكل عنصر من عناصر القاعدة مؤلفً من $n-2 = s-1+r-1$ متجهة. ينطبق تقليص التانسور المعرف بـ (9) على التانسورات مسايرة التغيير كلياً، أو مضادة التغيير كلياً وذلك بأخذ الجداء السلمي لمتجهتين $\left(e_{i_k}, e_{i_j}\right)$ عوضاً عن الجداء الداخلي أو $\left(\varepsilon^{i_k}, \varepsilon^{i_j}\right)$. كما يمكن إعادتها إلى الشكل (9) بواسطة التانسور المتري.

كما في التعريف (2) : نقول إن التانسور المعرف بـ (6) تانسور مساير التغيير. نعرف بنفس الشكل التانسور مضاد التغيير

$$T = T^{i_1 \dots i_n}\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots \otimes e_{i_n}\right) \qquad (7)$$

الذي يعطينا من أجل $n = 3$ العلاقة (3). كما يمكننا أخيراً تعريف التانسور الـ $s$ مرة مساير التغيير و $r$ مرة مضاد التغيير ونكتبه على الشكل

$$T = \sum_{i,j} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s} \otimes e_{i_1} \dots \otimes e_{i_r}\right) \qquad (8)$$

يمكن ضرب التانسورات ببعضها للحصول على تانسورات برتب أكبر $E^{\otimes n+n'} = E^{\otimes n} \otimes E^{\otimes n'}$ ويمكن الانتقال من التانسورات مسايرة التغيير إلى تانسورات مضادة التغيير أو إلى تانسورات مختلطة باستعمال التانسور المتري الذي يتيح لنا رفع أو تخفيض الأدلة. إلا أن ما يهمنا هنا هو تقليص (Contraction) رتبة التانسور :

إنه في الحالة العامة الانتقال من التانسور الـ $s$ مرة مساير التغيير و $r$ مرة مضاد التغيير المعرف بالعلاقة (8) إلى تانسور $s-1$ مرة مساير التغيير و $r-1$ مرة مضاد التغيير وذلك بتحويل الجداء التانسوري لمتجهتين $\varepsilon^{j_\ell}$ و $e_{i_k}$ من القاعدة في الفضاء التانسوري إلى جداء داخلي $\left\langle \varepsilon^{j_\ell}, e_{i_k} \right\rangle$ نرمز لمؤثر التقليص الذي يحقق هذا التحويل بـ $C^{i_k}_{j_\ell}$ ونكتب

$$C^{i_k}_{j_\ell} T = \sum_{i,j} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left\langle \varepsilon^{j_\ell}, e_{i_k} \right\rangle \left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \overset{\vee}{\varepsilon}{}^{j_\ell} \dots \otimes e_{i_1} \dots \overset{\vee}{e}_{i_k} \dots \otimes e_{i_r}\right) \qquad (9)$$

نقصد بالرمز $\vee$ التعبير عن غياب المتجهة من قاعدة التانسور. إن

$$\left\langle \varepsilon^{j_\ell}, e_{i_k} \right\rangle = \delta^{j_\ell}_{i_k} \qquad (10)$$

لا ننسى أن إشارة الجمع $\sum_{i,j}$ هي الجمع على كل قيم الـ $i$ من $1$ إلى $n$ وكل قيم $j$؛ وهكذا فإن الجداء الداخلي يساوي الصفر إلا عندما تكون $i_k = j_\ell$ ونحصل على :

$$C^{i_k}_{j_\ell} T = \sum_{i,j} T^{i_1 \dots i_k \dots i_r}_{j_1 \dots j_\ell \dots j_s} \delta^{j_\ell}_{i_k} \left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \overset{\vee}{\varepsilon}{}^{j_\ell} \dots \otimes e_{i_1} \dots \overset{\vee}{e}_{i_k} \dots \otimes e_{i_r}\right) \qquad (11)$$

$$= \sum_{\substack{i \neq i_k \\ j \neq j_\ell}} \tilde{T}^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} \left(\varepsilon^{j_1} \otimes \dots \overset{\vee}{\varepsilon}{}^{j_\ell} \dots \otimes e_{i_1} \dots \overset{\vee}{e}_{i_k} \dots \otimes e_{i_r}\right)$$

$$i_k = j_\ell = 1$$

حيث $\tilde{T}$ هي مركبات التانسور المقلص والجداء التانسوري المكون لكل عنصر من عناصر القاعدة مؤلفٌ من $n-2 = s-1+r-1$ متجهة. ينطبق تقليص التانسور المعرف بـ (9) على التانسورات مسايرة التغيير كلياً، أو مضادة التغيير كلياً وذلك بأخذ الجداء السلمي لمتجهتين $\left(e_{i_k}, e_{i_j}\right)$ عوضاً عن الجداء الداخلي أو $\left(\varepsilon^{i_k}, \varepsilon^{i_j}\right)$. كما يمكن إعادتها إلى الشكل (9) بواسطة التانسور المتري.

لننظر أخيراً إلى كيفية تحويل التانسور مضاد التغيير كلياً عندما تتحول المتجهات X بالمؤثر A، $X' = A^i_j X^j$. إن $T^{i_1 \dots i_n}$ هي حسب (3) $T(\varepsilon^{i_1}, \varepsilon^{i_2}, \dots \varepsilon^{i_n})$ تتحول متجهات القاعدة في الفضاء الثنوي E' بنفس المصفوفة التي تتحول وفقها مركبات المتجهة X في الفضاء E أي أن

$$T^{i'_1 \dots i'_n} = T(\varepsilon^{i'_1}, \varepsilon^{i'_2} \dots) = A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} \dots A^{i_n}_{j_n} T(\varepsilon^{j_1}, \dots \varepsilon^{j_n})$$

$$T^{i'_1 \dots i'_n} = A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_n}_{j_n} T^{j_1 \dots j_n} \qquad (12)$$

يمكننا أخذ هذه المساواة كتعريف للتانسور من الرتبة n. يمكن كتابة تعريف مقابل للتانسور مساير التغيير (أخذ المصفوفات $\tilde{A}$)،الخ.

لنلاحظ أن التانسور ليس متناظراً فالتانسور من الرتبة الثانية ذو القاعدة $\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$ ليس متناظراً لأن العلاقة (5) تبين أن

$$(\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j)(X, Y) = X^i Y^j \neq (\varepsilon^j \otimes \varepsilon^i)(X, Y) = X^j Y^i$$

إلا أنه من الممكن تعريف تانسورات متناظرة وأخرى مضادة التناظر وذلك باللجوء إلى ما نفعله عادة من أجل دالة بمتغيرين $f(x, y)$ بأن نكتب دالة متناظرة على الشكل $f(x, y) + f(y, x)$ بمعنى أنها لا تتغير نتيجة تبديل المتغيرين ودالة مضادة التناظر على الشكل $f(x, y) - f(y, x)$ بمعنى أن إشارتها تتغير نتيجة تبديل المتغيرين. نحصل على الدالة المتناظرة بـ n متغيراً بأخذ مجموع الدالات الناتجة عن تبديل الـ n متغيراً (n! حداً) وعلى الدالة مضادة التناظر بأخذ "توقيع" التبادل بعين الاعتبار. وهذا ما سنفعله في الفصل السادس.

لننظر الآن إلى خواص التانسورات المبنية على الفضاء السبينوري ذي البعدين. إن بعد التانسور من الرتبة n، كفضاء متجهي هو "$2^n$. لنأخذ بشكل خاص التانسور مضاد التغيير ذي المركبات $T^{i_1 i_2 \dots i_n}$ حيث تأخذ الأدلة i إحدى القيمتين 1 و 2. عندما تتحول المتجهات X بالمؤثر $A \in SU(2)$ يتحول التانسور بالعلاقة (12) مع فارق أساسي هو تعريف المصفوفات A مقاس إشارة وهكذا فإن

$$T^{i'_1 \dots i'_n} = (\pm)^n A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_n}_{j_n} T^{j_1 \dots j_n} \qquad (4.44)$$

علينا إذاً اشتراط الإشارة الموجبة في هذا التحويل إذا ما أردنا له أن يكون تمثيلاً للزمرة $SU(2)$ (بصورة أعم للزمرة $(SL(2, C)$). يجب إذاً أن يكون n عدداً زوجياً نكتبه على الشكل

$$n = 2j \qquad (4.45)$$

لننظر في هذا الفضاء التانسوري $2^{2j}$ إلى الفضاء الجزئي المتناظر فيه. لا تأخذ الأدلة إلا القيمتين 1 و 2 كما قلنا ولذا فإنه من الممكن إعطاء المركبات إحدى الأشكال التالية

$$T^{1,1,\dots 1}, T^{1,1,\dots,1,2}, \dots T^{\overbrace{1,\dots 1}^{m}, \overbrace{2,\dots 2}^{2j-m}} \dots T^{2,2,\dots 2} \qquad (4.46)$$

أي أن التانسورات $(e_1 \otimes \dots \otimes e_1)$، $(e_1 \otimes, \dots \otimes e_1 \otimes e_2)$...$(e_2 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_2)$ تشكل قاعدة للفضاء الجزئي المتناظر من $E^{\otimes n}$، وعددها هو $n + 1 = 2j + 1$. نرمز لهذا الفضاء الجزئي بـ $S\,E^{\otimes n}$ ترينا

العلاقة (4.44) بعد أن اخترنا الإشارة الموجبة فيها $(n=2j)$ أن الفضاء المتناظر لا يتغير نتيجة التحويلات : إن تبديل الأدلة $j_1,\ldots,j_n$ فيما بينها الذي يبقينا في $S\,E^{\otimes n}$ يعني تبديل العناصر $A^{i_r}_{j_r}$ فيما بينها وبالتالي تبديل الأدلة $i_1 \ldots i_n$ فيما بينها. واضح أن تبديل العناصر $A^{i_r}_{j_r}$ (مضاريب $T^{j_1\ldots j_n}$) لا يؤثر على نتيجة التحويل و $T^{i_1\ldots i_n} \in S\,E^{\otimes n}$.

للتانسور $T \in S\,E^{\otimes n}$ خاصة هامة أخرى ناتجة عن تضاد تناظر الجداء السلمي في فضاء السبينورات هي استحالة تقليصه. لدينا من (9) ومن الملاحظة التي تلتها

$$C^{i_k}_{j_\ell}T = \sum_{i=1}^{n} T^{i_1\ldots i_n}\left(e_{i_k}, e_{j_\ell}\right)\left(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes\check{e}_{i_k}\ldots\otimes\check{e}_{j_\ell}\ldots\otimes e_{i_n}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} T^{i_1\ldots i_n}\left(e_{j_\ell}, e_{i_k}\right)\left(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes\check{e}_{j_\ell}\ldots\otimes\check{e}_{i_k}\ldots\otimes e_{i_n}\right)$$

$$= 0 \qquad (4.47)$$

لأن $e_{i_k}\otimes e_{j_\ell}$ متناظر في $S\,E^{\otimes n}$.

ومنه

**<u>قضية 9</u> :**

يشكل الفضاء الجزئي المتناظر من $E^{\otimes n}$ الذي أبعاده $2j+1$ حيث $n=2j$، تمثيلاً غير قابل للاختزال للزمرة $SU(2)$ أي لزمرة الدوران $SO(3) \leftrightarrow SU(2)/Z_2$. نقول عن $j$ إنه ثقل التمثيل ويأخذ القيم التالية $j=\frac{1}{2}$، $j=\frac{3}{2}\ldots$ نصف الصحيحة.

لنطبق هذه النتائج على متجهة حالة لـ $2j=n$ جسيماً سبين كل منها يساوي $\frac{1}{2}$، لنرمز لسبينور الجسيمات بـ $\psi$، $\varphi\ldots$ عندما يكون مسقط سبينها على اتجاه ما نحو الأعلى و $\chi$، $\rho$ عندما يكون المسقط في الاتجاه المعاكس ونكتب انطلاقاً من (5) حيث متجهتا القاعدة هي المتجهتان الخاصتان لـ $\sigma_3$ مركبة الجداء التانسوري $T^{1\ldots1,2\ldots2}$ على الشكل (4.46)

$$\underbrace{\psi^1\varphi^1\ldots}_{j+\sigma}\ \underbrace{\chi^2\rho^2\ldots}_{j-\sigma} = T^{i_1\ldots i_n} \equiv \psi^{i_1\ldots i_n} \qquad (4.48)$$

استبدلنا $n-m$ بـ $j+\sigma$ و $m$ بـ $(2j-(j+\sigma))$ $j-\sigma=$ لكي نبين أن السبين الكلي لهذه المركبة هو $\sigma=\frac{1}{2}(j+\sigma-(j-\sigma))$. تأخذ $\sigma$ بطبيعة الحال كل القيم بين $-j$ و $+j$ بإضافة أو طرح عدد صحيح.

نستطيع تنظيم متجهة الحالة لـ $n$ سبين $\Psi(\sigma)$ بأن نكتب

$$\sum_{\sigma=-j}^{+j}\left|\Psi(\sigma)\right|^2 = \sum_{i_1,i_2\ldots i_n=1}^{2}\left|\Psi^{i_1\ldots i_n}\right|^2 \qquad (4.49)$$

العلاقة (4.44) بعد أن اخترنا الإشارة الموجبة فيها $(n = 2j)$ أن الفضاء المتناظر لا يتغير نتيجة التحويلات : إن تبديل الأدلة $j_1,...j_n$ فيما بينها الذي يبقينا في $S\,E^{\otimes n}$ يعني تبديل العناصر $A^{i_l}_{j_l}$ فيما بينها وبالتالي تبديل الأدلة $i_1...i_n$ فيما بينها. واضح أن تبديل العناصر $A^{i_l}_{j_l}$ (مضاريب $T^{j_1...j_n}$) لا يؤثر على نتيجة التحويل و $T^{i_1...i_n} \in S\,E^{\otimes n}$.

للتانسور $T \in S\,E^{\otimes n}$ خاصة هامة أخرى ناتجة عن تضاد تناظر الجداء السلمي في فضاء السبينورات هي استحالة تقليصه. لدينا من (9) ومن الملاحظة التي تلتها

$$C^{i_k}_{j_\ell}T = \sum_{i=1}^{n} T^{i_1...i_n}\left(e_{i_k}, e_{j_\ell}\right)\left(e_{i_1}\otimes...\otimes \check{e}_{i_k}...\otimes \check{e}_{j_\ell}...\otimes e_{i_n}\right)$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} T^{i_1...i_n}\left(e_{j_\ell}, e_{i_k}\right)\left(e_{i_1}\otimes...\otimes \check{e}_{j_\ell}...\otimes \check{e}_{i_k}...\otimes e_{i_n}\right)$$
$$= 0 \qquad (4.47)$$

لأن $e_{i_k}\otimes e_{j_\ell}$ متناظر في $S\,E^{\otimes n}$.

ومنه

<u>قضية 9</u> :

يشكل الفضاء الجزئي المتناظر من $E^{\otimes n}$ الذي أبعاده $2j+1$ حيث $n = 2j$، تمثيلاً غير قابل للاختزال للزمرة $SU(2)$ أي لزمرة الدوران $SO(3) \leftrightarrow SU(2)/Z_2$. نقول عن $j$ إنه ثقل التمثيل ويأخذ القيم التالية $j = \frac{1}{2}$، $j = \frac{3}{2}$ ... نصف الصحيحة.

لنطبق هذه النتائج على متجهة حالة لـ $2j = n$ جسيماً سبين كل منها يساوي $\frac{1}{2}$، لنرمز لسبينور الجسيمات بـ $\psi$، $\varphi$... عندما يكون مسقط سبينها على اتجاه ما نحو الأعلى و $\chi$، $\rho$ عندما يكون المسقط في الاتجاه المعاكس ونكتب انطلاقاً من (5) حيث متجهتا القاعدة هي المتجهتان الخاصتان لـ $\sigma_3$ مركبة الجداء التانسوري $T^{1...1,2...2}$ على الشكل (4.46)

$$\overbrace{\psi^1\varphi^1...}^{j+\sigma}\;\overbrace{\chi^2\rho^2...}^{j-\sigma} = T^{i_1...i_n} \equiv \psi^{i_1...i_n} \qquad (4.48)$$

استبدلنا $n-m$ بـ $j+\sigma$ و $m$ بـ $(2j-(j+\sigma)) = j-\sigma$ لكي نبين أن السبين الكلي لهذه المركبة هو $\sigma = \frac{1}{2}\left(j+\sigma-(j-\sigma)\right)$. تأخذ $\sigma$ بطبيعة الحال كل القيم بين $-j$ و $+j$ بإضافة أو طرح عدد صحيح.

نستطيع تنظيم متجهة الحالة لـ $n$ سبين $\Psi(\sigma)$ بأن نكتب

$$\sum_{\sigma=-j}^{+j}\left|\Psi(\sigma)\right|^2 = \sum_{i_1,i_2...i_n=1}^{2}\left|\Psi^{i_1...i_n}\right|^2 \qquad (4.49)$$

إن تبديل الأدلة فيما بينها يعطينا العامل $n! = (2j)!$ ولكن تبديل المركبات التي لها نفس الدليل 1، أو 2 هو تكرار لا يؤدي إلى شيء. ولذا نكتب من أجل كل $\sigma$ معينة

$$\Psi(\sigma) = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\sigma)!(j-\sigma)!}}\,\Psi^{\underbrace{1\ldots1}_{j+\sigma},\,\overbrace{2\ldots2}^{j-\sigma}} \qquad (4.50)$$

# الفصل الرابع

## نظرية الاضطرابات Perturbations


1- الاضطرابات المستقلة عن الزمن............ 165

2- رفع التدني ............................ 184

3- الاضطراب التابع للزمن................. 197

4- تطبيقات................................ 208

# الفصل الرابع: نظرية الاضطرابات Perturbations

## 1. الاضطرابات المستقلة عن الزمن

### 1.1- ضرورة التقريب

ليس لمعادلة شرودينغر، مثلها مثل غيرها من المعادلات التي تطرأ في الفيزياء، حلول مضبوطة إلا في حالات محدودة وجد بسيطة. ذلك أن كتابة معادلة تفاضلية أو تكاملية لتوصيف ظاهرة فيزيائية – تقليدية أو كمومية – لا تتضمن بالضرورة إمكانية التوصيف الكمي الدقيق لهذه الظاهرة. وهكذا نرى الفيزيائي والرياضي على السواء يكرسان حيزاً هاماً من نشاطاتهما في البحث عن حلول تقريبية لمعادلات الفيزياء؛ ومهمة الفيزيائي هي تحديداً محاولة تقييم الأهمية النسبية لكل مفعول يضاف إلى المعادلة : مدى الأثر الذي يحدثه تفاعل جديد على الطاقة الكامنة، على الهاميلتوني في حال الميكانيك الكمومي.

نطرح الموضوع رياضياً على النحو التالي : لنفرض أننا نعرف حلاً مضبوطاً لمعادلة تفاضلية (معادلة شرودينغر) بوجود حد ثان معين، كيف يمكننا الحصول على حلول جديدة بتغيير طفيف – اضطراب – للحد الثاني ؟

لنفرض إذاً أن حل معادلة شرودينغر هو $|\psi^{(0)}\rangle$ من أجل هاميلتوني معين $H_o$، نسميه، لتمييزه عن التغيرات التي ستطرأ عليه، الهاميلتوني الحر، أي أننا نمتلك الحل $|\psi^{(0)}\rangle$ للمعادلة

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi^{(0)}\rangle = H_o|\psi^{(0)}\rangle$$

سيتغير هذا الحل عندما تضاف التغيرات الطفيفة على الهاميلتوني $H_o$، ستضاف للحل حدود إضافية نسميها اضطرابات. وهكذا فإن $|\psi^{(0)}\rangle$ هو حل تقريبي للهاميلتوني الجديد نجعله أقرب إلى الحل الصحيح، الذي لا نعرفه، بإضافة متجهات حالة جديدة $|\psi^{(1)}\rangle$، $|\psi^{(2)}\rangle$، إلخ.

يكاد يكون لكل مسألة طريقة خاصة بها نتقرب بواسطتها من الحل الأفضل – الذي يقابل النتائج التجريبية إلا أننا سنعطي هنا طريقة عامة تقابل نشر دالة ما تنتمي إلى $C^{(n)}$ على شكل متسلسلة في جوار نقطة منها.

## 2.1- النشر بدليل قوى وسيط $\lambda$

لنفرض أننا كتبنا الهاميلتوني على الشكل

$$H = H_o + H' \quad (1.1)$$

ولنفرض أن $H_o$ كبير أمام $H'$ بمعنى أن القيمة الوسطية لـ $H_o$ : $\langle\psi|H_o|\psi\rangle$ - الطاقة المرتبطة بـ $H_o$ كبيرة أما الطاقة المرتبطة بـ $H'$. لنفرض كذلك أن $H$ لا يتوقف مباشرة على الزمن - الحالات مستقرة - وأن الحلول المستقرة لـ $H_o$ هي

$$H_o|u_k\rangle = E_k^{(0)}|u_k\rangle \quad (1.2)$$

لندخل الوسيط $\lambda \in [0, 1]$ ولنكتب $H$ على الشكل

$$H = H_o + \lambda H' \quad (1.3)$$

حيث $\lambda$ دالة متصلة للزمن بطيئة التغير. يعني هذا الفرض أن الاضطراب قد أدخل بشكل كظوم. فهو يساوي الصفر من أجل $\lambda = 0$ ولا يصل إلى حده الأقصى إلا بعد مدة طويلة $\lambda = 1$ لنبحث عن حلول $|\psi\rangle$ وطاقات $E$ على شكل متسلسلة بقوى $\lambda$

$$|\psi\rangle = |\psi^{(0)}\rangle + \lambda|\psi^{(1)}\rangle + \lambda^2|\psi^{(2)}\rangle + \ldots = \sum_{i=0}^{N}\lambda^i\psi^{(i)} \quad (1.4)$$

$$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \ldots = \sum_{i=0}^{N}\lambda^i E^{(i)} \quad (1.4)'$$

يتناهى $H$ إلى $H_o$ عندما $\lambda \to 0$؛ $|\psi\rangle \to |\psi^{(0)}\rangle$ و $|\psi^{(0)}\rangle$ هي إحدى المتجهات الخاصة لـ $H_o$، ولتكن $|u_k\rangle$. وتتناهى $E$ إلى $E_k^{(0)}$، القيمة الخاصة المقابلة لـ $|u_k\rangle$

لنكتب معادلة القيم الخاصة

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

بدليل (1.3) و (1.4). ولنطابق بين مضاريب قوى $\lambda$ : $\lambda^o$، $\lambda^1 \ldots \lambda^n$ فنحصل على

$$H_o|\psi^{(0)}\rangle = E^{(0)}|\psi^{(0)}\rangle \quad (1.5)_0$$

$$H_o|\psi^{(1)}\rangle + H'|\psi^{(0)}\rangle = E^{(0)}|\psi^{(1)}\rangle + E^{(1)}|\psi^{(0)}\rangle \quad (1.5)_1$$

$$H_o|\psi^{(2)}\rangle + H'|\psi^{(1)}\rangle = E^{(0)}|\psi^{(2)}\rangle + E^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle + E^{(2)}|\psi^{(0)}\rangle \quad (1.5)_2$$

$$\vdots$$

$$H_o|\psi^{(n)}\rangle + H'|\psi^{(n-1)}\rangle = E^{(0)}|\psi^{(n)}\rangle + E^{(1)}|\psi^{(n-1)}\rangle + \ldots E^{(n)}|\psi^{(0)}\rangle \quad (1.5)_n$$

نكتب المعادلة الأولى من أجل $|u_k\rangle$، إحدى الحلول الخاصة ونستبدل في المعادلات التالية $\psi^{(0)}$ و $E^{(0)}$ بـ $|u_k\rangle$ و $E_k^{(0)}$.

تشكل متجهات الحالة $|u_k\rangle$ قاعدة للفضاء الهيلبرتي نفترض أنها منظمة وأنها مختلفة عن بعضها بعضاً : لا يوجد أي مستو متدنٍ للطاقة. مما يتيح لنا كتابة متجهات الحالة الإضافية في هذه القاعدة على الشكل

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_n C_n^{(1)}|u_n\rangle \qquad (1.6)_I$$

فتأخذ المعادلة $(1.5)_I$ الشكل

$$\sum_n C_n^{(1)} H_o|u_n\rangle + H'|u_k\rangle = E_k^{(0)} \sum_n C_n^{(1)}|u_n\rangle + E^{(1)}|u_k\rangle \qquad (1.7)_I$$

ونجد بضربها على اليسار بـ $\langle u_j|$، للحصول على عناصر المصفوفات، على ألا ننسى أن $H_o$ قطري :

$$\sum_n C_n^{(1)}\langle u_j|H_o|u_n\rangle + \langle u_j|H'|u_k\rangle = E_k^{(0)} \sum_n C_n^{(1)}\langle u_j|u_n\rangle + E^{(1)}\langle u_j|u_k\rangle$$

نأخذ بعين الاعتبار (1.2) فنحصل على

$$C_j^{(1)}E_j^{(0)} + (H')_{jk} = E_k^{(0)}C_j^{(1)} + E^{(1)}\delta_{jk} \qquad (1.8)_I$$

التي تعطينا مركبات متجهة الحالة $|\psi^{(1)}\rangle$ في القاعدة $|u_k\rangle$؛ لدينا من أجل $j \neq k$

$$C_j^{(1)} = \frac{H'_{jk}}{E_k^{(0)} - E_j^{(0)}} \qquad (1.9)_I$$

ومن أجل $j = k$

$$E_k^{(1)} = (H')_{kk} \qquad (1.10)_I$$

أي أن الاضطراب من الرتبة الأولى للطاقة $E_k^{(0)}$ المقابلة لمتجهة الحالة $|u_k\rangle$ هو العنصر القطري $(H')_{kk}$ لهاميلتوني الاضطراب.

لم يبق علينا سوى إيجاد $C_k^{(1)}$. ننظم لهذا الغرض $|\psi\rangle$ للواحد – بفرض أن $|\psi^{(0)}\rangle$ منظمة للواحد

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = 1 + \lambda\{\langle\psi^{(1)}|\psi^{(0)}\rangle + \langle\psi^{(0)}|\psi^{(1)}\rangle\} + \lambda^2\{\langle\psi^{(0)}|\psi^{(2)}\rangle + \langle\psi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle + \langle\psi^{(2)}|\psi^{(0)}\rangle\} + \dots \qquad (1.11)$$

ومنه

$$\langle\psi^{(1)}|\psi^{(0)}\rangle + \langle\psi^{(0)}|\psi^{(1)}\rangle = 0$$

وبأخذ $|u_k\rangle$ كمتجهة $|\psi^{(0)}\rangle$ وبوضع $|\psi^{(1)}\rangle$ على الشكل $(1.6)_I$، نجد

$$\overline{C}_k^{(1)} + C_k^{(1)} = 0$$

و $C_k^{(1)}$ عدد تخيلي بحت $C_k^{(1)} = i\gamma$

ولدينا أخيراً

$$|\psi\rangle = |u_k\rangle + \lambda i\gamma|u_k\rangle + \lambda\sum_{n\neq k}\frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}|u_n\rangle$$

$$= (1 + \lambda i\gamma)|u_k\rangle + \lambda\sum_{n\neq k}\frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}|u_n\rangle$$

إلا أن $e^{i\lambda\gamma} = 1 + i\lambda\gamma$ كتقريب أول. هذا يعني أن العامل $C_k^{(1)}$ لا يفعل سوى تغيير طور متجهة الحالة غير المضطربة $|u_k\rangle$. وهو تغيير ضروري لبقاء متجهات الحالة $|u_k\rangle$ متعامدة مع $|\psi^{(1)}\rangle$ وبالتالي تنظيم $|\psi|^2 = 1$ من أجل $\lambda^2$.

وهكذا نكون قد عينا مفعول الاضطراب $H'$ على الطاقة $(1.10)_1$ وعلى متجهة الحالة في التقريب الأول $\lambda$.

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_{n\neq k} \frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} |u_n\rangle \tag{1.12}$$

تحدد العلاقة (1.12) الشروط اللازمة لصلاحية تطبيق هذا التقريب : يجب أن تكون كل مركبات المتجهة $|\psi^{(1)}\rangle$ صغيرة وبالتالي أن تكون عناصر مصفوفة الاضطراب $(H')_{nk}$ صغيرة بالنسبة إلى فروق مستويات الطاقة قبل الاضطراب

$$|(H')_{nk}| << |E_k^{(0)} - E_n^{(0)}| \tag{1.13}$$

أي

$$|(H')_{nk}| << |H_{okk} - H_{onn}|$$

لننتقل الآن إلى متابعة النشر للحصول على الإصلاحات من الرتبة الثانية، أي مضاريب $\lambda^2$ في العلاقة (1.4) مع الأخذ بعين الاعتبار إصلاح الرتبة الأولى $(1.9)_1$ و $(1.10)_1$.

$$|\psi^2\rangle = \sum_m C_m^{(2)} |u_m\rangle \tag{$(1.6)_2$}$$

تأخذ المعادلة $(1.5)_2$، بعد تبديل $|\psi^{(1)}\rangle$ بقيمتها في (1.12) و $|\psi^{(0)}\rangle$ بـ $|u_k\rangle$، الشكل

$$\sum_m C_m^{(2)} H_o |u_m\rangle + \sum_{n\neq k} C_n^{(1)} H' |u_n\rangle = E_k^{(0)} \sum_m C_m^{(2)} |u_m\rangle + (H')_{kk} \sum_{n\neq k} C_n^{(1)} |u_n\rangle + E_k^{(2)} |u_k\rangle \tag{$(1.7)_2$}$$

ثم بأخذ $(1.9)_1$ بعين الاعتبار، الشكل

$$\sum_m C_m^{(2)} H_o |u_m\rangle + \sum_{n\neq k} \frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} H' |u_n\rangle = E_k^{(0)} \sum_m C_m^{(2)} |u_m\rangle + (H')_{kk} \sum_{n\neq k} \frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} |u_n\rangle + E_k^{(2)} |u_k\rangle \tag{$(1.7)'_2$}$$

ونحصل على عناصر المصفوفات بضرب هذه المعادلة على اليسار بـ $\langle u_j|$ كما فعلنا في $(1.7)_1$. نجد

$$C_j^{(2)} E_j^{(0)} + \sum_{n\neq k} \frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} (H')_{jn} = E_k^{(0)} C_j^{(2)} + (H')_{kk} \frac{(H')_{jk}}{E_k^{(0)} - E_j^{(0)}} + E_k^{(2)} \delta_{jk} \tag{$(1.8)_2$}$$

حل هذه المعادلة من أجل $j \neq k$ يعطينا مركبات $|\psi^{(2)}\rangle$ ماعدا المركبة $C_k^{(2)}$

$$C_j^{(2)} = -\frac{(H')_{jk} (H')_{kk}}{(E_k^{(0)} - E_j^{(0)})^2} + \sum_{n\neq k} \frac{(H')_{nk} (H')_{jn}}{(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})(E_k^{(0)} - E_j^{(0)})} \tag{$(1.9)_2$}$$

نحصل على $C_k^{(2)}$ بتنظيم $\langle\psi|$ للواحد مع إهمال الحدود بـ $\lambda^3$، ولكننا سنحدد قبل ذلك قيمة الطاقة المصلحة بضرب $(1.7)'_2$ على اليسار بـ $\langle u_k|$ فنحصل على

$$C_k^{(2)}E_k^{(0)} + \sum_{n\neq k}\frac{(H')_{nk}(H')_{kn}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} = E_k^{(0)}C_k^{(2)} + 0 + E_k^{(2)}$$

ومنه

$$E_k^{(2)} = \sum_{n\neq k}\frac{|(H')_{nk}|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} \qquad (1.10)_2$$

لدينا، انطلاقاً من تنظيم $\langle\psi|$ للواحد، لحساب $C_k^{(2)}$

$$\langle\psi^{(0)}|\psi^{(2)}\rangle + \langle\psi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle + \langle\psi^{(2)}|\psi^{(0)}\rangle = 0$$

أي أن

$$C_k^{(2)} + \sum_{n\neq k}|C_n^{(1)}|^2 + \overline{C}_k^{(2)} = 0$$

والقسم الحقيقي لـ $C_k^{(2)}$ هو

$$\text{Re}C_k^{(2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n\neq k}|C_n^{(1)}|^2 \qquad (1.14)$$

يملي علينا شرط تعامد متجهات الحالة المضطربة أخذ القسم التخيلي لـ $C_k^{(2)}$ مساوياً للصفر. ولدينا في النهاية نظراً لـ $(1.6)_2$، $(1.9)_2$، $(1.14)$ و $(1.9)_1$

$$|\psi^{(2)}\rangle = \sum_{m\neq k}\left[\sum_{n\neq k}\frac{(H')_{nk}(H')_{mn}}{(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})(E_k^{(0)} - E_m^{(0)})} - \frac{(H')_{mk}(H')_{kk}}{(E_k^{(0)} - E_m^{(0)})^2}\right]|u_m\rangle - \frac{1}{2}\sum_{n\neq k}\frac{|(H')_{nk}|^2}{(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})^2}|u_k\rangle \qquad (1.12)_2$$

ولدينا أخيراً نشر متجهة الحالة من الرتبة الثانية (بنشر $(1.12)_2$ بدليل $\langle u_n|$ عوضاً عن $\langle u_m|$ لتوحيد الكتابة)

$$|\psi\rangle = |u_k\rangle + \sum_{n\neq k}\frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}|u_n\rangle + \sum_{n\neq k}\left\{\left[\sum_{m\neq k}\frac{(H')_{mk}(H')_{nm}}{(E_k^{(0)} - E_m^{(0)})(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})} - \frac{(H')_{nk}(H')_{kk}}{(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})^2}\right]|u_n\rangle - \frac{1}{2}\frac{|(H')_{nk}|^2}{(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})^2}|u_k\rangle\right\} \qquad (1.15)$$

والطاقة المصلحة إلى الرتبة الثانية هي نظراً لـ $(1.10)_1$ و $(1.10)_2$

$$E_k = E_k^{(0)} + (H')_{kk} + \sum_{n\neq k}\frac{|(H')_{nk}|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} \qquad (1.16)$$

يمكننا متابعة النشر وكتابة

$$|\psi^{(3)}\rangle = \sum_m C_m^{(3)}|u_m\rangle \qquad (1.6)_3$$

الخ.

ونستطيع تلخيص الطريقة على النحو التالي : ننشر متجهة الحالة في القاعدة $|u_m\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_m C_m |u_m\rangle \tag{1.17}$$

حيث المركبات $C_m$ متسلسلات بقوى $\lambda$

$$C_m = C_m^{(0)} + \lambda C_m^{(1)} + \lambda^{(2)} C_m^{(2)} + \ldots = \sum_{i=0}^{N} \lambda^i C_m^{(i)} \tag{1.18}$$

عندما تكون متجهة الحالة الأصلية – قبل الاضطراب – $\langle u_k|$ فإن $C_m^{(0)}$ هي رمز كرونكر

$$C_m^{(0)} = \delta_{mk} \tag{1.19}$$

ثم نفتش عن حل لمعادلة القيم الخاصة التالية

$$(H_o + \lambda H')|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

التي تأخذ الشكل التالي، نظراً لـ (1.2) و (1.17)، بعد ضربها على اليسار بـ $\langle u_j|$

$$C_j E_j^{(0)} + \sum_m C_m \lambda H'_{jm} = EC_j \quad ;$$

$$\left(E - E_j^{(0)}\right) C_j = \lambda \sum_m C_m H'_{jm} \tag{1.20}$$

تتفق العلاقة الثانية مع نشر E حسب '(1.4) التي تعطي عندما نتوقف عند الرتبة صفر حيث متجهة الحالة $\langle u_k|$ العلاقة التالية :

$$\left(E_k^{(0)} - E_j^{(0)}\right) C_j^{(0)} = 0$$

التي تنطبق على (1.19) لأننا افترضنا عدم تدني الطاقة $E_k^{(0)} \neq E_j^{(0)}$

نكتب (1.20) بدليل (1.18) و '(1.4) بمضاريب $\lambda^{i+1}$ حيث $i \in [0, N-1]$

$$\lambda^{i+1}\left(\sum_{n=0}^{i+1} E_k^{(n)} C_j^{(i-n+1)} - E_j^{(0)} C_j^{(i+1)}\right) = \lambda^{i+1} \sum_m C_m^{(i)} H'_{jm}$$

لدينا من أجل $i = 0$ والقيمتين اللتين تأخذهما $n$ : $n = 0$ ، $n = 1$

$$E_k^{(1)} C_j^{(0)} + \left(E_k^{(0)} - E_j^{(0)}\right) C_j^{(1)} = \sum_m C_m^{(0)} H'_{jm} = H'_{jk}$$

ومن أجل $i = 0$ والقيم الثلاث لـ $n$ : $n = 0$ ، $n = 1$ ، $n = 2$

$$E_k^{(0)} C_j^{(2)} + E_k^{(1)} C_j^{(1)} - E_j^{(0)} C_j^{(2)} + E_k^{(2)} C_j^{(0)} = \sum_m C_m^{(1)} H'_{jm}$$

الخ.

أولى هاتين المعادلتين هي $(1.9)_1$ من أجل $j \neq k$ و $(1.10)_1$ من أجل $j = k$. وثانيتهما $(1.9)_2$ من أجل $j \neq k$ و $(1.10)_2$ من أجل $j = k$.

**ملاحظات :**

1. لا حاجة بنا للقول إن الطريقة التي تبعناها لا تصلح إلا إذا كانت المتسلسلة (1.18) ومعها المتسلسلة (1.4) متقاربتين؛ إلا أن البرهان على تقارب المتسلسلة صعب ومعقد في أغلب المسائل إن لم يكن مستحيلاً. لكن المهم هو أن التقريبات من الرتب الصغيرة، الأولى والثانية تعطي نتائج جيدة بمعنى أنها تتفق مع النتائج التجريبية حتى في حالة تباعد المتسلسلة.

2. لم نستفد من العامل $\lambda$ – الإطلاق الكظوم للاضطراب – إلا لكتابة المساواة بين الحدود التي لها نفس القوة $\lambda^i$ ليختفي بعد ذلك من نتائج الحساب ولذا فليس من الضروري إعطاؤه قيماً عددية. إلا أنه كثيراً ما يأخذ شكل ثابتة اقتران تميز نوعاً من التفاعل عن الأنواع الأخرى، ثابتة البنية الدقيقة غير ذات الأبعاد $\alpha = \frac{1}{137}$ التي تميز التفاعل الكهرطيسي وتدخله كاضطراب أمام التفاعل النووي حيث ثابتة الاقتران أكبر بمئة مرة على الأقل من $\alpha$. ولكن هذا الفرق وحده غير كاف لتطبيق تقنية الاضطراب. إذ لابد أن يتحقق الشرط (1.13) : صغر عناصر مصفوفة الاضطراب $H'$ أمام مستويات الطاقة الأصلية (قبل الاضطراب) وإلا فستكون $\lambda|\psi^{(1)}\rangle$ كبيرة ولا تصلح لأن تكون تصحيحاً لمتجهة الحالة.

3. عندما تكون الحالة $|u_k\rangle$ هي حالة القاع فإن التصحيحات من الرتبة الثانية $E_k^{(2)}$ سالبة حسب $(1.10)_2$.

4. لا توجد صعوبة تذكر لتعميم الحسابات السابقة في حال وجود طيف متصل للهاميلتوني $H_0$. يلزم عندئذ أن نضيف إلى الجمع على الطيف المنفصل التكاملات المقابلة على الطيف المتصل. لنرمز لمتجهات الحالة المتصلة بالرمز $|u_\nu\rangle$ حيث ينتمي الدليل $\nu$ إلى مجال متصل نرمز له بـ $\Omega$. تأخذ المعادلة (1.12) التي تعين المتجهة $|\psi^{(1)}\rangle$ – التصحيح من الرتبة الأولى – الشكل

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq k} \frac{(H')_{nk}}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}|u_n\rangle + \int_\Omega \frac{(H')_{\nu k}}{E_k^{(0)} - E_\nu}|u_\nu\rangle d\nu \qquad (1.12)'$$

## 3.1– اضطراب مستو متدن

وضع المسألة : لنفرض أن لدينا $s$ متجهة حالة $|u_n\rangle$ $n = 1, 2, ...s$ تقابل ذات القيمة الخاصة $E_k^{(0)}$ للهاميلتوني $H_0$ : $H_0|\psi^0\rangle = C_{k,n}^{(0)}|u_n\rangle$. لم يعد لدينا عامل واحد $C_k^{(0)}$ مختلف عن الصفر وإنما $s$ عاملاً، ومن جهة ثانية فإن تعيين عوامل الاضطراب من الرتبة الأولى $C_j^{(1)}$ حسب العلاقة $(1.9)_1$ أصبح مستحيلاً من أجل الطاقات المتساوية ($C_j^{(1)} = \infty$) إلا إذا استطعنا جعل $H'_{jk} = 0$ أي كتابة هاميلتوني الاضطراب على شكل قطري جزئياً، من أجل الطاقة المتدنية. لنرمز بـ $\mathscr{H}_s$ إلى الفضاء المتجهي الجزيء الذي تولده المتجهات $|u_n\rangle$ (إن أبعاد هذا الفضاء منتهية كما سنرى في الفصل القادم).

وسنقوم باختيار قاعدة جديدة في هذا الفضاء تعين تصحيحات الرتبة الأولى المطلوبة. نرمز لمتجهات هذه القاعدة بـ $|v_i\rangle$ ولدينا

$$|v_i\rangle = \sum_{n=1}^{s} a_{in} |u_n\rangle \quad , \quad i = 1, 2, \dots s \qquad (1.21)$$

حيث $(a_{in})$ هي المصفوفة الواحدية التي تعين تغير القاعدة.

إن المتجهات $|v_i\rangle$ متجهات خاصة لـ $H_0$ تقابلها نفس القيمة الخاصة $E_k^{(0)}$.

لنحدد عوامل الاضطراب في $\mathscr{H}_s$ بإضافة دليل إضافي إلى k. ليكن على وجه التحديد P مسقط $|\psi\rangle$ على $\mathscr{H}_s$. نكتب

$$|\psi'\rangle = P|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{s} C_{k,n} |u_n\rangle$$

تأخذ المعادلة (1.20) في التقريب صفر من أجل الحالة k الشكل

$$\left(E_k^{(0)} - E_m^{(0)}\right) C_m^{(0)} = 0 \qquad (1.22)$$

نركز اهتمامنا على الـ s معادلة حيث القوس يساوي الصفر

$$\left(E_k^{(0)} - E_n^{(0)}\right) C_{k,n}^{(0)} = 0$$

التي تبين أن العوامل $C_{k,n}^{(0)} \neq 0$، وعددها s؛ أما العوامل الأخرى فمعدومة طبعاً. وعلينا الآن تحديد قيم $C_{k,n}^{(0)}$ وتصحيح الطاقة من الرتبة الأولى $E_k^{(1)}$. لذا نضرب المعادلة

$$\left(H_0 + \lambda H'\right)|\psi'\rangle = E|\psi'\rangle$$

على اليسار بـ $|u_{n'}\rangle \in \mathscr{H}_s$ ونتوقف عند الحد الأول بـ $\lambda$

$$\langle u_{n'}|\left(H_o + \lambda H'\right)\sum_{n=1}^{s} C_{k,n}^{(0)} |u_n\rangle = \left(E_k^{(0)} + \lambda E^{(1)}\right)\left(\sum_{n=1}^{s} C_{k,n}^{(0)} \langle u_{n'}|u_n\rangle\right)$$

أو

$$E_k^{(0)} C_{k,n'}^{(0)} + \sum_{n=1}^{s} H'_{n'n} C_{k,n}^{(0)} = E_k^{(0)} C_{k,n'}^{(0)} + \sum_{n=1}^{s} E_k^{(1)} C_{k,n}^{(0)} \delta_{n'n}$$

وأخيراً

$$\sum_{n=1}^{s}\left(H'_{n'n} - E_k^{(1)}\delta_{n'n}\right) C_{k,n}^{(0)} = 0 \qquad (1.23)$$

ونحصل على s معادلة خطية متجانسة $(n' = 1, \dots s)$ بـ $C_{k,n}^{(0)}$ مجهولاً. يجب لكي يكون لها حل مختلف عن الصفر (غير تافه) هو أن يكون معين الأمثال مساوياً للصفر

$$\left|H'_s - E_k^{(1)} I\right| = 0 \qquad (1.24)$$

حيث $H'_s$ هي المصفوفة الجزئية $s \times s$ من $H'$ : عناصرها $H'_{n',n}$، $n', n = 1, 2, \dots, s$. تقبل هذه المعادلة بصورة عامة s جذراً حقيقياً نرمز لها بـ $E_{k,1}^{(1)} \dots E_{k,s}^{(1)}$؛ فإذا كانت كل هذه الجذور مختلفة فإن الطاقات المصححة من الرتبة الأولى $E_k^{(0)} + E_{k,s}^{(1)}$ مختلفة عن بعضها ويكون الاضطراب قد رفع التدني

تماماً، وإلا فإن رفع التدني جزئي. لنلاحظ أن المعادلة (1.24) هي معادلة القيم الخاصة لـ $H'_s$ أي المعادلة التي تتيح لنا كتابة $H'_s$ على شكل قطري.

تحدد لنا الجملة (1.23)، من أجل كل جذر $E^{(1)}_{k,i}$، سعةً مقابلة $C^{(0)}_{k,in}$ (أضفنا الدليل i للإشارة إلى أنها السعة المقابلة للجذر $E^{(1)}_{k,i}$). ولما كانت هذه السعات هي التي تحدد تصحيحات الرتبة الأولى فإننا سنأخذها لتعيين مصفوفة استبدال القاعدة في (1.21) $a_{in} = C^{(0)}_{k,in}$؛ ونكون قد استبدلنا بـ $\langle v_i|$ المتجهات $\langle u_n|$ المعينة للتقريب صفر.

لنفرض الآن أن عناصر المصفوفة $H'_s$ معدومة كلها $H'_{n'n} = 0$. هذا يعني أن كل تصحيحات الرتبة الأولى معدومة $E^{(1)}_k = 0$. لذا نبحث مباشرة عن التصحيحات من الرتبة الثانية $E = E^{(0)}_k + E^{(2)}_k$.

لنكتب المعادلة (1.20) على الشكل

$$\left(E - E^{(0)}_\ell\right)C_\ell = \lambda \sum_m C_m H'_{\ell m} \qquad (1.20)'$$

ولنميز بين انتماء $\ell$ إلى أدلة مستوى الطاقة المتدني $\ell = n$، $n = 1, 2, ..., s$، والأدلة الأخرى $\ell \neq n$ فالتصحيح من الرتبة الأولى معدوم في الحالة الأولى

$$E^{(0)}_\ell = E^{(0)}_k \quad ; \quad E = E^{(0)}_k + \lambda^2 E^{(2)}_k \quad و \quad C_\ell = C_{k,n} = C^{(0)}_{k,n} \quad و \quad C^{(0)}_m = 0 \quad \text{من أجل} \quad m \neq n$$

بحيث تعطينا مقابلة الحدود من الرتبة الثانية بـ $\lambda$ العلاقة

$$E^{(2)}_k C^{(0)}_{k,n} = \sum_{m \neq n} C^{(1)}_m H'_{nm} \qquad (1.25)$$

أما إذا كان $\ell \neq n$ فإن الطاقة قبل الاضطراب $E^{(0)}_\ell$ تختلف عن $E^{(0)}_k$ وتبدأ $C_\ell$ بالحد $C^{(1)}_\ell$ ($C^{(0)}_\ell = 0$). لنكتب المعادلة '(1.10) ضمن هذه الشروط لنحصل من أجل الرتبة الأولى على

$$\left(E^{(0)}_k - E^{(0)}_\ell\right)C^{(1)}_\ell = \sum_{n'=1}^{s} C^{(0)}_{k,n'} H'_{\ell n'} \qquad (1.26)$$

$$C^{(1)}_\ell = \frac{\sum_{n'=1}^{s} C^{(0)}_{k,n'} H'_{\ell n'}}{E^{(0)}_k - E^{(0)}_\ell} \qquad \ell = n+1, ..., m, ... \qquad (1.26)'$$

لنضع هذه القيمة لـ $C^{(1)}_\ell$ في (1.25) فنحصل على تصحيح الرتبة الثانية (تصحيح الرتبة الأولى معدوم)

$$E^{(2)}_k C^{(0)}_{k,n} = \sum_{\substack{m,n' \\ m \neq n,n'}} \frac{C^{(0)}_{k,n'} H'_{mn'} H'_{nm}}{E^{(0)}_k - E^{(0)}_m} \qquad (1.27)$$

الذي نكتبه أيضاً على شكل جملة معادلات خطية متجانسة كما في (1.23)

$$\sum_{n'=1}^{s} \left( \sum_m \frac{H'_{mn'} H'_{nm}}{E^{(0)}_k - E^{(0)}_m} - E^{(2)}_k \delta_{n'n} \right) C^{(0)}_{k,n'} = 0 \qquad (1.23)'$$

ويصبح المعين المساوي للصفر الذي يضمن وجود حلول غير تافهة

$$\left| \sum_m \frac{H'_{mn'} H'_{nm}}{E^{(0)}_k - E^{(0)}_m} - E^{(2)}_k I \right| = 0 \qquad (1.24)'$$

يطلق على المعادلتين (1.24) و '(1.24) اسم المعادلة القرنية Secular لوجود معادلات مماثلة لها في الميكانيك السماوي.

سنكرس كل ما تبقى من هذه الفقرة إلى التطبيقات.

## 4.1- الهزاز اللاتوافقي

لندرس حالة هزاز لاتوافقي ببعد واحد خاضع إلى اضطراب $H' = aX^4$ حيث $X^4$ مؤثر الوضع مرفوعاً إلى القوة الرابعة. يأخذ الهاميلتوني الشكل

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kX^2 + aX^4 = H_o + H' \quad ; \quad k = m\omega^2$$

إن طاقة القاع (الطاقة الدنيا) هي كما نعلم $E_0^{(0)} = \frac{\hbar\omega}{2}$ ومتجهة الحالة غير المضطربة هي حسب ((2.(3.18)، حيث كثير حدود هيرميت $H_o = 1$

$$u_o(x) = \langle x|u_o\rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

إن $H'$ صغير لأن قيمه الخاصة $x^4$ صغيرة أمام $x^2$ الصغيرة أمام الواحد $Xu(x) = xu(x)$ وهكذا فإن التصحيح من الرتبة الأولى لـ $E_0^{(0)}$ هو حسب (1.10)

$$E_o^{(1)} = \langle u_o|H'|u_o\rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} ax^4 dx$$

لكن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4}\alpha^{-\frac{5}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}$$

ومنه

$$E_o^{(1)} = \frac{3a}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 \quad (1.28)$$

لتصبح الطاقة الدنيا من الرتبة الأولى.

$$E_o = \frac{\hbar\omega}{2}\left[1 + \frac{3a}{2}\frac{\hbar}{m^2\omega^3}\right]$$

لنلاحظ أننا لم نبدأ بإعطاء اضطراب من الشكل $X^3$ لأن الطاقة الكامنة في هذه الحالة

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + ax^3$$

تصبح سالبة من أجل $a > 0$ و $x$ كبيرة بما فيه الكفاية وسالبة $\left(x < -\frac{1}{2}\frac{k}{a}\right)$. لم يعد الهزاز مشدوداً إلى المركز (القوة سالبة) وإنما يبتعد عنه وبالتالي فإن طيف الطاقة طيف متصل ويمكن للجسيم اجتياز حاجز الكمون متجهاً إلى اللانهاية $x = \infty$. ولم تعد مستويات الطاقة توصف حالات مستقرة. إلا أن احتمال

حدوث ذلك يبقى ضعيفاً للغاية من أجل قيم صغيرة لـ a. لذا يقال عن الحالات التي يصفها الاضطراب إنها شبه مستقرة : إنها مستقرة عملياً.

لنحسب في الحالة العامة مستويات طاقة هزاز لا توافقي ذي الهاميلتوني.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kX^2 + aX^3 + a'X^4 \tag{1.29}$$

مبتدئين بحساب عناصر مصفوفة هاميلتوني الاضطراب

$$H' = aX^3 + a'X^4$$

لدينا بتطبيق قاعدة جداء المصفوفات

$$(X^3)_{kn} = \sum_{\ell} X_{k\ell}(X^2)_{\ell n} = \sum_{\ell,m} X_{k\ell}X_{\ell m}X_{mn} \tag{1.30}$$

حيث $X_{k\ell} = 0$ إلا من أجل $\ell = k \pm 1$ و $X_{k,k-1} = X_{k-1,k} = \sqrt{\frac{k\hbar}{2m\omega}}$ (2.(3.30))

أو بعبارة أخرى

$$X_{k\ell} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k\hbar}{2m\omega}}\,\delta_{k-1,\ell} & \text{من أجل } \ell < k \\ \sqrt{\frac{(k+1)}{2m\omega}}\,\delta_{k+1,\ell} & \text{من أجل } \ell > k \end{cases}$$

وتأخذ (1.30) الشكل

$$(X^3)_{kn} = \sum_{\ell,m}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}\left[\sqrt{\frac{k}{2}}\delta_{k-1,\ell} + \sqrt{\frac{k+1}{2}}\delta_{k+1,\ell}\right]\left[\sqrt{\frac{\ell}{2}}\delta_{\ell-1,m} + \sqrt{\frac{\ell+1}{2}}\delta_{\ell+1,m}\right]\left[\sqrt{\frac{m}{2}}\delta_{m-1,n} + \sqrt{\frac{m+1}{2}}\delta_{m+1,n}\right] \tag{1.31}$$

$$= \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}\left\{\sqrt{\frac{k(k+1)(k-2)}{8}}\delta_{k-3,n} + \frac{3k^{3/2}}{8^{1/2}}\delta_{k-1,n} + \frac{3}{8^{1/2}}(k+1)^{3/2}\delta_{k+1,n} + \sqrt{\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{8}}\delta_{k+3,n}\right\}$$

و لا توجد حدود مختلفة عن الصفر إلا من أجل القيم التالية لـ n : $n = k \pm 3$ و $n = k \pm 1$. لدينا على سبيل المثال

$$(X^3)_{k,k-3} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{k(k-1)(k-2)}{8}} = (X^3)_{k-3,k} \tag{1.32}$$

$$(X^3)_{k,k-1} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{9k^3}{8}} = (X^3)_{k-1,k} \tag{1.33}$$

ولدينا بشكل خاص، حسب '(1.10)

$$(X^3)_{kk} = 0 = E_k^{(1)} \tag{1.34}$$

أي أن الاضطراب من الدرجة الثالثة لا يسهم في التصحيح من الرتبة الأولى للطاقة خلافاً للاضطراب من الدرجة الرابعة الذي نحسب إسهامه بتطبيق قاعدة جداء المصفوفات

$$(X^4)_{kk} = (X^3)_{k,k-1} X_{k-1,k} + (X^3)_{k,k+1} X_{k+1,k}$$

ونحصل من تعريف $X_{k\ell}$ ومن (1.33) على

$$a'(X^4)_{kk} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 \frac{3a'}{4}\left(2k^2 + 2k + 1\right) = E_k^{(1)} \qquad (1.35)$$

ونتحقق بأخذ $k = 0$ من تصحيح الرتبة الأولى للطاقة الدنيا (1.28).

تعطينا العلاقات 2(1.10)، (1.31) وخاصة التعابير التي تليها إسهام $aX^3$ في الرتبة الثانية حسب الصيغة

$$E_k^{(2)} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \frac{a^2}{8}\left[\frac{k(k-1)(k-2)}{3\hbar\omega} - \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3\hbar\omega} + \frac{9k^3}{\hbar\omega} - \frac{9(k+1)^3}{\hbar\omega}\right]$$

$$= -\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \frac{a^2}{\hbar\omega}\frac{30}{8}\left(k^2 + k + \frac{11}{30}\right) \qquad (1.36)$$

ولدينا في النهاية طاقة الهزاز اللاتوافقي ذي الهاميلتوني (1.29) مع تصحيحات الرتبة الأولى (1.35) لـ $X^4$ وتصحيحات الرتبة الثانية (1.36) لـ $X^3$

$$E_k = \hbar\omega\left(k + \frac{1}{2}\right) + \frac{3a'}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2\left(2k^2 + 2k + 1\right) - \frac{15}{4}\frac{a^2}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3\left(k^2 + k + \frac{11}{30}\right) \qquad (1.37)$$

## 5.1– البنية زائدة الدقة لذرة الهدروجين Hyperfine-structure

لنذكر بما رأيناه في الكهرطيسية عن التفاعل بين العزوم المغنطيسية.

يحدث العزم المغنطيسي $\overline{M}$ المتمركز في نقطة نعتبرها مبدأ الإحداثيات كموناً متجهياً $\vec{A}$ في النقطة المعينة بـ $\vec{r}$ بالنسبة لنقطة المبدأ هو

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\overline{M} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \frac{\mu_o}{4\pi}\vec{\nabla} \times \frac{\overline{M}}{r}$$

ذلك أن $\vec{\nabla} \times (a\vec{V}) \equiv a(\vec{\nabla} \times \vec{V}) + \vec{\nabla}a \times \vec{V}$ حيث $\vec{V}$ متجهة و $a(x, y, z)$ مقدار سلمي.

$\vec{\nabla} \times \overline{M} = 0$ لأن المتجهة $\overline{M}$ لا تتوقف على $\vec{r} = (x, y, z)$ والحقل المغنطيسي في النقطة بـ $\vec{r}$ هو

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \frac{\overline{M}}{r}\right) = \frac{\mu_o}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\overline{M}}{r}\right)$$

نظراً للمتطابقات

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2\vec{V}$$

و

$$\nabla^2(a\vec{V}) \equiv (\nabla^2 a)\vec{V} + 2\vec{\nabla}a \cdot \vec{V} + a\nabla^2\vec{V}$$

و $\vec{\nabla}\cdot a\vec{V}=\vec{\nabla}a\cdot\vec{V}+a\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$

ثم نظراً لكون $\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ و $\nabla^2\frac{1}{r}=0$ ولأن مشتقات $\vec{M}$ تساوي الصفر، فإننا نكتب الطرف الأخير في صيغة $\vec{B}$ على الشكل

$$\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\vec{\nabla}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{M}\right)=\frac{\mu_o}{4\pi}\vec{\nabla}\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{x^iM^i}{r^3}\right)$$

حيث رمزنا لإحداثيات $\vec{r}$ بـ $x^i$ ولإحداثيات $\vec{M}$ الذي مركزه O بـ $M^i$. وفي النهاية

$$\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\left(-\frac{\vec{M}}{r^3}+\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{M})\vec{r}}{r^5}\right)$$

لنفرض أن هذا الحقل ناتج عن العزم المغنطيسي للبروتون $\vec{M}_p$. ولنفرض أن الإلكترون ذا العزم المغنطيسي $\vec{M}_e$ متمركز في النقطة $\vec{r}$. إن هاميلتوني التفاعل بين هذين العزمين هو

$$H'=-\vec{M}_e\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi r^3}\left(\vec{M}_e\vec{M}_p-3(\vec{u}\cdot\vec{M}_p)(\vec{u}\cdot\vec{M}_e)\right) \quad (1.38)$$

حيث $\vec{u}$ متجهة الوحدة في اتجاه $\vec{r}$. وهكذا يتناسب هذا الهاميلتوني التقليدي مع $\frac{1}{r^3}$.

سنكتب الهاميلتوني الكمومي على شكل تفاعل بين العزمين $\vec{M}_e$ و $\vec{M}_p$ أي بين السبينين $\vec{\sigma}_e$ و $\vec{\sigma}_p$ على الشكل

$$H'=a\vec{M}_e\vec{M}_p=A\,\vec{\sigma}_e\otimes\vec{\sigma}_p \quad (1.39)$$

تشير المقارنة مع الهاميلتوني التقليدي إلى رتبة المقدار A بأخذ r مساوية لنصف قطر بور وسطياً $\langle r\rangle=\frac{\hbar^2}{m\alpha}=0{,}528\,\mathring{A}$. لنلاحظ من جهة أخرى أن جداء السبينين أصغر بألف مرة من جداء العزم الزاوي المداري للإلكترون بسببه لأن نسبة ماغنتون بور النووي إلى ماغنتون بور الإلكتروني (ومعه نسبة العزم الزاوي $M_p$ إلى $M_e$) هي

$$\frac{\mu_B'}{\mu_B}=\frac{m_e}{m_p}=\frac{1}{1835}$$

إن التفاعل بين العزم الزاوي المداري والسبين، والذي يطلق عليه اسم التفاعل سبين – مدار، تفاعل نسبوي سندرسه في حينه يؤدي إلى رفع التدني وإظهار البنية الدقيقة لمستويات الطاقة. أما التفاعل الذي سندرسه هنا – تفاعل سبين – سبين – فأثره أصغر بكثير بمعنى أن رفع التدني الذي يسببه لا يفصل بين مستويات الطاقة إلا بمقدار جد صغير كما سنرى ولذا يطلق عليه اسم البنية زائدة الدقة، رفيعة الدقة لتمييزها عن المفعول الأول النسبوي.

يتيح قياس فرق الطاقة الناتج عن هذا المفعول تحديد سبين النويات وعزمها المغنطيسي.

إن متجهات الحالة هنا، هي التانسورات من الرتبة الثانية على الفضاء السبينوري وسنكتبها كما فعلنا في ((3.(4.47) بدليل مسقط السبين $\pm\frac{1}{2}$ على محور معين على الشكل

$$|++\rangle,\ |+-\rangle,\ |-+\rangle,\ |--\rangle \qquad (1.40)$$

ونكتب الجداء التانسوري للمؤثرين $\vec{\sigma}_e$ و $\vec{\sigma}_p$ على الشكل

$$\sigma^e_x \otimes \sigma^p_x + \sigma^e_y \otimes \sigma^p_y + \sigma^e_z \otimes \sigma^p_z$$

لدينا من ((3.(4.31)، مذكرين أن الجداء التانسوري لمصفوفتين $n \times n$ هو المصفوفة $n^2 \times n^2$ المؤلفة من جداء كل حد من المصفوفة الأولى بكل عناصر المصفوفة الثانية

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.41)_1$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.41)_2$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.41)_3$$

وبالتالي نكتب الهاميلتوني (1.39) على شكل مصفوفة في الفضاء ذي الأربعة أبعاد وبمتجهات القاعدة (1.40)

$$H' = A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.42)$$

لنلاحظ أنه كثيراً ما يستعمل مؤثر استبدال السبين الذي يبادل اتجاهي السبينين

$$p|++\rangle = |++\rangle$$
$$p|+-\rangle = |-+\rangle$$
$$p|-+\rangle = |+-\rangle$$
$$p|--\rangle = |--\rangle$$

إن متجهات الحالة هنا، هي التانسورات من الرتبة الثانية على الفضاء السبينوري وسنكتبها كما فعلنا في ((3.(4.47) بدليل مسقط السبين $\pm\frac{1}{2}$ على محور معين على الشكل

$$|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \qquad (1.40)$$

ونكتب الجداء التانسوري للمؤثرين $\vec{\sigma}_e$ و $\vec{\sigma}_p$ على الشكل

$$\sigma_x^e \otimes \sigma_x^p + \sigma_y^e \otimes \sigma_y^p + \sigma_z^e \otimes \sigma_z^p$$

لدينا من ((3.(4.31)، مذكرين أن الجداء التانسوري لمصفوفتين $n \times n$ هو المصفوفة $n^2 \times n^2$ المؤلفة من جداء كل حد من المصفوفة الأولى بكل عناصر المصفوفة الثانية

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.41)_1$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.41)_2$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.41)_3$$

وبالتالي نكتب الهاميلتوني (1.39) على شكل مصفوفة في الفضاء ذي الأربعة أبعاد وبمتجهات القاعدة (1.40)

$$H' = A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.42)$$

لنلاحظ أنه كثيراً ما يستعمل مؤثر استبدال السبين الذي يبادل اتجاهي السبينين

$$p|++\rangle = |++\rangle$$
$$p|+-\rangle = |-+\rangle$$
$$p|-+\rangle = |+-\rangle$$
$$p|--\rangle = |--\rangle$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

بحيث نكتب $H'$ على الشكل

$$H' = A\vec{\sigma}_e \otimes \vec{\sigma}_p = A(2P - 1) \quad (1.42)'$$

وفي كل الأحوال فإن القيم الخاصة لـ $H'$ هي

$$\begin{vmatrix} A-E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A-E & 2A & 0 \\ 0 & 2A & -A-E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A-E \end{vmatrix} = (A-E)^2\left[(A+E)^2 - 4A^2\right] = 0 \quad (1.44)$$

لهذه المعادلة جذر ثلاثي $E = A$ وجذر بسيط $E = -3A$. وهكذا فإن تصحيحات طاقة ذرة الهدروجين في التفاعل بين سبين البروتون وسبين الإلكترون (التفاعل بين ثنائي القطب المغنطيسي) لا تزيل التدني إلا جزئياً. سنقوم كما فعلنا في الفقرة 1.3§ باختيار قاعدة جديدة حسب العلاقة (1.21) بدليل القاعدة $C^0_{k,in} = a_{in}$ لنجد العناصر $E^{(1)}_k$ من أجل الطاقة التي تحدد لنا من أجل الطاقة (1.23) التي تحدد لنا من أجل الطاقة (1.40). لنكتب جملة المعادلات (1.23) التي تحدد لنا من أجل الطاقة

أن

$$\begin{cases} (A-E)a_{i1} = 0 \\ -(A+E)a_{i2} + 2Aa_{i3} = 0 \\ 2Aa_{i2} - (A+E)a_{i3} = 0 \\ (A-E)a_{i4} = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

إن $a_{i1}$ و $a_{i4}$ اعتباطيتان وترتبط $a_{i2}$ و $a_{i3}$ ببعضهما العلاقتان الثانية والثالثة في (1.45)

$$\frac{a_{i2}}{a_{i3}} = \frac{A+E}{2A} = \frac{2A}{A+E} \quad (1.46)$$

لنلاحظ نظراً لعدم رفع التدني كلياً أن كل صغيرات المعين mineurs معدومة.

لنرمز لـ $i = 1', 2', 3', 4'$ ونختار

$$a_{1'1} = 1 \quad , \quad a_{1'4} = a_{1'3} = a_{1'2} = 0 \quad (1.47)$$

أي نختار المتجهة $V_{1'}$ ونرمز لها بـ

$$|++\rangle = |I\rangle$$

نختار كذلك

$$a_{2'4} = 1 \quad , \quad a_{2'3} = a_{2'2} = a_{2'1} = 0 \quad (1.48)$$

أي نختار $V_{2'}$ ونرمز لها بـ

$$|--\rangle = |II\rangle$$

نرى من (1.46) من أجل $E = A$، أن

$$\frac{a_{3'2}}{a_{3'3}} = 1$$

ومنه $a_{3'1} = 0$ $a_{3'4} = 0$ و $a_{3'2} = a_{3'3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (لأن المتجهة منظمة $a_{3'2}^2 + a_{3'3}^2 = 1$) نرمز لهذا الحل بـ $V_{3'}$ ونكتب

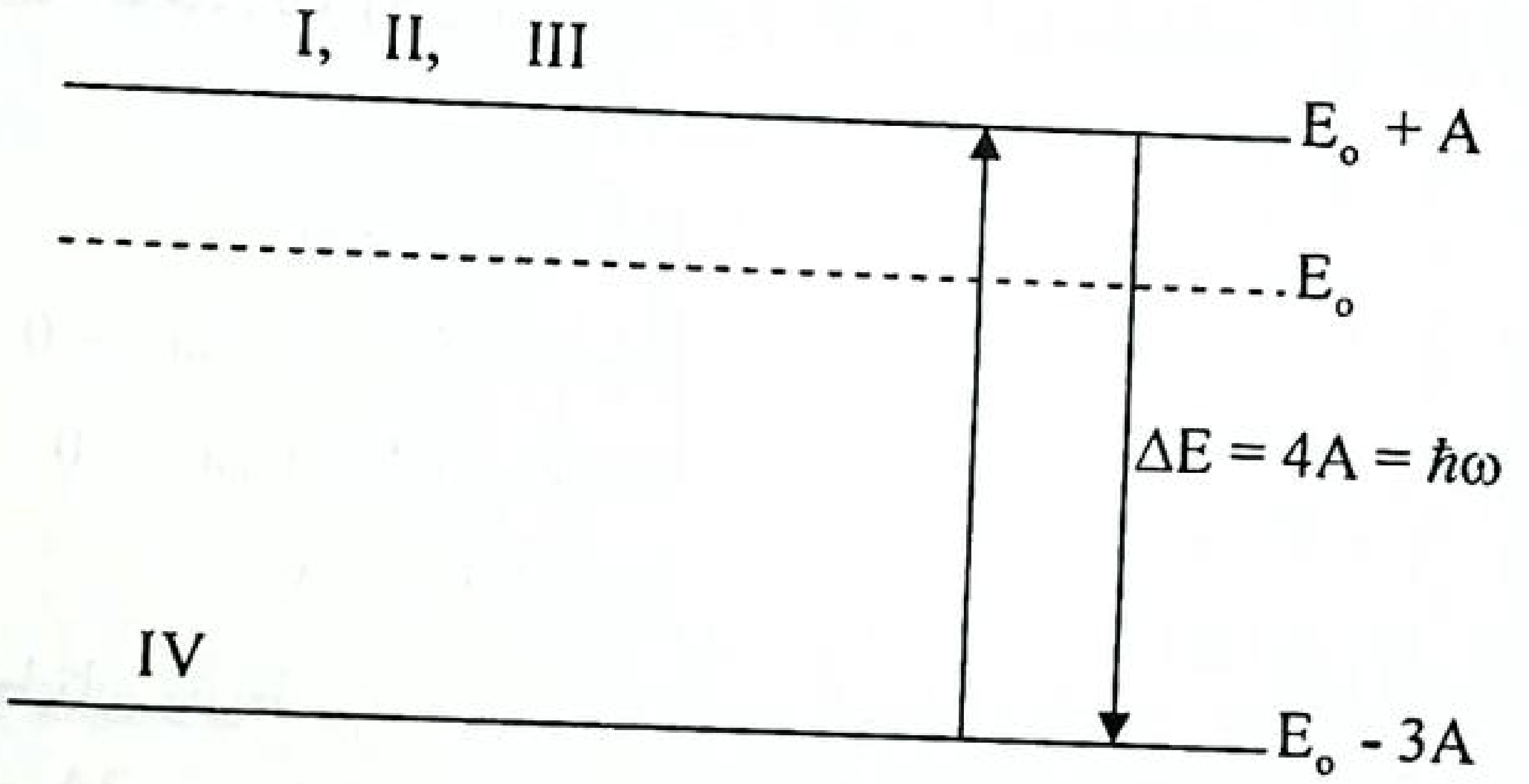
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) = |III\rangle \qquad (1.49)$$

نرى كذلك من (1.46) من أجل $E = -3A$ أن $\frac{a_{4'2}}{a_{4'3}} = -1$ ، $a_{4'4} = a_{4'1} = 0$، نرمز لهذا الحل بـ $V_{4'}$ ونكتب $|IV\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) = |IV\rangle \qquad (1.50)$$

لـ $\langle I|$ و $\langle II|$ و $\langle III|$ نفس الطاقة الإضافية $A$ ولـ $\langle IV|$ الطاقة $-3A$.

نرمز لطاقة ذرة الهدروجين قبل أخذ التفاعل سبين–سبين بعين الاعتبار بـ $E_o$ ولدينا، الشكل 1.




الشكل 1.

إن فرق الطاقة بين المستويين $\langle I|$ و $\langle II|$ و $\langle III|$ من جهة و $\langle IV|$ من جهة أخرى هو $\Delta E = 4A = \hbar\omega$ ويقابل موجة طولها 21 سنتمتر تقريباً أي تردداً يساوي $1420.10^6$ (دورة في الثانية). يتيح هذا الفرق كشف غاز الهدروجين وتحديد كثافته في المجرات ومن ثم حساب سرعته باستعمال مفعول دوبلر. إن فرق الطاقة هذا وبالتالي الثابتة $A$ – ثابتة التفاعل – مقيسة بدقة تساوي $2.10^{-11}$ وهي دقة أكبر بمئة مرة من دقة الحساب النظري.

نرى من (1.46) من أجل $E = A$، أن

$$\frac{a_{3'2}}{a_{3'3}} = 1$$

ومنه $a_{3'1} = 0$ $a_{3'4} = 0$ و $a_{3'2} = a_{3'3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (لأن المتجهة منظمة $a_{3'2}^2 + a_{3'3}^2 = 1$) نرمز لهذا الحل بـ $V_{3'}$ ونكتب

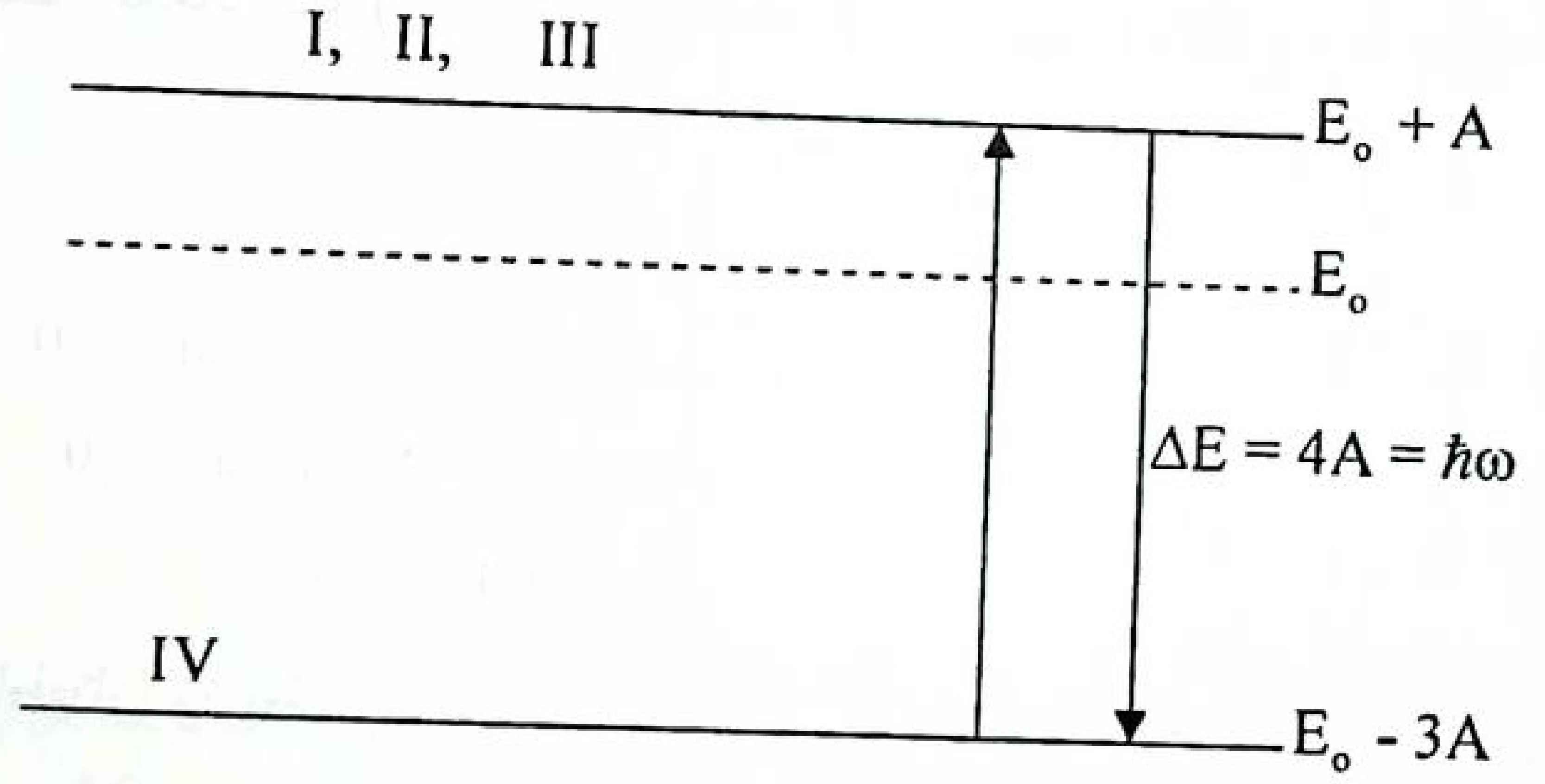
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) = |III\rangle \qquad (1.49)$$

نرى كذلك من (1.46) من أجل $E = -3A$ أن $\frac{a_{4'2}}{a_{4'3}} = -1$، $a_{4'4} = a_{4'1} = 0$، نرمز لهذا الحل بـ $V_{4'}$ ونكتب $|IV\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) = |IV\rangle \qquad (1.50)$$

لـ $|I\rangle$ و $|II\rangle$ و $|III\rangle$ نفس الطاقة الإضافية $A$ ولـ $|IV\rangle$ الطاقة $-3A$

نرمز لطاقة ذرة الهدروجين قبل أخذ التفاعل سبين–سبين بعين الاعتبار بـ $E_o$ ولدينا، الشكل.1




الشكل.1

إن فرق الطاقة بين المستويين $|I\rangle$ و $|II\rangle$ و $|III\rangle$ من جهة و $|IV\rangle$ من جهة أخرى هو $\Delta E = 4A = \hbar\omega$ ويقابل موجة طولها 21 سنتمتر تقريباً أي تردداً يساوي $1420.10^6$ (دورة في الثانية). يتيح هذا الفرق كشف غاز الهدروجين وتحديد كثافته في المجرات ومن ثم حساب سرعته باستعمال مفعول دوبلر. إن فرق الطاقة هذا وبالتالي الثابتة $A$ – ثابتة التفاعل – مقيسة بدقة تساوي $2.10^{-11}$ وهي دقة أكبر بمئة مرة من دقة الحساب النظري.

## 6.1– تناظر السوية وقاعدة الانتقاء Selection rule

عرفنا في آخر (3. §1.3) مؤثر السوية وبينا على وجه الخصوص أن عدم تغير النتائج الفيزيائية في الميكانيك الكمومي نتيجة الانتقال من $\bar{r}$ إلى $-\bar{r}$ (على غرار الفيزياء التقليدية) يعني أن $[\mathscr{P}, H] = 0$.
إلا أن هذا التناظر – خلافاً لما هو عليه الحال في الفيزياء التقليدية – يتضمن قوانين انحفاظ تحظر الانتقال من حالة إلى أخرى وتجعل عدد الحدود المختلفة عن الصفر في $_2$(1.10) ضئيلاً جداً كما سنرى. يطلق على هذا الحظر اسم قاعدة الانتقاء.

لنلاحظ قبل كل شيء أن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(q)\,dq = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-q)\,dq$

حيث تشير $q$ إلى مجموع المتغيرات، $(\bar{r} = (x, y, z))$ في الحالة التي تعنينا. لنكتب إذاً من أجل أي مؤثر $A$ تابع للوضع أن

$$\langle u_n(q)|A(q)|u_k(q)\rangle \equiv \langle u_n(-q)|A(-q)|u_k(-q)\rangle$$

نكتب الطرف الثاني بدليل مؤثر السوية : $u(-q) = \mathscr{P}u(q)$

$$\langle u_n(q)|A(q)|u_k(q)\rangle = \langle u_n(q)|\mathscr{P}A(-q)\mathscr{P}|u_k(q)\rangle \qquad (1.51)$$

ومنه

$$A(q) = \mathscr{P}A(-q)\mathscr{P} \qquad (1.52)$$

ولننظر إلى مختلف صفات المؤثر $A(q)$ الفضائية.

a– لنفرض أن $A(q)$ مؤثر سلمي، لا يتأثر بتغير إشارة $q$-، بالانعكاس المكاني $\bar{r} \leftarrow -\bar{r}$؛ هذا يعني أن $A(q) = A(-q)$ وأن $A$ تبادلي مع $\mathscr{P}$ حسب (1.52)

$$[\mathscr{P}, A] = 0 \qquad (1.53)$$

أي أن لـ $\mathscr{P}$ و $A$ ذات المتجهات الخاصة. لنرمز بـ $|+\rangle$ للمتجهات الزوجية وبـ $|-\rangle$ للمتجهات الفردية :

$$\mathscr{P}|+\rangle = +|+\rangle$$
$$\mathscr{P}|-\rangle = -|-\rangle.$$

نرى، بوضع $A(-q) = A(q)$ في (1.51) أن

$$\mathscr{P}_n A\, \mathscr{P}_k = \mathscr{P}_n \mathscr{P}_k A = A \qquad (1.54)$$

حيث $\mathscr{P}_n$ و $\mathscr{P}_k$ القيمة الخاصة لمؤثر السوية في تطبيقه على المتجهتين $\langle u_n|$ و $|u_k\rangle$. إنها $(-1)^n$ و $(-1)^k$ حيث القوة $n$، $k$ عدد صحيح، زوجي أو فردي حسبما تكون المتجهة زوجية أو فردية. يجب إذاً أن يكون $(-1)^{n+k} = 1$ حتى تصح العلاقة (1.54)، أي أن تكون المتجهتان من نفس السوية – زوجتين أو فرديتين – حتى يكون الانتقال من $|u_k\rangle$ إلى $\langle u_n|$ ممكناً بفعل المؤثر السلمي $A$. ونحصل بهذا الشكل على أول قاعدة انتقاء.

يمكن أخذ الهاميلتوني المتناظر $(U(q) = U(-q))$ كمثل للمثر السلمي المولد لقاعدة انتقاء.

b- لنفرض أن $A(q)$ مؤثر شبه سلمي pseudoscalar : تتغير إشارته بالانعكاس المكاني $A(-q) = -A(q)$. نعلم على سبيل المثال أن الجداء السلمي لمتجهة حقيقية (قطبية) بمتجهة شبيهة (محورية) هو عدد شبه سلمي لأن إشارة المتجهة الحقيقية تتغير نتيجة تغير اتجاه المحاور بينما تبقى إشارة المتجهة الشبيهة دون تغيير. تأخذ العلاقة (1.52) الشكل التالي

$$A(q) = \mathscr{P}A(-q)\mathscr{P} = -\mathscr{P}A(q)\mathscr{P}$$

أي أن

$$[\mathscr{P}, A]_+ = 0$$

فالعلاقة علاقة مبادلة مضادة ويستحيل بالتالي أن يكون لـ $\mathscr{P}$ و $A$ ذات المتجهات الخاصة. فإذا كانت المصفوفة الممثلة لـ $\mathscr{P}$ في الفضاء الممثل بـ $\langle +|$ و $\langle -|$ هي

$$\mathscr{P} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة الممثلة للمؤثر شبه السلمي هي المصفوفة مضادة القطرية

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

التي تقابل الفضاء الجزيء الزوجي $\langle +|$ بالفضاء الجزيء الفردي، والعكس بالعكس

$$A|+\rangle = |-\rangle \qquad (1.55)$$
$$A|-\rangle = |+\rangle$$

ولدينا طبعاً $[\mathscr{P}, A]_+ = 0$. ونحصل على ثاني قاعدة انتقاء : يجب أن تكون المتجهتان $|u_k\rangle$ و $|u_n\rangle$ من سويتين مختلفتين حتى يمكن الانتقال بينهما بواسطة مؤثر شبه سلمي : $A(q) = -A(-q)$.

c- يصح ما قلناه عن المؤثر شبه السلمي على المتجهة الحقيقية $\vec{E}$، على مركباتها الثلاث، على الحقل الكهربائي – عندما ننظر إليه كمؤثر – لإن إشارته تتغير نتيجة تغير اتجاه المحاور وقاعدة الانتقاء هنا هي الانتقال بين متجهتين مختلفتي السوية.

$$|+\rangle \xrightarrow{\vec{E}} |-\rangle \qquad (1.55)'$$
$$|-\rangle \xrightarrow{\vec{E}} |+\rangle$$

أما المتجهة الشبيهة فحالها – حال مركباتها – هو حال المؤثر السلمي لأن إشارتها تبقى دون تغيير بفعل تغيير اتجاه المحاور وهكذا فلا يفعل المؤثر شبه المتجه إلا بين متجهات حالة من نفس السوية. إن العزم الزاوي المعرف بـ (1.11).(3) لا يغير إشارته بالانتقال من $\vec{r}$ إلى $-\vec{r}$ ولدينا حسب (1.53)

$$\left[\mathscr{P}, \vec{L}\right] = 0 \qquad (1.53)'$$

أي أن لـ $\vec{L}$ و $\mathscr{P}$ ذات المتجهات الخاصة، إما زوجية أو فردية. تعين علاقة المبادلة تبادلية $\mathscr{P}$ مع كل مركبة من مركبات المؤثر $\vec{L}$ وبالتالي مع $L_+$ أو $L_-$ اللتين تغيران قيمة العدد الكمومي المغنطيسي بزيادة أو نقصان 1 : $[\mathscr{P}, L_\pm] = 0$ أي أن سوية النظمة الكمومية (زوجية أو فردية) لا تتأثر بالعدد

الكمومي m؛ وهذا أمر طبيعي لأن النظمة، قبل إدخال اتجاه معين في الفضاء عن طريق حقل كهربائي أو مغنطيسي مثلاً، مستقلة عن اختيار جملة المحاور ؛ لا ننسى أن مولدات العزم الزاوي هي مولدات الدوران.

d– يمكننا تعميم هذه المحاكمة إلى حالة مؤثرات تانسورات من الرتبة الثانية متناظرة، عناصرها هي جداءات مركبات المتجهة x $(x')$ بمركبات المتجهة y $(y')$ إنها مصفوفة من الشكل $x'y'$، أو مضادة التناظر (كجداء متجه لمتجهتين في الفضاء ذي الأبعاد الثلاث على سبيل المثال) ثم من الرتبة الثالثة، الخ. ولكننا سنكتفي عند هذا الحد هنا.

## 7.1– مفعول شتارك Stark

لنطبق هذه النتائج على حالة جزيء مؤلف من ذرتين موضوع في حقل كهربائي متجانس وثابت. تهتز نويتا الذرتين اهتزازاً عنيفاً، عدداً هائلاً من الكمات، بحيث يستحيل معالجتها كمومياً بمعنى أننا ننظر للجزيء كثنائي قطب كهربائي قاس يتحرك في الفضاء، كدوار Rotator. عزم عطالة هذا الدوار هو $I = mr_o^2$ حيث $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ هي الكتلة المختصرة للنواتين و $r_o$ هي المسافة الفاصلة بينهما. إن هاميلتوني الدوار هو $H_o = \dfrac{L^2}{2I}$. لا تتوقف حركة هذه النظمة إلا على المتغيرات الزاوية $(\theta, \varphi)$ وبالتالي فإن المتجهات الخاصة لـ $H_o$ هي الدالات التوافقية الكروية التي نكتبها على الشكل $|\ell m\rangle = Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. لدينا

$$H_o|\ell m\rangle = E_\ell^o|\ell m\rangle \quad \text{و} \quad E_\ell^o = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1) \quad \text{و} \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.56)$$

لنضع الجزيء في حقل كهربائي متجانس وثابت $\vec{\varepsilon}$ : $(0, 0, \varepsilon)$ وليكن $\vec{\mu}$ عزم ثنائي القطب الكهربائي، عزم الدوار الكهربائي ولتكن $\theta = \widehat{\vec{\mu}, \vec{\varepsilon}}$. إن الهاميلتوني الإضافي: هاميلتوني الاضطراب في هذه الحالة هو

$$H' = -\mu\varepsilon\cos\theta \qquad (1.57)$$

وعلينا حساب عناصر الانتقال بين مختلف مجهات القاعدة $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. إن الهاميلتوني هو نعبر عن الانتقال من $\vec{r}$ إلى $-\vec{r}$ بانتقال الزاويتين $\theta \leftarrow \pi - \theta$ و $\varphi \leftarrow \varphi + \pi$. إن الهاميلتوني هو ثابتة $\mu$ مضروبة بمسقط الحقل الكهربائي (المتجهة الحقيقية) على اتجاه عزم ثنائي القطب، فهو إذاً مسقط شبه سلمي ونرى ذلك بسهولة لأن $H'(\theta)$ يتحول إلى $-H'(\pi - \theta)$ عندما ننتقل من z إلى -z أي أن عناصر الانتقال في $(1.10)_2$ هي بين عناصر $Y_\ell^m$ مختلفة السوية. ومن جهة أخرى فإن المتجهات لا تتوقف إلا على المتغير $\theta$ أي أن العامل المتوقف على $\theta$ في $Y_\ell^m$ هو فقط القسم التابع لـ $P_\ell^m(\theta)$ في ((1.45).3) .

وهكذا $\ell - m$ أي أن سويته هي $\cos\theta$ بـ $\ell - m$ هو دالة من الرتبة $P_\ell^m$ أن (3.(1.40)") وقد رأينا في
فإن عناصر المصفوفة المختلفة عن الصفر في $_2$(1.10) هي من الشكل

$$\langle \ell_1 m_1 | H' | \ell_2 m_2 \rangle$$

حيث $m_1 = m_2$ لعدم توقف سوية النظمة الكمومية على العدد الكمومي المغنطيسي كما رأينا أعلاه أي من الشكل

$$\langle \ell m | H' | \ell - 1\ m \rangle = \langle \ell - 1\ m | H' | \ell m \rangle$$

يبرهن انطلاقاً من (3.(1.42) أن

$$\langle \ell m | \cos\theta | \ell\text{-}1 m \rangle = \left( \frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1} \right)^{1/2} \qquad (1.58)$$

وبالتالي فإن العلاقة التي تحدد تصحيح الطاقة من الدرجة الثانية هي، نظراً لـ (1.56)

$$E_{\ell m}^{(2)} = \frac{2I(\mu\varepsilon)^2}{\hbar^2} \left[ \frac{\langle \ell m | \cos\theta | \ell + 1\ m \rangle^2}{\ell(\ell+1) - (\ell+1)(\ell+2)} + \frac{\langle \ell m | \cos\theta | \ell - 1\ m \rangle^2}{\ell(\ell+1) - \ell(\ell-1)} \right] \qquad (1.59)$$

وبأخذ (1.58) بعين الاعتبار نجد

$$E_{\ell m}^{(2)} = \frac{(\mu\varepsilon)^2}{E_\ell^\circ} \left( \frac{\ell(\ell+1) - 3m^2}{2(2\ell+1)(2\ell+3)} \right)$$

يرفع تصحيح مفعول شتارك من الرتبة الثانية التدني جزئياً لأن الطاقة $E_{\ell m}^{(2)}$ متوقفة على $\ell$ و $m^2$ وليس على $\ell$ و $m$؛ ينطبق في هذا التصحيح مستويا الطاقة $\pm m$ على بعضهما والسبب في ذلك أن هاميلتوني الاضطراب صامد أمام كل الانعكاسات بالنسبة لمستويات مارة من المحور $Oz$.

## 2. رفع التدني

### 1.2- كسر التناظر

رأينا أن خواص المكان، تجانسه وتناحيه، يؤديان في الفيزياء التقليدية والكمومية على السواء إلى انحفاظ الاندفاع الخطي وانحفاظ العزم الزاوي. ورأينا بشكل خاص أن انحفاظ العزم الزاوي، المداري أو السبيني المعين بالعدد $J$ ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) هو الذي يحدد تدني مستوى الطاقة ($2J + 1$) مرة. نزيل هذا التدني جزئياً أو كلياً بكسر التناظر المكاني، بالقضاء على التناحي بواسطة حقل مغنطيسي يتفاعل مع العزم المغنطيسي المتناسب مع العزم الزاوي وينتج فروق طاقة بين المستويات الـ $2J + 1$ المتطابقة وفق مختلف مناقط العزم الزاوي على اتجاه الحقل المغنطيسي. ننظر إلى هذا التفاعل الذي يرفع التدني كاضطراب عندما يكون الحقل المغنطيسي ضعيفاً.

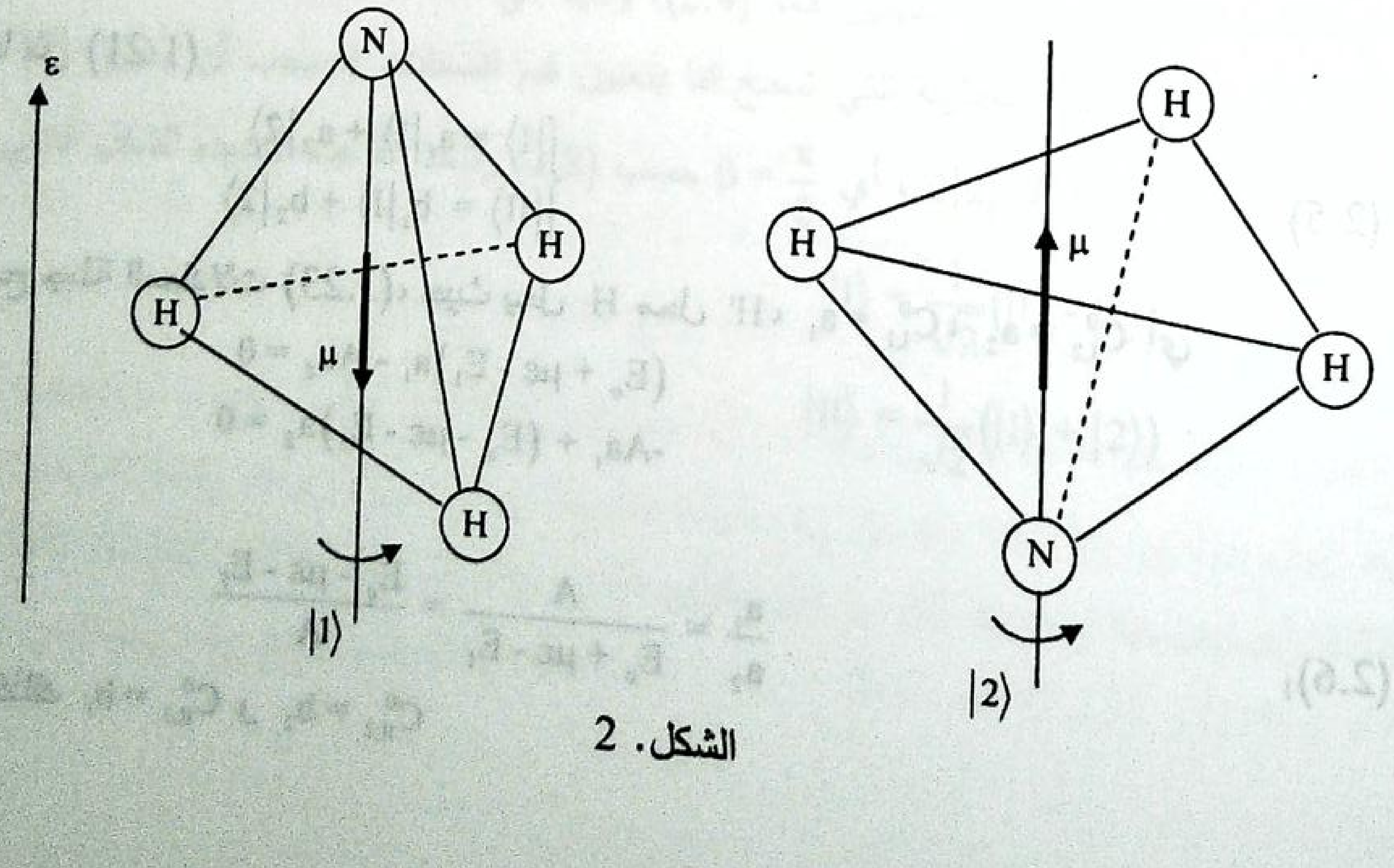
ليس هذا هو المثال الوحيد على كسر التناظر ورفع التدني، فقد رأينا وجود تناظر داخلي إضافة إلى التناظر الهندسي، على سبيل المثال بين البروتون والنوترون المتناظرين في التفاعل النووي، بمعنى أنه لا

يمكن التفريق، في التفاعل النووي، بين التفاعلات النووية الواقعة بين البروتونات أو بين النوترونات أو بين أي نسبة مئوية يدخل فيها أحد هذين النوعين في التفاعل النووي. ذلك أن خواص البروتون والنوترون متطابقة، ذات الكتلة وذات السبين، الخ. ولا يفرق بينهما إلا كون أحدهما – البروتون – ذا شحنة كهربائية بينما لا يحمل الآخر – النوترون– أي شحنة. يمكن إذاً كسر التناظر بين هذين الجسمين بإدخال حقل كهرطيسي – كهربائي على وجه التحديد – يتفاعل مع الجسيم المشحون كهربائياً و لا يؤثر على الجسيم الآخر. كما يمكن النظر إلى الحقل الكهرطيسي كاضطراب بالنسبة للتفاعل النووي الذي تفوق شدته شدة التفاعل الأول بعشرات المرات.

سنكرس هذه الفقرة لدراسة الاضطرابات التي ترفع التدني.

## 2.2– جزيء الأمونياك

يتألف هذا الجزيء من ثلاث ذرات هدروجين، تشكل مستوياً في الفضاء ومن ذرة آزوت تشكل رأس الهرم المؤلف للجزيء. إن لجزيء الأمونياك حالات كمومية عديدة جداً فهو يهتز حول وضع توازن معين ويدور حول محور مار من رأس الهرم. يشابه لف الجزيء حول هذا المحور، وهو دوران حقيقي، سبين الإلكترون ذا المسقطين على محور ما يجسده الحقل المغنطيسي. إن ما يحدد المسقطين هنا هو الحقل الكهربائي لأن لجزيء الأمونياك عزمَ ثنائي قطب كهربائي نرمز له بـ $\vec{\mu}$ محمولاً على محور الهرم باتجاه قاعدة الهرم. وهكذا فإن إدخال حقل كهربائي ضعيف $\vec{\varepsilon}$ مواز لمحور الهرم سيفرق بين حالتين حسبما تكون ذرة الآزوت في اتجاه $\vec{\varepsilon}$، رأس الهرم نحو الأعلى، أو في الاتجاه المعاكس، رأس الهرم نحو الأسفل. نرمز لهاتين الحالتين كما في حال السبين إلى $|1\rangle$ و $|2\rangle$. لهاتين الحالتين ذات الهاميلتوني $H_o$ قبل كسر التناظر، قبل إدخال $\vec{\varepsilon}$ الذي يرفع التدني من الرتبة الثانية.




الشكل. 2

إن مصفوفة $H_o$ هي من الشكل

$$H_o = \begin{pmatrix} E_o & -A \\ -A & E_o \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

حيث $E_o$ هي القيمة الخاصة المتدنية لـ $H_o$ في الحالتين $\langle 1|$ و $\langle 2|$ و $A$- هي طاقة الانتقال من إحدى الحالتين إلى الأخرى.

أما هاميلتوني التفاعل، الاضطراب فهو من الشكل $H' = -\vec{\mu} \cdot \vec{\varepsilon}$ (كما في حالة ثنائي القطب المغنطيسي) ومصفوفته في القاعدة $\langle 1|$، $\langle 2|$ هي

$$H' = \begin{pmatrix} \mu\varepsilon & 0 \\ 0 & -\mu\varepsilon \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$H'$ قطري وتصحيحات الطاقة معينة فوراً حسب المعادلة (1.24)، المعادلة القرنية ولدينا التصحيحان $\mu\varepsilon$ و $\mu\varepsilon$-. لم نحتج إلى تغيير القاعدة. لكننا مع ذلك سنبحث عن قاعدة يكون فيها الهاميلتوني الكلي $H = H_o + H'$ قطرياً. نكتب معادلة القيم الخاصة

$$|H - EI| = 0$$

على الشكل

$$\begin{vmatrix} E_o + \mu\varepsilon - E & -A \\ -A & E_o - \mu\varepsilon - E \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

ومنه

$$E = E_o \pm \sqrt{A^2 + \mu^2\varepsilon^2}$$

سنسمي القاعدة الجديدة $\langle I|$، $\langle II|$

$$E_I = E_o + \sqrt{A^2 + \mu^2\varepsilon^2} \quad ; \quad E_{II} = E_o - \sqrt{A^2 + \mu^2\varepsilon^2} \tag{2.4}$$

ولدينا من (1.21)

$$\begin{cases} |I\rangle = a_1|1\rangle + a_2|2\rangle \\ |II\rangle = b_1|1\rangle + b_2|2\rangle \end{cases} \tag{2.5}$$

لتصبح جملة المعادلات (1.23)، حيث يحل $H$ محل $H'$، $C^0_{I,1} = a_1$، $C^0_{I,2} = a_2$ أي

$$(E_o + \mu\varepsilon - E_I)a_1 - Aa_2 = 0$$

$$-Aa_1 + (E_o - \mu\varepsilon - E_I)a_2 = 0$$

ومنه

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A}{E_o + \mu\varepsilon - E_I} = \frac{E_o - \mu\varepsilon - E_I}{A} \tag{2.6}_I$$

لدينا كذلك $C^0_{II,1} = b_1$ و $C^0_{II,2} = b_2$

إن مصفوفة $H_o$ هي من الشكل

$$H_o = \begin{pmatrix} E_o & -A \\ -A & E_o \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

حيث $E_o$ هي القيمة الخاصة المتدنية لـ $H_o$ في الحالتين $\langle 1|$ و $\langle 2|$ و $-A$ هي طاقة الانتقال من إحدى الحالتين إلى الأخرى.

أما هاميلتوني التفاعل، الاضطراب فهو من الشكل $H' = -\vec{\mu} \cdot \vec{\varepsilon}$ (كما في حالة ثنائي القطب المغنطيسي) ومصفوفته في القاعدة $\langle 1|$، $\langle 2|$ هي

$$H' = \begin{pmatrix} \mu\varepsilon & 0 \\ 0 & -\mu\varepsilon \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

المعادلة القرنية ولدينا التصحيحان $H'$ قطري وتصحيحات الطاقة معينة فوراً حسب المعادلة (1.24)، $\mu\varepsilon$ و $-\mu\varepsilon$. لم نحتج إلى تغيير القاعدة. لكننا مع ذلك سنبحث عن قاعدة يكون فيها الهاميلتوني الكلي $H = H_o + H'$ قطرياً. نكتب معادلة القيم الخاصة

$$|H - EI| = 0$$

على الشكل

$$\begin{vmatrix} E_o + \mu\varepsilon - E & -A \\ -A & E_o - \mu\varepsilon - E \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.3)$$

ومنه

$$E = E_o \pm \sqrt{A^2 + \mu^2\varepsilon^2}$$

سنسمي القاعدة الجديدة $\langle I|$، $\langle II|$

$$E_I = E_o + \sqrt{A^2 + \mu^2\varepsilon^2} \quad ; \quad E_{II} = E_o - \sqrt{A^2 + \mu^2\varepsilon^2} \qquad (2.4)$$

ولدينا من (1.21)

$$\begin{cases} |I\rangle = a_1|1\rangle + a_2|2\rangle \\ |II\rangle = b_1|1\rangle + b_2|2\rangle \end{cases} \qquad (2.5)$$

لتصبح جملة المعادلات (1.23)، حيث يحل $H$ محل $H'$، $C^0_{I,1} = a_1$، $C^0_{I,2} = a_2$ أي

$$(E_o + \mu\varepsilon - E_I)a_1 - Aa_2 = 0$$

$$-Aa_1 + (E_o - \mu\varepsilon - E_I)a_2 = 0$$

ومنه

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A}{E_o + \mu\varepsilon - E_I} = \frac{E_o - \mu\varepsilon - E_I}{A} \qquad (2.6)_I$$

لدينا كذلك $C^0_{II,1} = b_1$ و $C^0_{II,2} = b_2$

$$(E_o + \mu\varepsilon - E_{II})\, b_1 - A b_2 = 0$$
$$-A b_1 + (E_o - \mu\varepsilon - E_{II})\, b_2 = 0$$

ومنه النسبة الثانية

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{A}{E_o + \mu\varepsilon - E_{II}} = \frac{E_o - \mu\varepsilon - E_{II}}{A} \qquad (2.6)_2$$

لنضف إلى هاتين العلاقتين شرط واحدية مصفوفة تغيير القاعدة

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2 = 1 \qquad (2.7)$$

لنضع

$$tg\beta = \frac{2|H_{12}|}{H_{11} - H_{22}} = \frac{A}{\mu\varepsilon} \qquad (2.8)$$

ومنه حسب $(2.6)_1$ و $(2.4)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{tg\beta}{1 - \sqrt{tg^2\beta + 1}} = -cotg\frac{\beta}{2} \qquad (2.9)_1$$

وكذلك حسب $(2.6)_2$ و $(2.4)$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{tg\beta}{1 + \sqrt{tg^2\beta + 1}} = tg\frac{\beta}{2} \qquad (2.9)_2$$

إن إضافة الشرط (2.7) إلى (2.9) يتيح لنا أخذ

$$b_2 = \cos\frac{\beta}{2} \ ، \ b_1 = \sin\frac{\beta}{2} \ ، \ a_2 = -\sin\frac{\beta}{2} \ ، \ a_1 = +\cos\frac{\beta}{2}$$

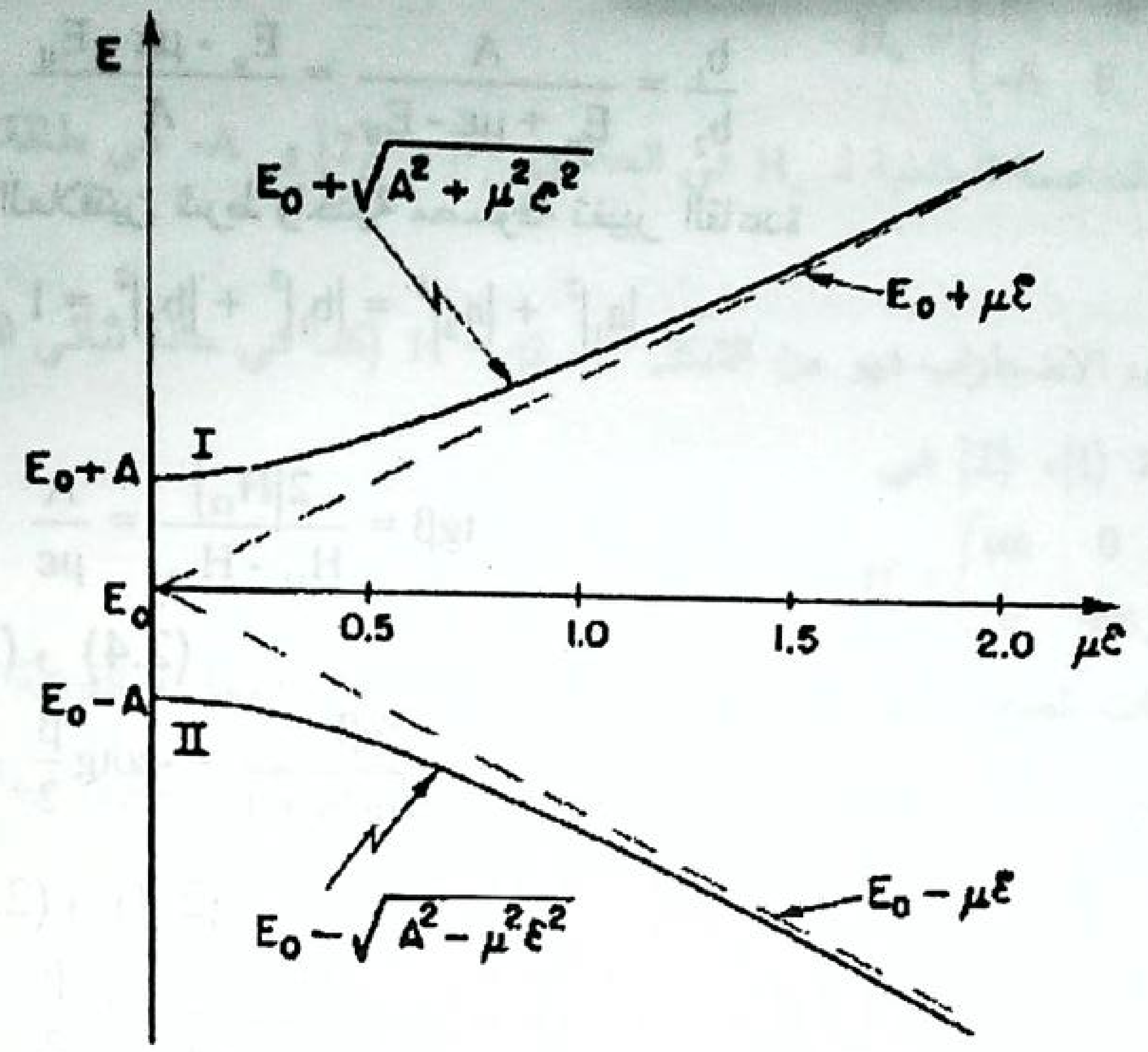
وكتابة (2.5) على الشكل

$$|I\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|1\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|2\rangle$$
$$|II\rangle = \sin\frac{\beta}{2}|1\rangle + \cos\frac{\beta}{2}|2\rangle$$

وقيمتا الطاقة المقابلتان لهاتين المتجهتين هما (2.4). ولدينا في الحالة الخاصة عندما يكون $tg\beta = 0$ أي $\mu\varepsilon >> A$ ، وهي الحالة المقاربة التي تسمح لنا بتعيين قيم السعات، إذ يجب أن يكون $|I\rangle + |II\rangle$ مساوياً لـ $2|1\rangle$ و $|II\rangle - |I\rangle$ لـ $-2|2\rangle$، أي $\beta = \frac{\pi}{2}$ حسب (2.8) وتأخذ القاعدة الجديدة الشكل التالي

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$
$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

يمثل الشكل.3 تغيرات الطاقتين $E_I$ و $E_{II}$ (2.4) بدليل $\mu\varepsilon$. إنهما فرعا قطعين زائدين قائمين ($y^2 - x^2 = A^2$، $y = E - E_o$، $y_o = \pm A$).




الشكل. 3

## 3.2– مفعول زيمان (Zeeman) في ذرة الهدروجين

درسنا في الفقرة السابقة أثر تفاعل سبين الإلكترون مع سبين البروتون على طاقة ذرة الهدروجين؛ لا علاقة لهذه الدراسة بالاضطراب الذي يرفع التدني، الذي يكسر التناظر. إنه جد صغير، بنية زائدة الدقة لم نأخذها بعين الاعتبار في دراسة التفاعل (الكهربائي) بين البروتون والإلكترون، أحدث هذا الاضطراب تدنياً من الرتبة الثالثة، ثلاث طاقات متطابقة رمزنا لمتجهات الحالة المقابلة لها بـ $\langle I|$، $\langle II|$، $\langle III|$. يمكننا كسر التناظر بين هذه الحالات الثلاث بإدخال حقل مغنطيسي نسقط على اتجاهه الحالات الأربع $\langle ++|$، $\langle --|$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle +-| \pm \langle -+|)$ لإحداث فروق طاقة قد تزيل التدني جزئياً أو كلياً. ليكن إذاً $\vec{B}$ حقلاً مغنطيسياً ضعيفاً ومستقلاً عن الزمن. نضيف إلى الهاميلتوني (1.39) – المصفوفة 4×4 – التي لا تأخذ بعين الاعتبار العزم الزاوي المداري (أي أننا نفترض في كل هذه الفقرة أن ذرة الهدروجين هي في الحالة 's). هاميلتوني تفاعل $\vec{B}$ مع $\overline{M}_e$ و $\overline{M}_p$ حيث $\overline{M}_e$ و $\overline{M}_p$ العزمان المغنطيسيان للإلكترون والبروتون مكتوبان على شكل مصفوفة 4×4.

$$H = A(\vec{\sigma}_e \otimes \vec{\sigma}_p) - (\overline{M}_e \otimes I)\cdot\vec{B} - (I \otimes \overline{M}_p)\cdot\vec{B} = H' + H'' \tag{2.10}$$

نكتب "H بفرض تسمية اتجاه $\vec{B}$ المحور OZ على الشكل

$$H'' = (-M_e\sigma_z^e \otimes I - M_p I \otimes \sigma_z^p)B$$

لنلاحظ أن $I \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ وأن $\sigma_z \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $M_e$ و $M_p$ من إشارتين مختلفتين بحيث يمكننا كتابة عناصر المصفوفة "H بدليل المقدارين التاليين

$$M = -(M_e + M_p) \tag{2.11}$$

$$M' = -(M_e - M_p) \quad ; \quad M \simeq M' > 0$$

على شكل قطري في القاعدة (1.40) خلافاً لـ 'H

$$H'' = B = \begin{pmatrix} M & & & \\ & M' & & 0 \\ 0 & & -M' & \\ & & & -M \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

يأخذ "H في القاعدة (1.47) – (1.50) التي حسبنا فيها 'H الشكل

$$\mathscr{H}'' = B\begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M' \\ 0 & 0 & M' & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

وهو ما يمكن أن نراه مباشرة بسهولة أو حساب "H في هذه القاعدة انطلاقاً من مصفوفة تغيير القاعدة

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ، \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

وكتابته في هذه القاعدة انطلاقاً من (2.12) و (2.14) على الشكل

$$\mathscr{H}'' = CH''C^{-1}$$

نكتب معادلة القيم الخاصة لهاميلتوني الاضطراب الكلي "H' + H في القاعدة (1.40) آخذين بعين الاعتبار (1.42) و (2.13) على الشكل

$$H = A(\vec{\sigma}_e \otimes \vec{\sigma}_p) - (\overline{M}_e \otimes I)\cdot\vec{B} - (I \otimes \overline{M}_p)\cdot\vec{B} = H' + H'' \quad (2.10)$$

نكتب ''H بفرض تسمية اتجاه $\vec{B}$ المحور OZ على الشكل

$$H'' = \left(-M_e\sigma_z^e \otimes I - M_p I \otimes \sigma_z^p\right)B$$

لنلاحظ أن
$$I \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
وأن
$$\sigma_z \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
و $M_e$ و $M_p$ من إشارتين مختلفتين بحيث يمكننا كتابة عناصر المصفوفة ''H بدليل المقدارين التاليين

$$M = -(M_e + M_p)$$
$$M' = -(M_e - M_p) \;;\quad M \simeq M' > 0 \quad (2.11)$$

على شكل قطري في القاعدة (1.40) خلافاً لـ 'H

$$H'' = B = \begin{pmatrix} M & & & \\ & M' & & 0 \\ 0 & & -M' & \\ & & & -M \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

يأخذ ''H في القاعدة (1.47) – (1.50) التي حسبنا فيها 'H الشكل

$$\mathscr{H}'' = B\begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M' \\ 0 & 0 & M' & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

وهو ما يمكن أن نراه مباشرة بسهولة أو حساب ''H في هذه القاعدة انطلاقاً من مصفوفة تغيير القاعدة

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{،}\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

وكتابته في هذه القاعدة انطلاقاً من (2.12) و (2.14) على الشكل

$$\mathscr{H}'' = CH''C^{-1}$$

نكتب معادلة القيم الخاصة لهاميلتوني الاضطراب الكلي ''H' + H في القاعدة (1.40) آخذين بعين الاعتبار (1.42) و (2.13) على الشكل

$$\begin{vmatrix} A+MB-E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A+M'B-E & 2A & 0 \\ 0 & 2A & -A-M'B-E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A-MB-E \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.15)$$

ولدينا القيم الخاصة التالية :

$$\begin{aligned} E_1 &= A + MB \\ E_2 &= A - MB \\ E_{3,4} &= -A \pm \sqrt{4A^2 + M'^2B^2} \end{aligned} \qquad (2.16)$$

نرى بسهولة أن المتجهتين الخاصتين المقابلتين للقيمتين $E_1$ و $E_2$ هما المتجهتان

$$|I\rangle = |++\rangle$$

المقابلة للطاقة $E_o + A + MB$

و

$$|II\rangle = |--\rangle$$

المقابلة للطاقة $E_o + A - MB$.

أما المتجهتان الأخريان المقابلتان للحلين $E_{3,4}$ فنعينهما بدليل $|+-\rangle$ و $|-+\rangle$ بنفس الطريقة التي استعملناها منطلقين من (1.23) لإيجاد المتجهتين الخاصتين لـ (2.3) عند دراستنا لجزيء الأمونياك.

يحل صغير المعين محل (2.3).

$$\begin{vmatrix} -A + M'B - E & 2A \\ 2A & -A - M'B - E \end{vmatrix} = 0$$

نحسب $a_1$، $a_2$، $b_1$، $b_2$ بنفس الطريقة ونعين $tg\beta$ كما في (2.8)

$$tg\beta = \frac{2|H_{12}|}{H_{11} - H_{22}} = \frac{2\,2A}{-A + M'B - E - (-A - M'B - E)} = \frac{2A}{M'B} \qquad (2.17)$$

نعين الأمثال هنا أيضاً، انطلاقاً من الحالة المقاربة $M'B << 2A$؛ $\beta = \frac{\pi}{2}$ فنحصل على متجهتي الحالة

$$|III\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$$

$$|IV\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

وهكذا فإن قيم الطاقة الخاصة في القاعدة $\langle I|$، $\langle II|$، $\langle III|$، $\langle IV|$ هي

$$E_I = A + MB$$

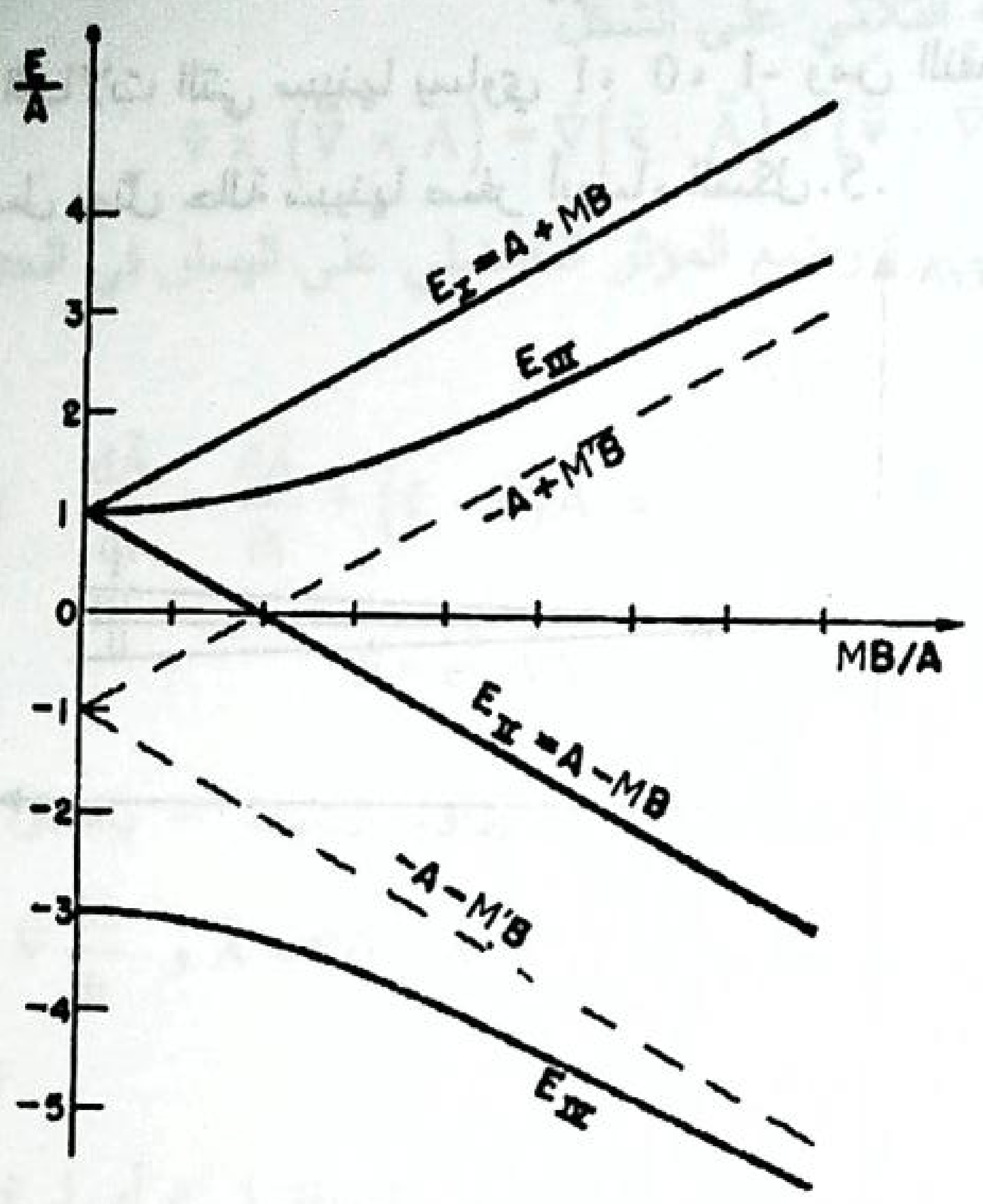
$$E_{II} = A - MB$$

$$E_{III} = -A + 2A\sqrt{1 + \frac{M'^2B^2}{4A^2}}$$

$$E_{IV} = -A - 2A\sqrt{1 + \frac{M'^2B^2}{4A^2}}$$

ونحصل على هذا النحو على منحنيات[1] مفعول زيمان، الشكل.4. لقد انقسمت الطاقة الدنيا لذرة الهدروجين إلى أربعة مستويات طاقة، ويمكن رصد مختلف التنقلات (الطفرات)، المصدرة أو الممتصة لفوتونات، بين هذه المستويات. لنتفحص الآن عن قرب سلوك هذه الطاقات عندما نبتعد عن حالة الاضطراب، حالة الحقل المغنطيسي الضعيف. نفترض إذاً أن $\frac{M'B}{A} >> 1$ بحيث ينطبق القطعان الزائدان القائمان $E_{III}$ و $E_{IV}$ مع خطيهما المقاربين

$$E_{III} = -A + M'B$$
$$E_{IV} = -A - M'B$$




الشكل.4

هذا يعني أن متجهتي الحالة المقابلتين لهاتين القيمتين لم تعد حالتي مزيج بين $\langle -+|$ و $\langle +-|$ لأن $tg\beta$ في (2.17) يتناهى نحو الصفر $(\frac{A}{M'B} \to 0)$ ومعه حسب $(2.9)_{1,2}$

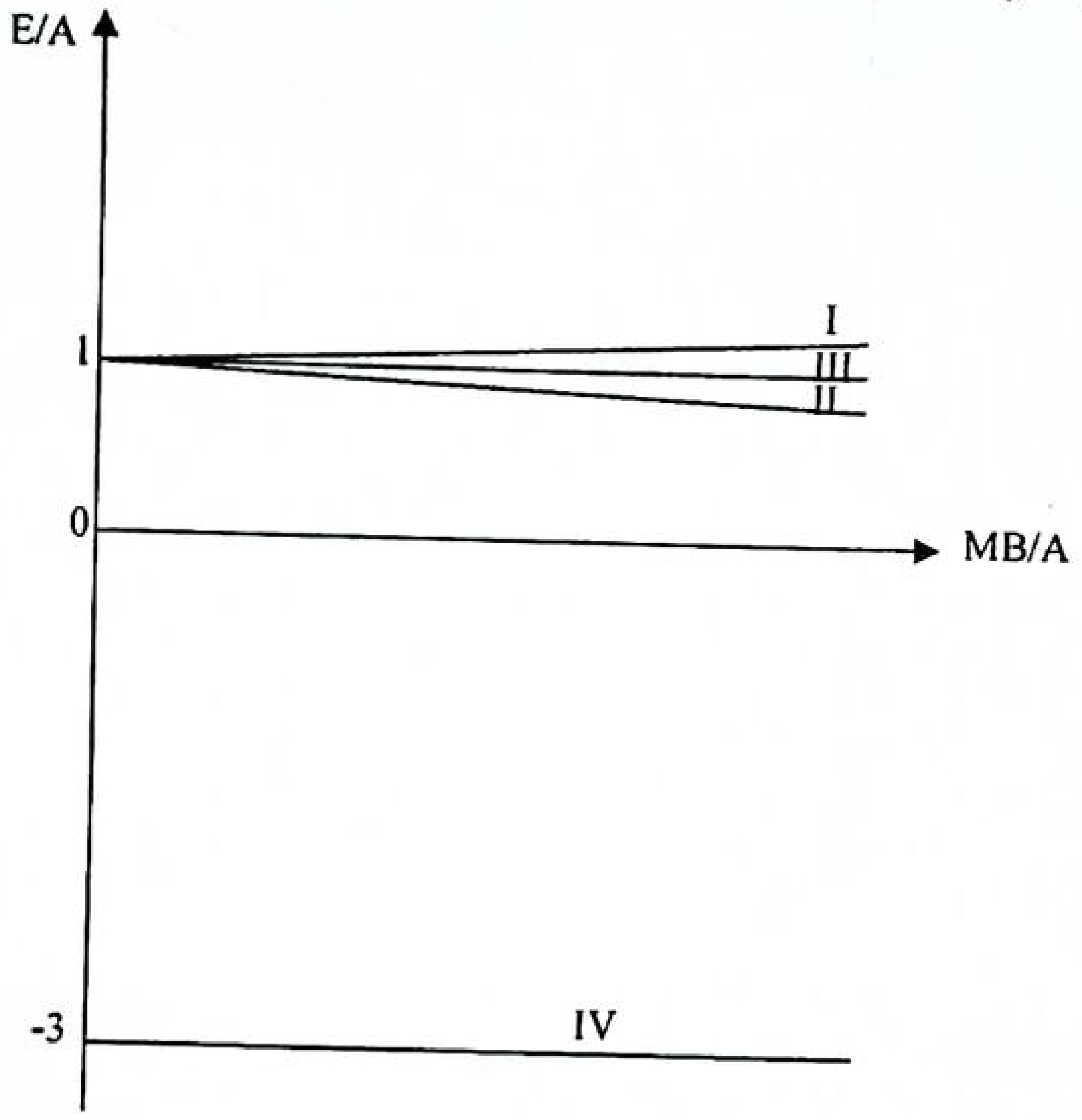
$$\frac{a_{IV,2}}{a_{IV,3}} \to 0 \quad , \quad \frac{a_{III,3}}{a_{III,2}} \to 0$$

أي أن الحالة III هي الآن الحالة النقية $\langle -+|$ و IV الحالة النقية $\langle +-|$. إن منشأ الحالتين المزيج هو تفاعل سبين الإلكترون مع سبين البروتون، الذي يعبر عنه فرق الطاقة في البنية زائدة الدقة لذرة الهدروجين. يصبح هذا التفاعل مهملاً في حال وجود حقل مغنطيسي خارجي شديد القوة يتفاعل مع كل

[1] أخذنا هذه المنحنيات (والمنحنيات السابقة) عن كتاب فاينمان الذي يرمز ب $\mu$ و $\mu'$ إلى رمزينا M و M'.

من سبين الإلكترون وسبين البروتون؛ طاقة التفاعل هي $\pm \overline{M} \cdot \vec{B}$ $(M=-(M_e+M_p))$ في حال وجود كلا السبينين في نفس الاتجاه بالنسبة للحقل، إنها بالترتيب الحالة $\langle ++|$ أو الحالة $\langle --|$؛ وهي $\pm \overline{M'} \cdot \vec{B}$ $(M'=-(M_e-M_p))$، في حال وجود كلا السبينين في اتجاهين مختلفين بالنسبة للحقل، إنها بالترتيب الحالة $\langle -+|$ أو الحالة $\langle +-|$. نقول عن هاتين الحالتين إن سبينهما متعاكسي التوازي لتمييزهما عن الحالتين الأوليتين حيث السبينان متوازيان.

لننظر الآن إلى حالة وجود حقل خارجي ضعيف ومتغير. ينطبق في هذه الحالة القطعان الزائدان على مماسيهما في النقطة صفر، الموازيين لمحور الفواصل $\frac{MB}{A}$. وهكذا تنطلق من النقطة 1 على محور التراتيب ثلاث مستقيمات تمثل الحالات التي سبينها يساوي 1، 0، 1- ومن النقطة 1- على هذا المحور مستقيم واحد مواز لمحور الفواصل يمثل حالة سبينها صفر أيضاً، الشكل.5.




الشكل.5

لنفترض أننا استطعنا عزل ذرات الهدروجين ذات الطاقة A عن تلك التي طاقتها 3A-. إن إخضاع هذه الأخيرة إلى غراديان حقل مغنطيسي ضعيف – تجربة شتيرن – غيرلاش – لن يكون ذا مفعول لأن عزمها المغنطيسي الكلي يساوي الصفر (لا ننسى أننا افترضنا ذرة الهدروجين في الحالة الدنيا $1s$). أما إخضاع ذرات الهدروجين ذات الطاقة A إلى ذات الغراديان فإن حزمة ذرات الهدروجين ستنفصل إلى ثلاث حزمات. تتجه الذرات $\langle ++|$ في اتجاه الغراديان، نحو الأعلى على سبيل المثال، والذرات $\langle --|$ في اتجاه مضاد لاتجاه الغراديان، نحو الأسفل؛ أما الذرات $\langle -+|$ ذات السبين الكلي المساوي للصفر فلن تتأثر مثلها مثل الذرات $\langle +-|$ التي رأينا أنها لم تتأثر بتغير الحقل. يطلق عندئذ على انفصال حزمة ذرات الهدرجين إلى ثلاث حزمات اسم مفعول زيمان النظامي.

## 4.2– هاميلتوني الذرة بوجود حقل مغنطيسي ضعيف

لنذكر بقوة لورانتس التي نكتبها بدليل متجهة الكمون المغنطيسي $\vec{A}$ والكمون الكهربائي السلمي V على الشكل

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right)$$

$$= e\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A}\right) \qquad (1)$$

حيث كتبنا الجداء المتجه الثلاثي على الشكل

$$\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} \qquad (2)$$

آخذين بعين الاعتبار ضرورة وضع المؤثر التفاضلي على اليسار في الحد الأول من الطرف الثاني. ومن جهة أخرى فإن $\vec{A}\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ و

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} \equiv \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} \qquad i = x, y, z$$

ومنه

$$\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}V - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)\right)$$

ونحصل على هذا الشكل بسهولة على الطاقة الكامنة – بإهمال المشتق الكلي بالنسبة للزمن $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$ و $\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{\alpha}$ ، $\vec{A}$ التابع الأصلي لـ $\vec{\alpha}$ ، حيث $\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\,\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$-

$$U = e\left(V - \vec{v} \cdot \vec{A}\right) \qquad (3)$$

التي تعطينا بدورها مركبات الاندفاع الخطي (العزم المرافق لـ $\dot{q}^i$ أي لـ $\dot{x}$ ، $\dot{y}$ ، $\dot{z}$ حيث · تعني الاشتقاق بالنسبة للزمن إذ لدينا تعريفاً (التعريف I.6.(5))

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}$$

$$= m\dot{q}^i + eA^i \qquad (4)$$

بحيث يمكننا كتابة الهاميلتوني(I.(6.(3.1) $H = p_i\dot{q}^i - L$ آخذين بعين الاعتبار (3)، على الشكل

$$H = m\dot{q}^{i^2} + eA^i\dot{q}^i - \left(\frac{m\dot{q}^{i^2}}{2} - e\left(V - \dot{q}^iA^i\right)\right)$$

$$= \frac{m\dot{q}^{i^2}}{2} + eV = T + eV \qquad (5)$$

إنه الشكل المألوف لطاقة جسيم مشحون موجود في حقل كهرطيسي يحدده الكمون $(V \text{ ، } \vec{A})$، نكتبه بالاستعانة بـ (4) على الشكل

$$H = \sum_i \frac{\left(p_i - eA^i\right)^2}{2m} + eV$$

## 4.2- هاميلتوني الذرة بوجود حقل مغنطيسي ضعيف

لنذكر بقوة لورانتس التي نكتبها بدليل متجهة الكمون المغنطيسي $\vec{A}$ والكمون الكهربائي السلمي $V$ على الشكل

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right)$$

$$= e\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A}\right) \qquad (1)$$

حيث كتبنا الجداء المتجه الثلاثي على الشكل

$$\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} \qquad (2)$$

آخذين بعين الاعتبار ضرورة وضع المؤثر التفاضلي على اليسار في الحد الأول من الطرف الثاني. ومن جهة أخرى فإن $\vec{A}\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ و

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} \equiv \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} \qquad i = x, y, z$$

ومنه

$$\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}V - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)\right)$$

ونحصل على هذا الشكل بسهولة على الطاقة الكامنة – بإهمال المشتق الكلي بالنسبة للزمن $\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\vec{\alpha} = -\vec{\nabla}\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$، حيث $\vec{\alpha}$ التابع الأصلي لـ $\vec{A}$، $\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{\alpha}$ و $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$

$$U = e\left(V - \vec{v} \cdot \vec{A}\right) \qquad (3)$$

التي تعطينا بدورها مركبات الاندفاع الخطي (العزم المرافق لـ $\dot{q}^i$ أي لـ $\dot{x}$، $\dot{y}$، $\dot{z}$ حيث . تعني الاشتقاق بالنسبة للزمن إذ لدينا تعريفاً (التعريف I.6.(5)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}$$

$$= m\dot{q}^i + eA^i \qquad (4)$$

بحيث يمكننا كتابة الهاميلتوني(I.(6.(3.1 $H = p_i\dot{q}^i - L$ آخذين بعين الاعتبار (3)، على الشكل

$$H = m\dot{q}^{i^2} + eA^i\dot{q}^i - \left(\frac{m\dot{q}^{i^2}}{2} - e\left(V - \dot{q}^iA^i\right)\right)$$

$$= \frac{m\dot{q}^{i^2}}{2} + eV = T + eV \qquad (5)$$

إنه الشكل المألوف لطاقة جسيم مشحون موجود في حقل كهرطيسي يحدده الكمون $(V، \vec{A})$، نكتبه بالاستعانة بـ (4) على الشكل

$$H = \sum_i \frac{\left(p_i - eA^i\right)^2}{2m} + eV$$

## 4.2– هاميلتوني الذرة بوجود حقل مغنطيسي ضعيف

لنذكر بقوة لورانتس التي نكتبها بدليل متجهة الكمون المغنطيسي $\vec{A}$ والكمون الكهربائي السلمي $V$ على الشكل

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right)$$

$$= e\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A}\right) \qquad (1)$$

حيث كتبنا الجداء المتجه الثلاثي على الشكل

$$\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} \qquad (2)$$

آخذين بعين الاعتبار ضرورة وضع المؤثر التفاضلي على اليسار في الحد الأول من الطرف الثاني. ومن جهة أخرى فإن $\vec{A}\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ و

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} \equiv \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} \qquad i = x, y, z$$

ومنه

$$\vec{F} = e\left(-\vec{\nabla}V - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)\right)$$

ونحصل على هذا الشكل بسهولة على الطاقة الكامنة – بإهمال المشتق الكلي بالنسبة للزمن $\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$-، حيث $\vec{\alpha}$ التابع الأصلي لـ $\vec{A}$، $\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{\alpha}$ و $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\nabla}\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$

$$U = e\left(V - \vec{v} \cdot \vec{A}\right) \qquad (3)$$

التي تعطينا بدورها مركبات الاندفاع الخطي (العزم المرافق لـ $\dot{q}^i$ أي لـ $\dot{x}$، $\dot{y}$، $\dot{z}$ حيث · تعني الاشتقاق بالنسبة للزمن إذ لدينا تعريفاً (التعريف 5).I.6.)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}$$

$$= m\dot{q}^i + eA^i \qquad (4)$$

بحيث يمكننا كتابة الهاميلتوني(3.1)،6).I) $H = p_i\dot{q}^i - L$ آخذين بعين الاعتبار (3)، على الشكل

$$H = m\dot{q}^{i^2} + eA^i\dot{q}^i - \left(\frac{m\dot{q}^{i^2}}{2} - e\left(V - \dot{q}^iA^i\right)\right)$$

$$= \frac{m\dot{q}^{i^2}}{2} + eV = T + eV \qquad (5)$$

إنه الشكل المألوف لطاقة جسيم مشحون موجود في حقل كهرطيسي يحدده الكمون $(V \text{، } \vec{A})$، نكتبه بالاستعانة بـ (4) على الشكل

$$H = \sum_i \frac{\left(p_i - eA^i\right)^2}{2m} + eV$$

هنا $i = 1,2,3$ ومنه

$$H = \frac{\left(\bar{p} - e\bar{A}\right)^2}{2m} + eV \qquad (2.18)$$

**ملاحظة هامة :**

ترينا هذه العلاقة أن الاندفاع الخطي $\bar{p}$ قد استبدل، في حال وجود حقل كهرطيسي، بـ $\bar{p} - e\bar{A}$، وعلينا إذاً بتطبيق مبدأ التقابل أخذ المؤثر $\frac{\hbar}{i}\bar{\nabla} - e\bar{A}$ عوضاً عن المؤثر $\frac{\hbar}{i}\bar{\nabla}$ الممثل للاندفاع الخطي في حال عدم وجود الحقل أو عدم حمل الجسيم لشحنة كهربائية. يطلق على الاشتقاق الجديد الذي استبدلنا به الاشتقاق العادي $\frac{\partial}{\partial x^j}$ بـ : $\hbar\frac{\partial}{\partial x^j} - ieA^j \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^j}$ اسم الاشتقاق مساير التغيير ويلعب دوراً هاماً هندسياً وفيزيائياً في نظريات الحقول المكممة، ونظريات المعايرة على وجه الخصوص.

## 5.2– مفعول زيمان في حالة ذرة ما

لنكتب الآن هاميلتوني الذرة المؤلفة من عدد ما من الإلكترونات بوجود حقل مغنطيسي ضعيف مستقل عن الزمن

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{\text{كل الإلكترونات}}\left(\bar{p}_e + e\bar{A}\right)^2 + V + \mu_B\left(\sum_{\text{كل الإلكترونات}}\bar{\sigma}_e\right)\bar{B} \qquad (2.19)$$

حيث رمزنا بـ $V$ لطاقة التفاعل الكهربائي الراكد بين مجموع الإلكترونات والنواة ولتفاعل الإلكترونات فيما بينها؛ $-e$ شحنة الإلكترون و $\bar{p}_e$ اندفاعه و $\mu_B$ مغناتون بور الموجب.

لدينا في مربع المؤثر $\bar{p}_e + e\bar{A}$ حدان هما $\bar{p}_e \cdot \bar{A}$ و $A \cdot \bar{p}_e$ وبما أنهما مؤثران فهما ليسا تبادليين بالضرورة ولذا نطلق على كتابة $\left(\bar{p}_e + e\bar{A}\right)^2 \equiv p^2 + e\left|\bar{A}\right|^2 + \left(\bar{P}\cdot\bar{A} + \bar{A}\cdot\bar{P}\right)$ التي تنقلنا من الشكل التقليدي إلى الشكل الكمومي اسم مناظرة العلاقة Symmetrization. إن

$$\left[\bar{P}, \bar{A}\right] = \frac{\hbar}{i}\bar{\nabla}\cdot\bar{A} \qquad (2.20)$$

يكفي للتأكد من ذلك جعل هذا المؤثر المتجهي (ثلاث علاقات مبادلة) يفعل بدالة $f(x,y,z)$ :

$$\left[P_x, A_x\right]f = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial A_x}{\partial x}f + \frac{\hbar}{i}A_x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\hbar}{i}A_x\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial A_x}{\partial x}f.$$

نحصل على علاقتين مماثلتين بـ $y$ و $z$. ومن جهة أخرى، نظراً لكون الحقل المغنطيسي ثابتاً بالنسبة للزمن وبالنسبة للمكان، فمن الممكن كتابة $\bar{A}$ على الشكل

$$\bar{A} = \frac{1}{2}\left(\bar{B}\times\bar{r}\right) \qquad (2.21)$$

الذي يحقق اشتقاق $\vec{B}$ من كمون متجه

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\right) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$$
$$\equiv \vec{B}$$

حيث استعملنا المتطابقة التي تعرف تدوير (عقص) الجداء المتجه، ومع ملاحظة أن $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$، $\vec{B} = \left\{\begin{matrix} B_x \frac{\partial x}{\partial x} \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$، $(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = 0$ لثبات $\vec{B}$ وأن $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ دوماً.

تربنا كتابة $\vec{A}$ على الشكل (2.21) واستعمال خاصة الجداء المختلط أن

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{r} = 0$$

ذلك أن $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ عندما لا توجد تيارات أو حقل كهربائي تابع للزمن. لدينا في هذه الحالة

$$[\vec{P}, \vec{A}] = 0 \qquad (2.20)'$$

وهكذا يمكننا كتابة الهاميلتوني $H$ مستعينين بـ '(2.20) و (2.21) على الشكل

$$H = H_o + \frac{e^2}{8m}\sum_e (\vec{B} \times \vec{r}_e)^2 + \frac{e\vec{B}}{2m}\sum_e (\vec{r}_e \times \vec{p}_e) + \mu_B \sum_e \vec{\sigma}_e \vec{B} \qquad (2.19)'$$

حيث $H_o$ هو هاميلتوني الذرة الحرة – لا وجود للحقل المغنطيسي : $H_o = \frac{1}{2m}\sum_e |P_e|^2 + V$ و $\sum_e$ تشير إلى الجمع من أجل كل الإلكترونات في الذرة. إن

$$\sum_e \vec{r}_e \times \vec{p}_e \equiv \hbar\vec{L} \qquad (2.22)$$

حيث $\vec{L}$ مؤثر العزم الزاوي المداري مقيساً بوحدات $\hbar$.

ومؤثر السبين الكلي هو

$$\vec{S} = \sum_e \frac{1}{2}\vec{\sigma} \qquad (2.23)$$

وهكذا يأخذ الهاميلتوني الشكل التالي

$$H = H_o + \mu_B \vec{B}(\vec{L} + 2\vec{S}) + \frac{e^2}{8m}\sum_e (\vec{B} \times \vec{r}_e)^2 \qquad (2.19)''$$

الذي يبين التفاعل بين الحقل المغنطيسي والعزم المغنطيسي الكلي للذرة

$$\vec{\mu}_{at} = -\mu_B \vec{L} - 2\mu_B \vec{S} \qquad (2.24)$$

وهو اضطراب من الرتبة الأولى، أما الحد الثالث في "(2.19) فهو اضطراب من الرتبة الثانية بـ B، نهمله ونكتب هاميلتوني الاضطراب بدليل العزم الزاوي الكلي $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ على الشكل

$$H' = \mu_B \bar{B}(\bar{J} + \bar{S}) = \mu_B B(J_z + S_z) \qquad (2.25)$$

يجب علينا الآن كتابة هذا المؤثر على شكل قطري للحصول على التصحيحات التي يدخلها على مستويات الطاقة $E_k^{(0)}$ والتي ستزيل تدني هذه المستويات، من الرتبة $2J + 1$، جزئياً أو كلياً. سنرمز لمتجهات الحالة بثلاثة أعداد كمومية، مستوى الطاقة $k$ والعزم الزاوي الكلي $J$ ومسقطه على اتجاه الحقل المغنطيسي $J_z$ : $|kJJ_z\rangle$. لنلاحظ أننا أهملنا في كتابتنا لـ $H'$ التفاعلات بين العزوم الزاوية المدارية والسبينات من جهة وبين مختلف السبينات فيما بينها من جهة ثانية. أي أننا أهملنا البنيات الدقيقة (التي سندرسها في حينها) والبنيات زائدة الدقة. هذا يعني أننا اعتبرنا العزم الزاوي المداري الكلي، مجموع العزوم الزاوية المدارية لمختلف الإلكترونات، مستقلاً عن السبين الكلي وبالتالي فإن المؤثرات $\bar{J}$، $\bar{L}$، $\bar{S}$ مؤثرات منحفظة – تبادلية مع $H'$ – وتبادلية فيما بينها : إنها نظمة تامة لمقادير فيزيائية رصودة. وبالتالي فإن متجهات الحالة $|JJ_z\rangle$، من أجل $k$ معينة هي متجهات خاصة لهاميلتوني الاضطراب $H'$ وتصحيحات الطاقة هي

$$\Delta E = (H')_{JJ_z, JJ_z} = \mu_B B\left(J_z + \langle JJ_z|S|JJ_z\rangle\right) \qquad (2.26)$$

وبما أن $\bar{S}$ منحفظ، مثله مثل $\bar{J}$ وتبادلي معه فإن $(\bar{J}\cdot\bar{S})(\bar{J}\cdot\bar{S}) = |\bar{J}|^2|\bar{S}|^2$ و $\bar{S}$ متناسب مع $\bar{J}$ وبالتالي فإن

$$\bar{J} + \bar{S} = O\bar{J}$$

حيث $O$ مؤثر نحدده كما يلي : نضرب طرفي هذه العلاقة على اليمين بـ $\bar{J}$ ونستعمل العلاقة $L \cdot S = \frac{J^2 - L^2 - S^2}{2}$ (3.(4.11)) فنحصل على

$$O = \frac{J^2 + \bar{S}\cdot\bar{J}}{J^2} = I + \frac{S^2 + J^2 - L^2}{2J^2} \qquad (2.27)$$

تعني هذه العلاقة أن $|JJ_z\rangle$ متجهات خاصة لـ $O$، قيمها الخاصة هي

$$O_{JJ_z} = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \qquad (2.27)'$$

ومنه

$$\langle J_z + S_z\rangle = O_{JJ_z} J_z$$

وأخيراً بالتبديل في (2.26)

$$\Delta E = \mu_B B J_z\left(1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}\right) \qquad (2.28)$$

التي نكتبها على الشكل

$$\Delta E = \mu_B g J_z B$$

حيث $g$ هو معامل لاندي Landé للذرة. ويسمى أيضاً المعامل الدوراني المغنطيسي gyromagnetic.

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \quad (2.29)$$

تبين العلاقة (2.28) أن التدني قد زال كلياً : $2J + 1$ تصحيح للطاقة تقابل مختلف قيم مسقط العزم الزاوي الكلي $J_z$ على اتجاه الحقل المغنيطسي. إلا أن هذا التصحيح لا يظهر إلا إذا كان الفرق بين مستويي طاقة متجاورين $k$ ، $k \pm 1$ كبيراً بالنسبة لهما، يجب كذلك أن يكون التصحيح صغيراً بالنسبة لمستويات البنية الدقيقة التي سندرسها لاحقاً. وهكذا فإن مفعول زيمان يختفي عندما يكون الحقل المغنطيسي شديداً بحيث يمكن مقارنة المقدار $\mu_B B$ مع الفرق الذي يفصل مستويي بنية دقيقة. لم تعد العلاقتان (2.28)، (2.29) صالحتين، ويحدث مفعول جديد هو مفعول باشن–باك Paschen-Back.

لنلاحظ أن $g = 1$ عندما يكون السبين الكلي مساوياً للصفر؛ $J = L$ ولذا فقد كان يطلق على مفعول زيمان – المعروف منذ عام 1896، قبيل ميلاد الميكانيك الكمومي (1900)، وقبل اكتشاف السبين (1925) – المقابل لـ $g = 1$ اسم المفعول النظامي وعلى المفعول الآخر $g \neq 1$ اسم غير النظامي.

## 3. الاضطراب التابع للزمن

### 1.3– معادلة السعات $C_j$ التفاضلية

لنكتب متجهة الحالة $|\psi(\vec{r}, t)\rangle$ في قاعدة منظمة ومتعامدة $|u_m\rangle$ لا تتوقف على الزمن على الشكل

$$|\psi(\vec{r}, t)\rangle = \sum_m C_m(t)|u_m\rangle$$

تأخذ معادلة شرودينغر في هذه الحالة شكل جملة من المعادلات التفاضلية هي

$$i\hbar \frac{dC_j}{dt} = \sum_m H_{jm} C_m \quad (3.1)$$

ولنفترض بداية أن الهاميلتوني $H$ مستقل عن الزمن. تصبح متجهات القاعدة $|u_m\rangle$ متجهات خاصة مستقرة مقابلة للطاقات $E_m$ ، والهاميلتوني قطري طبعاً بحيث تأخذ المعادلات (3.1) الشكل

$$i\hbar \frac{dC_j}{dt} = H_{jj} C_j \quad (3.2)$$

ذات الحل

$$C_j(t) = C_j(0) e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} \quad (3.2)'$$

ونكتب $|\psi\rangle$ عندئذ على الشكل

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m C_m(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}|u_m\rangle \quad (3.3)$$

أما عندما يكون الهاميلتوني تابعاً للزمن، عندما تكون الطاقة غير منحفظة، فلا وجود للحلول المستقرة ولا معنى للحديث عن تصحيحات نقوم بها على القيم الخاصة للهاميلتوني. ومع ذلك فبالإمكان القيام بحساب تقريبي لمتجهات الحالة المضطربة انطلاقاً من متجهات الحالة المستقرة المقابلة للهاميلتوني $H_o$ المستقل عن الزمن وذلك بتغيير الثوابت $C_m(0)$ في (3.3) على غرار ما نفعله في حل المعادلات التفاضلية الخطية. لنكتب إذاً معادلة شرودينغر من أجل متجهة الحالة المضطربة

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \left(H_o + \lambda H'(t)\right)|\psi(t)\rangle \qquad (3.4)$$

مستعينين بمتجهات الحالة المستقرة $\langle u_m| \quad |\psi_m^{(0)}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}|u_m\rangle$ على النحو التالي

$$|\psi\rangle = \sum_m C_m(t)|\psi_m^{(0)}\rangle = \sum_m C_m(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t}|u_m\rangle \qquad (3.5)$$

إنه الشكل الذي استعملناه في (1.17) ولكن مع $C_m$ تابعة للزمن. نضرب هذه العلاقة على اليسار بـ $\langle u_j|$ ونحل معادلة شرودينغر لنحصل على

$$i\hbar\frac{dC_j}{dt} = \sum_m H'_{jm}(t)\,C_m(t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}(E_m^{(0)}-E_j^{(0)})t} = \sum_m H'_{jm}(t)C_m(t)\,e^{i\omega_{jm}t} \qquad (3.6)$$

حيث وضعنا

$$\omega_{jm} = \frac{E_j^{(0)} - E_m^{(0)}}{\hbar} \qquad (3.7)$$

المسماة بتردد بور للانتقال بين المستويين $|m\rangle$ و $|j\rangle$.

إن حل جملة المعادلات (3.6) المكافئة لمعادلة شرودينغر مستحيل بصورة عامة ولذا لابد من حساب تقريبي.

## 2.3– التقريب الأولي

إن $C_j$ ثابتة في حالة عدم وجود الاضطراب $H'$. ترينا المعادلات (3.6) أن $\frac{dC_j}{dt}$ صغير عندما تكون عناصر المصفوفة $H'_{jm}$ صغيرة، أي أن $C_j$ يتغير ببطء.

نهمل في الطرف الثاني من (3.6) في نشر $C_m(t)$ جداء $H'_{jm}$ بـ $\frac{dC_m}{dt}$ باعتباره صغيراً من الرتبة الثانية ونعتبر الجداء من الشكل $H'_{jm}C_m^{(0)}$. ولنأخذ على سبيل المثال حالة النظمة قبل الاضطراب عندما تكون الطاقة المستقرة مساوية لـ $E_k^{(0)}$. لدينا في هذه الحالة، ولنسمها التقريب صفر، حسب (1.19)

$$C_k^{(0)} = 1 \quad \text{و} \quad E_m^{(0)} = 0 \qquad \text{من أجل} \quad m \neq k$$

أما عندما يكون الهاميلتوني تابعاً للزمن، عندما تكون الطاقة غير منحفظة، فلا وجود للحلول المستقرة ولا معنى للحديث عن تصحيحات نقوم بها على القيم الخاصة للهاميلتوني. ومع ذلك فبالإمكان القيام بحساب تقريبي لمتجهات الحالة المضطربة انطلاقاً من متجهات الحالة المستقرة المقابلة للهاميلتوني $H_o$ المستقل عن الزمن وذلك بتغيير الثوابت $C_m(0)$ في (3.3) على غرار ما نفعله في حل المعادلات التفاضلية الخطية. لنكتب إذاً معادلة شرودينغر من أجل متجهة الحالة المضطربة

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \left(H_o + \lambda H'(t)\right)|\psi(t)\rangle \tag{3.4}$$

مستعينين بمتجهات الحالة المستقرة $|\psi_m^{(0)}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}|u_m\rangle$ على النحو التالي

$$|\psi\rangle = \sum_m C_m(t)|\psi_m^{(0)}\rangle = \sum_m C_m(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t}|u_m\rangle \tag{3.5}$$

إنه الشكل الذي استعملناه في (1.17) ولكن مع $C_m$ تابعة للزمن. نضرب هذه العلاقة على اليسار بـ $|u_j\rangle$ ونحل معادلة شرودينغر لنحصل على

$$i\hbar\frac{dC_j}{dt} = \sum_m H'_{jm}(t)\,C_m(t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}(E_m^{(0)}-E_j^{(0)})t} = \sum_m H'_{jm}(t)C_m(t)\,e^{i\omega_{jm}t} \tag{3.6}$$

حيث وضعنا

$$\omega_{jm} = \frac{E_j^{(0)} - E_m^{(0)}}{\hbar} \tag{3.7}$$

المسماة بتردد بور للانتقال بين المستويين $\langle m|$ و $|j\rangle$.

إن حل جملة المعادلات (3.6) المكافئة لمعادلة شرودينغر مستحيل بصورة عامة ولذا لابد من حساب تقريبي.

## 2.3– التقريب الأولي

إن $C_j$ ثابتة في حالة عدم وجود الاضطراب $H'$. ترينا المعادلات (3.6) أن $\frac{dC_j}{dt}$ صغير عندما تكون عناصر المصفوفة $H'_{jm}$ صغيرة، أي أن $C_j$ يتغير ببطء.

نهمل في الطرف الثاني من (3.6) في نشر $C_m(t)$ جداء $H'_{jm}$ بـ $\frac{dC_m}{dt}$ باعتباره صغيراً من الرتبة الثانية ونعتبر الجداء من الشكل $H'_{jm}C_m^{(0)}$. ولنأخذ على سبيل المثال حالة النظمة قبل الاضطراب عندما تكون الطاقة المستقرة مساوية لـ $E_k^{(0)}$. لدينا في هذه الحالة، ولنسمها التقريب صفر، حسب (1.19)

$$C_k^{(0)} = 1 \quad \text{و} \quad E_m^{(0)} = 0 \qquad \text{من أجل } m \neq k$$

بحيث يعطينا التقريب الأولي

$$C_j = C_j^{(0)} + C_j^{(1)}$$

$$i\hbar \frac{dC_j^{(1)}}{dt} = H'_{jk} C_k^{(0)} e^{i\omega_{jk}t} = H'_{jk} e^{i\omega_{jk}t} \qquad (3.8)_1$$

ومنه بالتكامل

$$C_j^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_1} H'_{jk}(t)\, e^{i\omega_{jk}t} dt \qquad (3.9)$$

لنلاحظ أنه من الممكن حساب التقريبات الأخرى بنشر

$$C_m(t) = C_m^{(0)} + \frac{dC_m}{dt} t + \dots$$

$$= C_m^{(0)} + C_m^{(1)} + \dots$$

وكتابة التقريب الثاني لـ $C_j$ على الشكل

$$i\hbar \frac{dC_j^{(2)}}{dt} = \sum_m H'_{jm}(t)\, C_m^{(1)}(t)\, e^{i\omega_{jm}t} \qquad (3.8)_2$$

لكننا سنكتفي الآن بحساب التقريبات الأولية في الحالة الخاصة التي يأخذ فيها هاميلتوني الاضطراب شكلاً دورياً

$$H' = Fe^{-i\omega t} + Ge^{i\omega t} \qquad (3.10)$$

حيث المؤثران $F$ و $G$ مؤثران مستقلان عن الزمن، وحيث

$$F^{\dagger} = G$$

نظراً لكون $H'$ ذاتي الترافق. نكتب (3.10) إذاً على الشكل

$$H' = Fe^{-i\omega t} + F^{\dagger}e^{i\omega t} \qquad (3.10)'$$

$$H'_{jk} = F_{jk}e^{-i\omega t} + \overline{F}_{kj}e^{i\omega t}$$

ومنه، بالتبديل في (3.9) وإجراء التكامل

$$C_j^{(1)}(t) = -\frac{F_{jk}\left(e^{i(\omega_{jk}-\omega)t} - 1\right)}{\hbar(\omega_{jk} - \omega)} - \frac{\overline{F}_{kj}\left(e^{i(\omega_{jk}+\omega)t} - 1\right)}{\hbar(\omega_{jk} + \omega)} \qquad (3.11)$$

ويجب أن نفترض، حتى يكون لهذه العلاقة معنى، أن المخرجين مختلفان عن الصفر أي أن

$$E_j^{(0)} - E_k^{(0)} \neq \pm\hbar\omega \qquad (3.12)$$

من أجل كل الحالات النهائية $j$

إلا أنه من الضروري أيضاً أن يكون المخرجان صغيرين حتى يكون احتمال الانتقال من الحالة المستقرة $k$ إلى الحالة المضطربة $j$ $|C_j^{(1)}|^2$ مقيساً، أي أن يكون تردد الاضطراب $\omega$ $(\omega \geq 0)$ من رتبة تردد بور $\omega_{jk}$ : $\omega \sim \omega_{jk}$. الأهم في التصحيح من الرتبة الأولى هو الطرف الثاني من الحد الأول وإسهام الحد الإرنان من قريبة حالة إنها، المخرج كبير جداً – التردد عالي اضطراباً يمثل الذي الثاني الحد إذاً سنهمل . $C_j^{(1)}(t)$

أما إذا كان تردد بور $\omega_{jk}$ سالباً فإن إسهام الحد الثاني هو الأهم ويهمل عندئذ الحد الأول. وهكذا فإن الحالة القريبة من الإرنان تقابل امتصاص الطاقة أو إصدارها حسبما يكون الحد الأول أو الحد الثاني هو الأهم.

ينطبق ما فعلناه حتى الآن على حالات طيف الطاقة المتصل أيضاً، مثله في ذلك مثل الاضطرابات المستقلة عن الزمن، وذلك بأن نضيف إلى الجمع من أجل قيم الطيف المنفصل التكامل من أجل قيم الطيف المتصل.

نرمز لحالات الطيف المتصل التي ينتجها التصحيح بدليل $\nu$ – والتصحيح انطلاقاً من وضع مستقر رمزنا له بالدليل $k$. يجب أن يتحقق الشرط

$$\omega_{\nu k} \neq \omega \qquad (3.12)'$$

يقع الطيف المتصل كالمعتاد فوق الطيف المنفصل : نرمز بـ $E_{min}^{(0)}$ لحد طاقات الطيف المتصل الأدنى. ويأخذ شرط صلاحية التقريب (3.12)، '(3.12) الشكل

$$E_{min}^{(0)} - E_k^{(0)} > \hbar\omega \qquad (3.12)''$$

## 3.3– حساب احتمال الانتقال بفعل الاضطراب

سنناقش عدة حالات حسب تغيرات $H'$.

1– نفترض أن الاضطراب $H'(t)$ لا يفعل إلا خلال برهة من الزمن تنتهي في اللحظة $t_1$، أن النظمة الكمومية مستقرة قبل وبعد الاضطراب. نكتب احتمال الانتقال من الحالة المستقرة $k$ إلى الحالة المستقرة $j$ على الشكل

$$P_{k\to j} = \left|C_j^{(1)}\right|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{t_1} H'_{jk}(t)e^{i\omega_{jk}t}dt\right|^2 \qquad (3.13)$$

ما من شيء يمنعنا من كتابة التكامل بين $-\infty$ و $+\infty$ وهي علاقة تبقى صحيحة عندما يتناهى الاضطراب $H'$ إلى الصفر بسرعة كافية مع امتداد الزمن $t \to \pm\infty$ ويبقى التكامل متقارباً.

2– أما إذا لم يتحقق هذا الشرط واستدام $H'$ طيلة الزمن مع بقائه صغيراً فإن التكامل متباعد. ولذا نعود إلى العلاقة (3.9) ونكاملها بالتجزئة

$$C_j^{(1)}(t_1) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t_1} H'_{jk}(t)\, e^{i\omega_{jk}t}dt = -\left.\frac{H'_{jk}e^{i\omega_{jk}t}}{\hbar\omega_{jk}}\right|_{-\infty}^{t_1} + \int_{-\infty}^{t_1}\frac{\partial H'_{jk}}{\partial t}\frac{e^{i\omega_{jk}t}}{\hbar\omega_{jk}}dt \qquad (3.9)'$$

لننظر أولاً إلى الحد المكامل؛ إنه منعدم من أجل $t=-\infty$ لأنه لا وجود للاضطراب، أما من أجل الحد الأعلى، اللحظة $t_1$ فإنه يساوي السعة $C_j^{(1)}$، معامل الاضطراب المستقل عن الزمن $(1.9)_1$، مضروبة بالحد $e^{i\omega_{jk}t}$. مصدر هذا الحد هو أخذنا لسعات المتجهات $\left|u_m\right\rangle$ وليس للمتجهات $\left|\psi_m^{(0)}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t}\left|u_m\right\rangle$

$|u_m\rangle$، المتجهات الخاصة للطاقة كما فعلنا في (1.17). وهكذا فإن الحد المكامل عندما تتناهى t إلى اللانهاية هو تغير متجهة الحالة البدائية $\psi_k^{(0)}$ بتأثير الجزء الثابت من هاميلتوني الاضطراب $H'(\infty)$ ولا علاقة لهذا التغير باحتمال الانتقال من حالة إلى أخرى الذي يحدده مربع التكامل

$$P_{k\to j} = \frac{1}{\hbar^2\omega_{jk}^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial H'_{jk}}{\partial t}e^{i\omega_{jk}t}dt\right|^2 \quad (3.14)$$

3- لنفترض أن الاضطراب $H'$ يتغير ببطء – يتغير قليلاً في مجال زمني من رتبة $\frac{1}{\omega_{jk}}$-، فإن قيمة الحد تحت إشارة التكامل صغيرة جداً في (3.13) و (3.14) واحتمال الانتقال ضعيف. وعندما نصل حدياً إلى اضطراب بطيء جداً، إلى اضطراب كظوم فإن احتمال الانتقال يتناهى إلى الصفر : لا يغير الاضطراب الكظوم حالة نظمة كمومية مستقرة وغير متدنية.

4- لنفترض على العكس أن الاضطراب مفاجئ. مشتق الاضطراب $\frac{\partial H'_{jk}}{\partial t}$ كبير جداً في جوار اللحظة t التي أطلق فيها الاضطراب؛ والمقدار $e^{i\omega_{jk}t}$ يتغير ببطء كبير بالنسبة لمشتق الاضطراب بحيث يمكن استبداله بقيمته في هذه اللحظة ولا يبقى تحت إشارة التكامل في (3.14) إلا المشتق $\frac{\partial H'_{jk}}{\partial t}$ ويعطي التكامل الدالة الأصلية :

$$P_{k\to j} = \left|C_j^{(1)}\right|^2 = \frac{\left|H'_{jk}\right|^2}{\hbar^2\omega_{jk}^2} \quad (3.15)$$

يمكننا مقابلة الاضطراب المفاجئ بالاضطراب الكظوم بقولنا إنه أطلق في مجال زمني قصير من رتبة $\frac{1}{\omega_{jk}}$ وهي مدة لا تتغير فيها متجهة الحالة البدائية $|\psi_k^{(0)}\rangle$ إلا قليلاً ولكنها لم تعد حالة مستقرة، وليست متجهة خاصة للهاميلتوني الكلي $H = H_o + H'$، على خلاف المتجهة $|\psi_j\rangle$. ولدينا في الحالة العامة

$$H_o|\psi_k^{(0)}\rangle = E_k^{(0)}|\psi_k^{(0)}\rangle \quad (1)$$

و

$$H|\psi_j\rangle = E_j|\psi_j\rangle$$

يعني

$$\langle\psi_j|H = \langle\psi_j|E_j \quad (2)$$

واحتمال الانتقال من الحالة k إلى الحالة j هو

$$P_{k\to j} = \left|\langle\psi_j|\psi_k^{(0)}\rangle\right|^2$$

لنضرب (1) على اليسار بـ $\langle\psi_j|$ و (2) على اليمين بـ $|\psi_k^{(0)}\rangle$ ولنطرح الطرفين من بعضهما لنحصل على

$$\langle\psi_j|H'|\psi_k^{(0)}\rangle = \left(E_j - E_k^{(0)}\right)\langle\psi_j|\psi_k^{(0)}\rangle$$

ومنه

$$P_{k\to j} = \frac{\left|\langle\psi_j|H'|\psi_k^{(0)}\rangle\right|^2}{\left(E_j - E_k^{(0)}\right)^2} \quad (3.16)$$

عندما يكون الاضطراب المفاجئ $H'$ صغيراً فمن الممكن إهمال الجداء من الرتبة الثانية $\psi_j^{(1)}H'_{jk}$ والنظر إلى $\psi_j$ وهي في حالة التقريب صفر $\psi_j^{(0)}$ لنحصل من جديد على العلاقة (3.15).

## 4.3- الاضطراب الثابت أو الدوري

إن أهم تطبيقات نظرية الاضطرابات هي حالة الهاميلتوني المستقل عن الزمن أو الهاميلتوني الدوري الذي كتبناه على الشكل '(3.10) حيث $F_{jk}$ مستقل عن الزمن.

نكتب احتمال الانتقال، العلاقة (3.9) على الشكل

$$P_{k\to j}(t) = \left|C_j^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left|H'_{jk}\right|^2\left|\int_0^t e^{i\omega_{jk}t'}dt'\right|^2 \quad (3.17)$$

من أجل الهاميلتوني المستقل عن الزمن؛ ومن أجل الهاميلتوني الدوري على الشكل

$$P_{k\to j}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|F_{jk}\right|^2\left|\int_0^t e^{i(\omega_{jk}-\omega)t'}dt'\right|^2 \quad (3.17)'$$

حيث افترضنا تردد بور $\omega_{jk}$ موجباً وأخذنا الحالة القريبة من الإرنان. نرمز لمربع المقدار المكامل في هاتين العلاقتين بالرمز

$$f(t,\Omega) = \left|\int_0^t e^{i\Omega t'}dt'\right|^2 \quad (3.18)$$

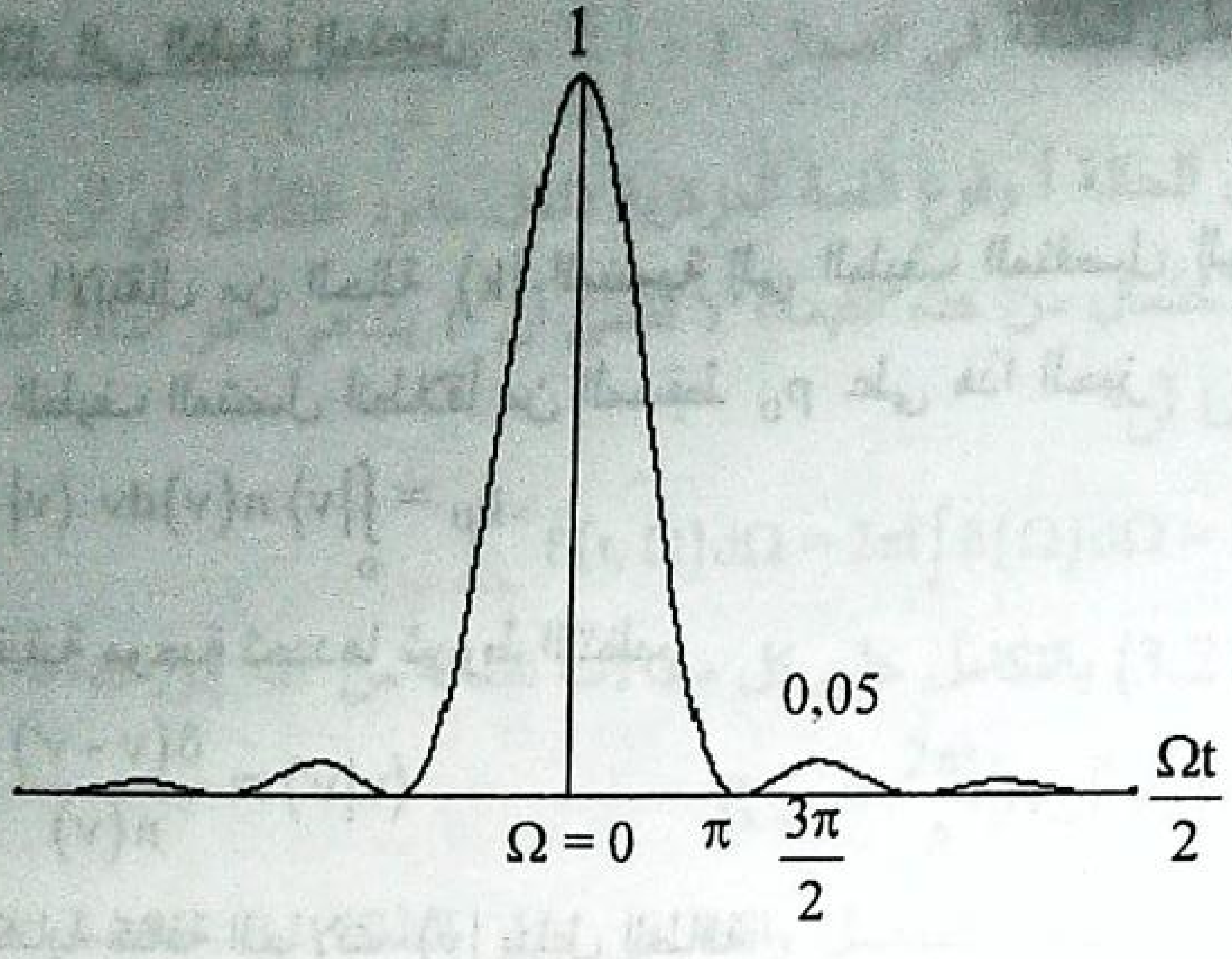
حيث $\Omega = \omega_{jk}$ في (3.17) و $\Omega = \omega_{jk} - \omega$ في '(3.17).

تعطينا العلاقة (3.18) بإجراء التكامل

$$f(t,\Omega) = \left(\frac{e^{i\Omega t}-1}{i\Omega}\right)\left(\frac{e^{-i\Omega t}-1}{-i\Omega}\right)$$

$$= \frac{2(1-\cos\Omega t)}{\Omega^2} = \frac{4\sin^2\frac{\Omega}{2}t}{\Omega^2} \quad (3.19)$$

نحصل على منحن انعراج قمته تقابل $\Omega = 0$، الشكل.6. وهكذا فاحتمال الانتقال $P_{k\to j}$ أكبر ما يكون، في لحظة معينة $t$، من أجل طاقات $j$ قريبة جداً من الطاقة البدائية $k$ في حال الهاميلتوني الثابت؛ ومن أجل طاقات يكون فيها الفرق $\Delta E = (\omega_j - \omega_k)\hbar$ قريباً جداً من تردد الحقل الدوري $\omega$.




الشكل.6

يلزم إذاً ألا يبتعد مستوى الطاقة $j$ عن مستوى الطاقة $k$ بأكثر من المقدار $\Delta E_{jk} \simeq \frac{2\pi\hbar}{t}$ في الاتجاه الموجب أو السالب في حالة الهاميلتوني الثابت وألا يتبعد الفرق بين الطاقتين $\hbar\omega_{jk}$ عن تردد الحقل الدوري بأكثر من $\frac{2\pi\hbar}{t}$ في حال الهاميلتوني الدوري. نعلم من دروس الضوء أن شدة الضوء تنخفض بنسبة 95% عندما ننتقل من الشدة العظمى الرئيسية إلى أول شدة ثانوية تبعد عن الأولى بالمقدار $\frac{3\pi}{2}$.

لنلاحظ أن (انظر الفصل الخامس)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin^2 \alpha t}{\pi t \alpha^2} = \delta(\alpha)$$

ذلك أن هذا الحد يساوي الصفر من أجل $\alpha \neq 0$ ويساوي لـ $t$ من أجل $\alpha = 0$ أي أنه لامنته وبالتالي فإن

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha t}{t\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = 1$$

ومنه

$$\lim_{t\to\infty} f(t, \Omega) = \pi t \delta\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 2\pi t \delta(\Omega)$$

بحيث يمكننا حساب احتمال الانتقال في واحدة الزمن شريطة أن نبقي الاضطراب إلى ما لانهاية.

لدينا

$$P_{k\to j}/t = \frac{|H'_{jk}|^2}{\hbar} 2\pi\delta(\omega_{jk}) \qquad (3.20)$$

في حالة الهاميلتوني الثابت، و

$$P_{k\to j}/t = \frac{|F_{jk}|^2}{\hbar^2} 2\pi\hbar\delta(E_j - E_k - \omega) \qquad (3.20)'$$

في حالة الهاميلتوني الدوري.

## 5.3- احتمال الانتقال إلى الطيف المتصل

لنبدأ بتعريف احتمال الانتقال من الحالة $\langle k|$ المنتمية إلى الطيف المنفصل إلى الحالات $\langle \nu|$ المنتمية إلى حيز ما D من الطيف المتصل انطلاقاً من المسقط $p_D$ على هذا الحيز

$$p_D = \int_D |\nu\rangle\, n(\nu)\,d\nu\, \langle \nu|$$

حيث $n(\nu)$ دالة حقيقية موجبة تحددها شروط التنظيم

$$\langle \nu|\nu'\rangle = \frac{\delta(\nu - \nu')}{n(\nu)}$$

نعين شرط التنظيم بكتابة كثافة الحالات $\langle \nu|$ بدليل الطاقة

$$\rho_\nu(E) = n(\nu)\frac{d\nu}{dE}$$

وبالتالي

$$p_D = \int_D |\nu\rangle\, \rho_\nu(E)\,dE \langle \nu|$$

واحتمال الانتقال من k إلى الحيز D من الطيف المتصل هو

$$P_{k\to D} = \int_{D(E)} P_{k\to\nu}\rho_\nu(E)\,dE \qquad (3.21)$$

وحسب (3.17)، (3.18)

$$P_{k\to D} = \int_{D(E)} \frac{|H'_{\nu k}|^2}{\hbar^2} f(t, \omega_{\nu k})\rho_\nu(E)\,dE \qquad (3.21)'$$

لنفترض الآن وقوع طاقات الحيز D في مجال ضيق I سعته $\varepsilon$ صغيرة إلى حد يمكن معه اعتبار الكثافة $\rho$ وعناصر المصفوفة $H'_{\nu k}$ ثابتتين فيه. سنفترض أيضاً أننا سننتظر فترة زمنية طويلة بالقدر الكافي لكي تتحقق المتراجحة

$$\varepsilon >> \frac{2\pi\hbar}{t}$$

أي لكي يكون مجال الطاقة (الصغير) كبيراً جداً بالنسبة لدور الدالة $f(t, \Omega)$.

يسهل علينا عندئذ تقدير قيمة الاحتمال '(3.21) ونميز حالتين :

أ- تقع القمة المركزية للدالة f $(\Omega = 0)$ خارج حدود التكامل، أي أن الانتقال لا يحفظ الطاقة $E_\nu \neq E_k$، f صغيرة – مادمنا نكامل خارج القمة المركزية – تتناهى قيمتها نحو الصفر بسرعة وقيمتها الوسطية من أجل عدة دورات $\frac{4<\sin^2 \frac{\Omega}{2} t>}{\Omega^2}$ هي $\frac{2}{\Omega^2}$ وهكذا فاحتمال الانتقال هو

$$P_{k\to D} = \frac{2\varepsilon|H'_{\nu k}|^2 \rho_\nu(E)}{\left(E - E_k^{(0)}\right)^2} \qquad (3.22)$$

## 5.3- احتمال الانتقال إلى الطيف المتصل

لنبدأ بتعريف احتمال الانتقال من الحالة $\langle k|$ المنتمية إلى الطيف المنفصل إلى الحالات $\langle \nu|$ المنتمية إلى حيز ما D من الطيف المتصل انطلاقاً من المسقِط $p_D$ على هذا الحيز

$$p_D = \int_D |\nu\rangle\, n(\nu)\, d\nu\, \langle \nu|$$

حيث $n(\nu)$ دالة حقيقية موجبة تحددها شروط التنظيم

$$\langle \nu|\nu'\rangle = \frac{\delta(\nu - \nu')}{n(\nu)}$$

نعين شرط التنظيم بكتابة كثافة الحالات $\langle \nu|$ بدليل الطاقة

$$\rho_\nu(E) = n(\nu)\frac{d\nu}{dE}$$

وبالتالي

$$p_D = \int_D |\nu\rangle\, \rho_\nu(E)\, dE \langle \nu|$$

واحتمال الانتقال من k إلى الحيز D من الطيف المتصل هو

$$P_{k\to D} = \int_{D(E)} P_{k\to\nu}\rho_\nu(E)\, dE \qquad (3.21)$$

وحسب (3.17)، (3.18)

$$P_{k\to D} = \int_{D(E)} \frac{\left|H'_{\nu k}\right|^2}{\hbar^2} f(t, \omega_{\nu k})\rho_\nu(E)\, dE \qquad (3.21)'$$

لنفترض الآن وقوع طاقات الحيز D في مجال ضيق I سعته $\varepsilon$ صغيرة إلى حد يمكن معه اعتبار الكثافة $\rho$ وعناصر المصفوفة $H'_{\nu k}$ ثابتتين فيه. سنفترض أيضاً أننا سننتظر فترة زمنية طويلة بالقدر الكافي لكي تتحقق المتراجحة

$$\varepsilon >> \frac{2\pi\hbar}{t}$$

أي لكي يكون مجال الطاقة (الصغير) كبيراً جداً بالنسبة لدور الدالة $f(t, \Omega)$.

يسهل علينا عندئذ تقدير قيمة الاحتمال '(3.21) ونميز حالتين :

أ- تقع القمة المركزية للدالة f $(\Omega = 0)$ خارج حدود التكامل، أي أن الانتقال لا يحفظ الطاقة $E_\nu \neq E_k$، f صغيرة – مادمنا نكامل خارج القمة المركزية – تتناهى قيمتها نحو الصفر بسرعة وقيمتها الوسطية من أجل عدة دورات $\frac{4\langle \sin^2 \frac{\Omega}{2} t\rangle}{\Omega^2}$ هي $\frac{2}{\Omega^2}$ وهكذا فاحتمال الانتقال هو

$$P_{k\to D} = \frac{2\varepsilon\left|H'_{\nu k}\right|^2 \rho_\nu(E)}{\left(E - E_k^{(0)}\right)^2} \qquad (3.22)$$

حيث E هي القيمة الوسطى للطاقة في المجال I : $I = \left[E - \frac{\varepsilon}{2}, E + \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

ب- لنفترض على عكس الحالة أ وقوع القمة المركزية داخل حدود التكامل أي أن الانتقال يحفظ الطاقة. يأتي الإسهام الرئيسي للاحتمال من هذه القيمة؛ لا ننسى أن f يتناهى نحو الدالة الشاذة δ ولذا فإننا لن نرتكب خطأً كبيراً إذا كتبنا أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,\Omega)\,d\Omega = 2\pi t \int \delta(\Omega)\,d\Omega = 2\pi t$$

واستبدلنا التكامل في '(3.21) بالتكامل على كل مجالات الطاقة من ∞- إلى ∞+، $dE = \hbar d\Omega$، لنجد

$$P_{k\to D} = \frac{2\pi t}{\hbar}\left|H'_{vk}\right|^2 \rho_v(E_k) \qquad (3.22)ب$$

$\rho_v(E_k)$ لأن كل طاقات الطيف المتصل واقعة في جوار الطاقة $E_k$. نحصل من هذه العلاقة على احتمال الانتقال في واحدة الزمن

$$P_{k\to D}/t = \frac{2\pi}{\hbar}\left|H'_{vk}\right|^2 \rho_v \qquad (3.22)'ب$$

ونتخلص على هذا النحو من القيم الكبيرة جداً لـ t.

إن $\rho_v$ يساوي الصفر من أجل $E_v \neq E_k$ نتيجة التقريب الذي قبلناه للدالة $f(t,\Omega)$ واحتمال الانتقال الذي لا يحفظ الطاقة معدوم. وهكذا فإن ب(3.22)' هي ذات العلاقة (3.20) - مضروبة بـ $\rho_v$ - المعبرة عن انحفاظ الطاقة صراحة بفضل وجود الدالة δ فيها؛ ولذا فسنكتب ب(3.22)' على الشكل

$$P_{k\to D}/t = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_v - E_k)\left|H'_{vk}\right|^2 \rho_v(E_k) \qquad (3.23)$$

يطلق على هذه العلاقة اسم قاعدة فيرمي الذهبية.

## 6.3- علاقة اللاتحديد بين الطاقة والزمن

لاحظنا في مناقشتنا للعلاقتين (3.17) و(3.19) أنه من اللازم ألا يتجاوز الفرق بين مستويي الطاقة k و j المقدار $\frac{2\pi\hbar}{t}$. لنطبق الآن هذه النتيجة على حالة نظمتين كموميتين متفاعلتين تفاعلاً ضعيفاً مستقلاً عن الزمن. ولتكن E و ε طاقتي النظمتين في لحظة معينة $t_o$ و E' و ε' طاقتيهما في لحظة تالية t. تقع القيمة الأكثر احتمالاً لفرق الطاقة E' - E في نطاق القمة المركزية وبالتالي فإن

$$\left|E' - E\right| \le \frac{\pi\hbar}{t - t_o} = \frac{\pi\hbar}{\Delta t} \qquad (3.24)$$

تصح هذه العلاقة على فرق طاقة النظمة الكمومية الثانية

$$\left|\varepsilon' - \varepsilon\right| \le \frac{\pi\hbar}{\Delta t} \qquad (3.24)'$$

وهكذا فإن الفرق الكلي في طاقة النظمتين بين اللحظة $t_o$ واللحظة المجاورة t هو بحدود

$$\left|(E'+\varepsilon') - (E+\varepsilon)\right|\Delta t \simeq \hbar \qquad (3.25)$$

تعني علاقة اللاتحديد هذه أنه بقدر ما يقصر الزمان الفاصل بين قياسين متتاليين للطاقة الكلية يكبر الفرق بين قيمتي القياسين. كما تعني أيضاً أن تغير قيمة الطاقة هذا مستقل عن مقدار الاضطراب. تختلف علاقة اللاتحديد بين الطاقة والزمن عن علاقة اللاتحديد بين الوضع والاندفاع الخطي على سبيل المثال $\Delta x \Delta p \simeq \hbar$، ذلك أن هذه العلاقة تعني القياس المتزامن للمقدارين الفيزيائيين المذكورين بينما تعني العلاقة الأولى قياسات متتابعة للطاقة؛ أما في لحظة معينة فإن قياس الطاقة دقيق كما نشاء.

لنفرض أن إحدى النظمتين ذات الطاقة ε هي جهاز القياس الجهري. إن $\hbar$ مهملة عندئذ بالنسبة له وطاقة الجهاز قبل القياس، قبل تفاعله مع النظمة الكمومية، تساوي طاقته بعد القياس :

$$\varepsilon' - \varepsilon = 0$$

وتأخذ العلاقة (3.25) الشكل

$$\left|E' - E\right|\Delta t \simeq \hbar \qquad (3.25)'$$

وبالتالي فإن انحفاظ الطاقة غير محقق خلال فترات زمنية قصيرة جداً. وقد رأينا مثالاً على ذلك في مفعول النفق : إن انحفاظ الطاقة قانون تقريبي في المجال المجهري، صحيح بتقريب يساوي لـ $\frac{\hbar}{\Delta t}$.

## قياس الاندفاع الخطي

لنطبق هذه النتائج على قياس الاندفاع الخطي لتفهم المضمون الحقيقي لهذا القياس. ليكن P، E؛ P'، E' اندفاعي وطاقتي جسيم ما قبل وبعد اصطدامه بجسيم آخر معين بـ p، ε؛ p'، ε' قبل وبعد الاصطدام. لدينا إضافة إلى علاقة الانحفاظ (3.25) علاقة انحفاظ الاندفاع الخطي

$$\vec{P} + \vec{p} - \left(\vec{P}' + \vec{p}'\right) = 0 \qquad (3.26)$$

لنفترض أن أخطاء القياس على الجسيم الآخر معدومة كلياً : $\Delta p = \Delta p' = 0$ ؛ $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon' = 0$. يمكننا أن نتصور الجسيم الآخر جهاز قياس، مرآة مثلاً، يصطدم بها الجسيم الأول وينعكس عليها. تأخذ العلاقتان (3.25) و (3.26) عند تطبيقهما على الخطأ الواقع على مقادير الجسيم الأول الشكل التالي

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{P}' \qquad (3.26)'$$

و

$$\Delta E' - \Delta E \simeq \frac{\hbar}{\Delta t} \qquad (3.25)''$$

لدينا من جهة أخرى

$$\Delta E = \left(\vec{\nabla} E\right)_p \cdot \Delta\vec{P} = \vec{v} \cdot \Delta\vec{P}$$

حيث $(\vec{\nabla}E)_p$ هو غراديان E بالنسبة للاندفاع $\begin{pmatrix} \partial E/\partial P_x \\ \partial E/\partial P_y \\ \partial E/\partial P_z \end{pmatrix}$ و $\vec{v}$ سرعة الجسيم؛ مما يتيح لنا كتابة '(3.25)، آخذين بعين الاعتبار '(3.26)، على شكل ثلاث علاقات لاتحديد

$$(v'_i - v_i)\Delta P \simeq \frac{\hbar}{\Delta t} \qquad (3.27)$$

تبين هذه العلاقة أن قياس اندفاع الجسيم بدقة معينة، $\Delta P_i$، مرتبط بتغيرات سرعة الجسيم أثناء القياس والمتناسبة عكساً، مثلها مثل $\Delta P_i$، مع مدة القياس $\Delta t$. يلزم والحال هذه، للقيام بقياس دقيق للاندفاع - $\Delta P_i$ أصغر ما يمكن، ومعه $v'_i - v_i$ -، إطالة مدة القياس إلى أقصى حد ممكن، $\Delta t \to \infty$. إلا أن هذا اللزوم يفقد مفهوم قياس الاندفاع معناه ماعدا الحالة الخاصة التي يكون فيها ثابتاً، أي ماعدا حالة الجسيم الحر. وفي المقابل فإن اللادقة في القياس - $\Delta P_i$ كبيرة - مرتبط بقصر مدة القياس، $\Delta t \to 0$؛ نستنبط من ذلك استحالة قياس الاندفاعات في لحظات متقاربة جداً.

## عرض خط الطيف

لنطبق أخيراً نفس المحاكمة على تفكك الجسيمات تحت تأثير اضطراب ما. لتكن $E_o$ طاقة الجسيم المحسوبة قبل الاضطراب ولتكن $E'$ و $\varepsilon'$ طاقتي الجسيمين الناتجين عن التفكك، طاقة الجسيم ذاته بعد إصداره إشعاعاً طاقته $\varepsilon'$ على سبيل المثال. لدينا حسب (3.25)

$$|E_o - E' + \varepsilon'| \simeq \frac{\hbar}{\Delta t}$$

لنأخذ المدة $\Delta t$ مساوية لعمر الجسيم المتفكك ولنرمز لها بـ $\tau$ : إنها مقلوب احتمال التفكك في واحدة الزمن تعريفاً. لنركز اهتمامنا في هذه العلاقة على الطاقة $E_o$ : يستحيل تعيينها بدقة أكبر من $\frac{\hbar}{\tau}$. يطلق على هذا المقدار اسم عرض المستوى، عرض خط الطيف $\Gamma$. ونكتب

$$\Gamma \simeq \frac{\hbar}{\tau} \qquad (3.28)$$

## ملاحظة هامة

رأينا أن الفضاء الإقليدي هو الفضاء الذي ندرس فيه الميكانيك التقليدي، النيوتوني، والميكانيك الكمومي وأن خواص هذا الفضاء وخواص الزمن تحدد قوانين الانحفاظ في كلا النظريتين. فتجانس المكان يتضمن انحفاظ الاندفاع الخطي كدالة في النظرية الأولى وكمؤثر تبادلي مع الهاميلتوني في الثانية. وتجانس الزمان يتضمن انحفاظ الطاقة على نفس النحو في النظريتين. نعلم من جهة أخرى في دراسة النسبية الخاصة (I، الفصل السابع) أن للمكان-الزمان نفس الدور، بمعنى أن الزمان، الذي لم يعد وسيطاً، هو بُعْدٌ، مثله مثل الأبعاد المكانية الصرفة، في فضاء مينكوفسكي المعين بـ $(x^o, \vec{x})$ حيث $x^o = Ct$ وأن

حيث $(\bar{\nabla}E)_p$ هو غراديان E بالنسبة للاندفاع $\begin{pmatrix}\partial E/\partial P_x\\ \partial E/\partial P_y\\ \partial E/\partial P_z\end{pmatrix}$ و $\bar{v}$ سرعة الجسيم؛ مما يتيح لنا كتابة (3.25)'، آخذين بعين الاعتبار (3.26)'، على شكل ثلاث علاقات لاتحديد

$$(v_i' - v_i)\Delta P \simeq \frac{\hbar}{\Delta t} \qquad (3.27)$$

تبين هذه العلاقة أن قياس اندفاع الجسيم بدقة معينة، $\Delta P_i$، مرتبط بتغيرات سرعة الجسيم أثناء القياس والمتناسبة عكساً، مثلها مثل $\Delta P_i$، مع مدة القياس $\Delta t$. يلزم والحال هذه، للقيام بقياس دقيق للاندفاع – $\Delta P_i$ أصغر ما يمكن، ومعه $v_i' - v_i$ –، إطالة مدة القياس إلى أقصى حد ممكن، $\Delta t \to \infty$. إلا أن هذا اللزوم يفقد مفهوم قياس الاندفاع معناه ماعدا الحالة الخاصة التي يكون فيها ثابتاً، أي ماعدا حالة الجسيم الحر. وفي المقابل فإن اللادقة في القياس – $\Delta P_i$ كبيرة – مرتبط بقصر مدة القياس، $\Delta t \to 0$؛ نستنبط من ذلك استحالة قياس الاندفاعات في لحظات متقاربة جداً.

## عرض خط الطيف

لنطبق أخيراً نفس المحاكمة على تفكك الجسيمات تحت تأثير اضطراب ما. لتكن $E_o$ طاقة الجسيم المحسوبة قبل الاضطراب ولتكن 'E و 'ε طاقتي الجسيمين الناتجين عن التفكك، طاقة الجسيم ذاته بعد إصداره إشعاعاً طاقته 'ε على سبيل المثال. لدينا حسب (3.25)

$$|E_o - E' + \varepsilon'| \simeq \frac{\hbar}{\Delta t}$$

لنأخذ المدة $\Delta t$ مساوية لعمر الجسيم المتفكك ولنرمز لها بـ $\tau$ : إنها مقلوب احتمال التفكك في واحدة الزمن تعريفاً. لنركز اهتمامنا في هذه العلاقة على الطاقة $E_o$ : يستحيل تعيينها بدقة أكبر من $\frac{\hbar}{\tau}$. يطلق على هذا المقدار اسم عرض المستوى، عرض خط الطيف $\Gamma$. ونكتب

$$\Gamma \simeq \frac{\hbar}{\tau} \qquad (3.28)$$

## ملاحظة هامة

رأينا أن الفضاء الإقليدي هو الفضاء الذي ندرس فيه الميكانيك التقليدي، النيوتوني، والميكانيك الكمومي وأن خواص هذا الفضاء وخواص الزمن تحدد قوانين الانحفاظ في كلا النظريتين. فتجانس المكان يتضمن انحفاظ الاندفاع الخطي كدالة في النظرية الأولى وكمؤثر تبادلي مع الهاميلتوني في الثانية. وتجانس الزمان يتضمن انحفاظ الطاقة على نفس النحو في النظريتين. نعلم من جهة أخرى في دراسة النسبية الخاصة (I، الفصل السابع) أن للمكان–الزمان نفس الدور، بمعنى أن الزمان، الذي لم يعد وسيطاً، هو بُعْدٌ، مثله مثل الأبعاد المكانية الصرفة، في فضاء مينكوفسكي المعين بـ $(x^o, \bar{x})$ حيث $x^o = Ct$ وأن

صمود قوانين الفيزياء أمام الانسحابات الزمانية–المكانية يولد انحفاظ الطاقة–الاندفاع الخطي $\left(\frac{E}{C}, \vec{P}\right)$ أي المتجهة رباعية الأبعاد في فضاء لمينكوفسكي ثنوي الفضاء الأول $\left(x^o, \vec{x}\right)$. إن مولد الانسحابات الزمانية المكانية هو $\left(\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_o}, -\vec{\nabla}\right)$ ((I.7.(3.2)') ويقابله المؤثر $\left(i\hbar\frac{\partial}{C\partial t}, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right) = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$ كمؤثر للطاقة والاندفاع الخطي في التمثيل Q $\left(x^o, \vec{x}\right)$ للميكانيك الكمومي أو بعبارة أخرى فكما أن $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ هو العزم المرافق لـ $\vec{x}$ ويعرف العزم الخطي فإن $\hbar\frac{\partial}{C\partial t}$، هو العزم المرافق لـ $x^o$ الذي يعرف الهاميلتوني الكمومي $\frac{H}{C}$. وهذا ما رأيناه فعلاً في ((I.7.(3.7)) عندما بينا أن مشتق الفعل A بالنسبة لـ $x_o$ هو الهاميلتوني التقليدي $-\frac{H}{C}$. تخضع العزوم المترافقة لعلاقة المبادلة ((1.(3.5)). نتحقق فعلاً بتطبيق المبادل على دالة تابعة لـ $(t, \vec{x})$ أن

$$\left[x^o, i\hbar\frac{\partial}{C\partial t}\right] = \frac{\hbar}{i} \tag{3.29}$$

وهكذا فإن العلاقة '(3.25) هي علاقة اللاتحديد لهايزنبرغ بين العزمين المترافقين t و $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ على غرار العلاقة بين العزمين المترافقين x و $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

## 4. تطبيقات

### 1.4– مبدأ الميزر والليزر

لنعد إلى جزيء الأمونياك الذي درسناه في §2.2 ولنفترض أن الحقل الكهربائي تابع للزمن

$$H'(t) = -\bar{\mu}\bar{\varepsilon}(t)$$

ولنفترض إضافة إلي ذلك أن الحقل تابع دوري للزمن – وإلا لاستحال حل المعادلة (3.9) بواسطة دالات ابتدائية

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

يوجد الجزيء قبل الاضطراب في إحدى حالتين رمزنا لهما بـ $|I\rangle$ و $|II\rangle$ ولطاقتيهما بـ $E_o + A$ و $E_o - A$ على الترتيب، نرمز لتردد بور بين هذين المستويين بـ $\omega_o$

$$\omega_o = \omega_{I,II} = \frac{2A}{\hbar} = -\omega_{II,I} \tag{4.1}$$

ولدينا

$$H'_{I,II} = \mu\varepsilon$$

لنحسب السعتين $C_I^{(1)}$ و $C_{II}^{(1)}$ استناداً إلى (3.11) في جوار حالة الإرنان آخذين الحد الأول في (3.11) من أجل $C_I^{(1)}$ والحد الثاني من أجل $C_{II}^{(1)}$.

لدينا

$$C_I^{(1)} = -\frac{\mu\varepsilon_o\left(e^{i(\omega_{I,II}-\omega)t}-1\right)}{\hbar\left(\omega_{I,II}-\omega\right)} = -\frac{\mu\varepsilon_o\left(e^{i(\omega_o-\omega)t}-1\right)}{\hbar\left(\omega_o-\omega\right)} \qquad (4.2)_1$$

$$C_{II}^{(1)} = -\frac{\mu\varepsilon_o\left(e^{i(\omega_{II,I}+\omega)t}-1\right)}{\hbar\left(\omega_{II,I}+\omega\right)} = +\frac{\mu\varepsilon_o\left(e^{-i(\omega_o-\omega)t}-1\right)}{\hbar\left(\omega_o-\omega\right)} \qquad (4.2)_2$$

لنفترض أننا هيأنا الجزيء في الحالة I قبل إدخاله في تجويف يهتز فيه الحقل الكهربائي إن احتمال وصوله إلى الحالة II في اللحظة t هو حسب (3.17) – (3.19)

$$P_{I\to II} = \left|C_{II}^{(1)}(t)\right|^2 = \left(\frac{\mu\varepsilon_o t}{\hbar}\right)^2 \frac{\sin^2\frac{(\omega-\omega_o)}{2}t}{\left(\frac{(\omega-\omega_0)}{2}t\right)^2} \qquad (4.3)$$

حيث نجد صورة الانعراج $f(t,\omega)$.

أما عند الإرنان $\omega = \omega_o$ فلا تصلح العلاقتان $(4.2)_{1,2}$ ولذا نعود إلى معادلة شرودينغر (3.6) ونكتبها من أجل السعتين على الشكل

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{dC_I}{dt} = (H')_{I,II}\,C_{II}(t)e^{i\omega_o t} = \mu\varepsilon_o\left(e^{i(\omega+\omega_o)t} + e^{i(\omega_o-\omega)t}\right)C_{II} \\ i\hbar\dfrac{dC_{II}}{dt} = (H')_{II,I}\,C_I(t)e^{-i\omega_o t} = \mu\varepsilon_o\left(e^{-i(\omega+\omega_o)t} + e^{-i(\omega_o-\omega)t}\right)C_I \end{cases} \qquad (4.4)$$

ننظر إلى الحدين عاليي التردد، المقابلين لـ $(\omega+\omega_o)$، تتأرجح قيمة الحد $e^{i(\omega+\omega_o)t}$ حول القيمة 1 أن $\varepsilon_o$ يعني صغر سعة الحقل $C_I$ بحيث يمكن اعتبار جداء هذه القيمة بـ $\varepsilon_o$ الصغيرة مساوياً للصفر؛ يعني صغر سعة الحقل $\varepsilon_o$ أن $C_I$ و $C_{II}$ يتغيران ببطء. وتكتب (4.4) عندئذ على الشكل

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{dC_I}{dt} = \mu\varepsilon_o e^{i(\omega_o-\omega)t}C_{II} \\ i\hbar\dfrac{dC_{II}}{dt} = \mu\varepsilon_o e^{-i(\omega_o-\omega)t}C_I \end{cases} \qquad (4.5)$$

التي تأخذ شكلاً بسيطاً في حالة الإرنان $(\omega = \omega_o)$ : تستقل فيه السعتان عن بعضهما، ولدينا من أجل كل منهما

$$\frac{d^2C}{dt^2} = -\left(\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}\right)^2 C^2$$

ومنها إذا كتبنا الحل من أجل $C_I$ على الشكل

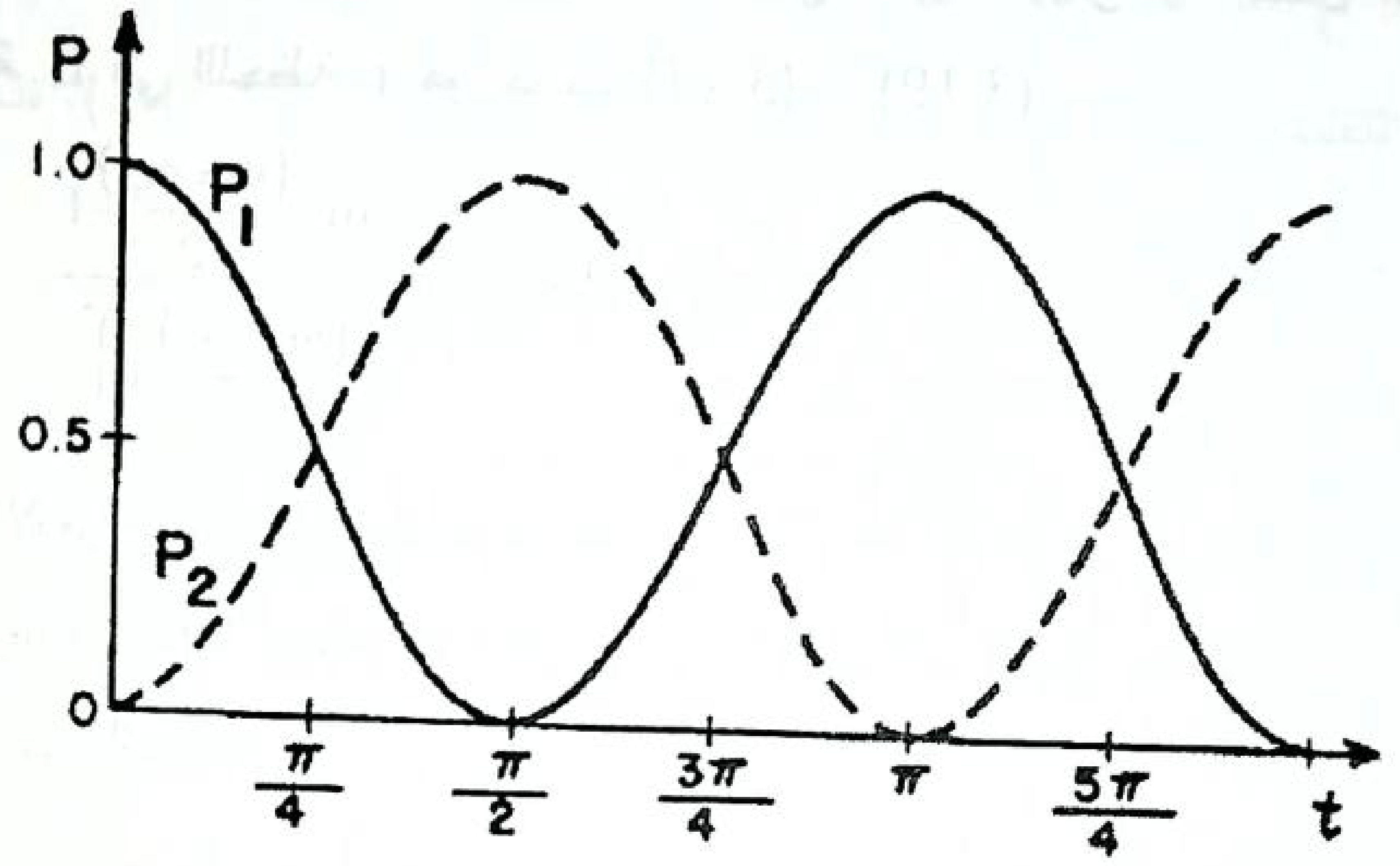
$$C_I = a\cos\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}t + b\sin\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}t \qquad (4.6)$$

فإن الحل من أجل $C_{II}$ بالرجوع إلى (4.5) هو

$$C_{II} = ib\cos\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}t - a\sin\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}t$$

تتعين قيما a و b بالشروط البدائية : افترضنا أن الجزيء هو في الحالة I في اللحظة $t = 0$؛ $a = 1$ و $b = 0$ والاحتمالان هنا، الشكل.7

$$\begin{cases} P_I = \cos^2\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}t \\ P_{II} = \sin^2\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}t \end{cases} \quad (4.7)$$




الشكل.7

حيث أخذنا t بوحدات تساوي $\frac{\mu\varepsilon_o}{\hbar}$.

لنفترض الآن أن سرعة حزمة الجزيئات الداخلة إلى تجويف الإرنان في الحالة I قد سويت مع عرض التجويف لتخرج منه في اللحظة المساوية $\frac{\pi\hbar}{2\mu\varepsilon_o}$، أي بحيث تخرج الحزمة من التجويف وهي في الحالة II وبحيث يتخلى كل جزيء عن طاقة تساوي لـ $E_I - E_{II} = 2A$ تغذي الحقل الكهربائي. وهذا هو مبدأ الميزر Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

تتيح الطاقة التي تتخلى الجزيئات عنها صيانة اهتزازات التجويف من جهة وإصدار حقل كهرطيسي خارجي آت من مضخم. لنلاحظ أن الليزر Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation هو ميزر يعمل في ترددات ضوئية : يتكون التجويف من مرآتين مستويتين تنتشر بينهما موجات مستقرة؛ وتخرج الموجات المضخمة من إحدى المرآتين – المرآة المشفة. ينعدم احتمال الانتقال من I إلى II في (4.3) في الحالة القريبة من الإرنان من أجل $\omega - \omega_o = \frac{2\pi}{t}$. لنفترض على سبيل المثال أن الزمن الذي يستغرقه اجتياز الحزمة للتجويف هو $10^{-3}$ ثانية وليكن التردد $\omega_o = \omega_{I,II}$

$\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 24.10^9$ دورة. ينعدم احتمال الانتقال من من I إلى II إذا حاد هذا التردد عن تردد الإرنان بنسبة

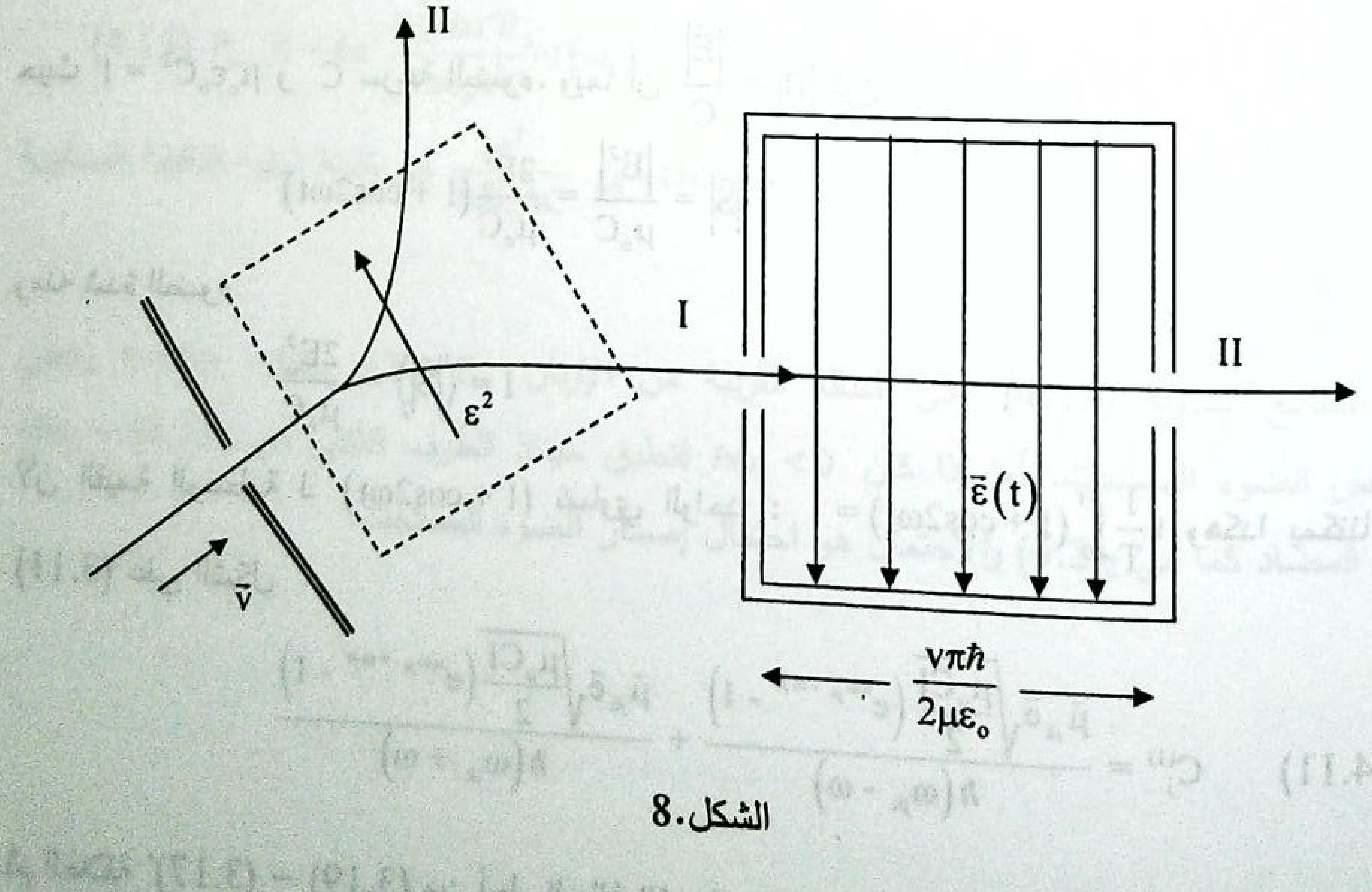
$$\frac{\nu - \nu_o}{\nu_o} = \frac{1}{\nu_o t} = 4{,}106.10^{-8}$$

إن هذا الحياد بنسبة $5.10^{-8}$ الذي يُعدم الانتقال كلياً هو منشأ الدقة الكبيرة في قياس الزمن في المقياتيات الذرية التي تعمل وفق مبدأ الميزر.

يبقى أن نذكر أن تحضير حزمة جزيئات في الحالة I يتم بإدخال حزمة جزيئات مزيج من الحالتين I و II في حقل كهربائي شديد مركبته العمودية على الحزمة تتغير بسرعة كبيرة. إن القوى المؤثرة على هذين النوعين من الجزيئات هي $\vec{\nabla}$- الطاقة المعطاة في (2.4) لكليهما التي نكتبها على الشكل

$$\begin{cases} E_{I,II} = E_o \pm \left(\frac{\mu^2\varepsilon^2}{2A} + A\right) \\ \vec{F}_{I,II} = -\vec{\nabla}E_{I,II} = \mp\frac{\mu^2}{2A}\vec{\nabla}\varepsilon^2 \end{cases} \quad (4.8)$$

تنعطف جزيئات النوع I في اتجاه معاكس لتزايد $\varepsilon^2$، نحو الأسفل على سبيل المثال، الشكل.8، في حين تتجه جزيئات النوع II نحو الأعلى. لنشر عابرين إلى أن القابلية الكهربائية النوعية Susceptibility للأمونياك عالية جداً نظراً لصغر قيمة A. وهكذا يمكن للجزيئات من النوع I – التي لم تتغير سرعتها لأن الانعطاف لا يؤثر على السرعة – أن تدخل حرة بهذه السرعة في التجويف حيث الحقل الكهربائي المتغير.




الشكل.8

## 2.4- إصدار وامتصاص الضوء المستحث Induced

لندرس من أجل إلكترون ما في الجزيء انتقاله من حالة إلى أخرى تحت تأثير اضطراب كهرطيسي متجانس ودوري، موجات مستوية مستقلة عن الوضع $\vec{E} = \vec{e}E_o\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$، حيث $\vec{e}$ المتجهة الواحدية في اتجاه انتشار الحقل الكهربائي و $E_o$ سعته الثابتة.

إن هاميلتوني الاضطراب هو

$$H' = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(t) \tag{4.9}$$

حيث $\vec{\mu}$ هو عزم ثنائي القطب الكهربائي للإلكترون، إنه تعريفاً

$$\vec{\mu} = -e\vec{r}$$

حيث $e$- شحنة الإلكترون و $\vec{r} = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ المتجهة التي تعين وضع الإلكترون بالنسبة لجملة محاور متعامدة مبدؤها مركز تناظر الجزيء على سبيل المثال. إن $\vec{r}$ مؤثر متجه في التمثيل $\vec{P}$، عناصر مصفوفة كل مركبة من مركباته

$$x^i_{jk} = \langle \psi_j | x^i | \psi_k \rangle \qquad i = 1, 2, 3$$

حيث $\psi_k$ و $\psi_j$ هما متجهتا الحالة البدائية والحالة النهائية؛ ونكتب في هذه الحالة

$$H'_{jk} = -\vec{\mu}_{jk}\vec{E} = -\vec{\mu}_{jk} \cdot \vec{E} = -\vec{\mu}_{jk}\vec{e}E_o\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \tag{4.10}$$

سنحسب هذه السعة بدليل تدفق الطاقة – متجهة بوينتينغ Poynting –

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

حيث $\mu_o\varepsilon_o C^2 = 1$ و $C$ سرعة الضوء. وبما أن $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{C}$ فإن

$$|\vec{S}| = \frac{|E^2|}{\mu_o C} = \frac{2E_o^2}{\mu_o C}(1 + \cos 2\omega t)$$

ومنه شدة الضوء

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{2E_o^2}{\mu_o C}$$

لأن القيمة الوسطية لـ $(1 + \cos 2\omega t)$ تساوي الواحد : $\frac{1}{T}\int_0^T (1 + \cos 2\omega t) = 1$؛ وهكذا يمكننا كتابة (3.11) على الشكل

$$C_j^{(1)} = \frac{\vec{\mu}_{jk}\vec{e}\sqrt{\frac{\mu_o CI}{2}}\left(e^{i(\omega_{jk} - \omega)t} - 1\right)}{\hbar\left(\omega_{jk} - \omega\right)} + \frac{\vec{\mu}_{jk}\vec{e}\sqrt{\frac{\mu_o CI}{2}}\left(e^{i(\omega_{jk} + \omega)t} - 1\right)}{\hbar\left(\omega_{jk} + \omega\right)} \tag{4.11}$$

ثم العلاقة '(3.17) – (3.19) من أجل الحالة القريبة من الإرنان على الشكل

$$P_{k\to j} = \frac{2\pi|\bar{\mu}_{jk}\bar{e}|^2 I}{2\pi\varepsilon_o C\hbar^2 2} t^2 \frac{\sin^2\frac{(\omega-\omega_o)t}{2}}{\left(\frac{(\omega-\omega_o)t}{2}\right)^2} \quad (4.12)$$

حيث سمينا $\omega_{jk} = \omega_o$.

وإن أردنا حساب احتمال الانتقال من أجل حزمة من الإشعاعات تتراوح تواتراتها بين $\omega_1$ و $\omega_2$ فنكتب

$$P_{k\to j} = 2\pi\frac{|\bar{\mu}_{jk}\bar{e}|^2}{4\pi\varepsilon_o C\hbar^2} t^2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \frac{\sin^2\frac{(\omega-\omega_o)t}{2}}{\left(\frac{(\omega-\omega_o)t}{2}\right)^2} d\omega \quad (4.12)'$$

تتغير شدة الضوء $I(\omega)$ ببطء بالنسبة لتغيرات الدالة $f(t,\Omega)$ في جوار الإرنان بحيث يمكن إعطاؤها قيمة وسطية هي قيمتها في حالة الإرنان $I(\omega_o)$ وإخراجها من التكامل، واستبدال حدي التكامل في الوقت ذاته بالمجال $[-\infty, +\infty]$ في حال احتواء المجال $[\omega_1, \omega_2]$ على $\omega_o$ مما يعطينا $\frac{2\pi}{t}$ نظراً لكون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

وهكذا فإن

$$P_{k\to j} = 4\pi^2 \frac{|\bar{\mu}_{jk}\bar{e}|^2}{4\pi\varepsilon_o \hbar^2 C} t\, I(\omega_o) \quad (4.12)''$$

إن احتمال الانتقال في واحدة الزمن ثابت ويمكننا كتابته بدليل الزاوية $\theta_{jk}$ التي يعملها مؤثر العزم $\bar{\mu}_{jk}$ مع اتجاه استقطاب الحقل الكهربائي $\bar{e}$

$$P_{k\to j}/t = 4\pi^2 \frac{\mu_{jk}^2 \cos^2\theta_{jk}}{4\pi\varepsilon_o \hbar^2 C} I(\omega_o) = \frac{4\pi^2}{\hbar}\left|\langle\psi_j|Z|\psi_k\rangle\right|^2 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o \hbar C} I(\omega_o) \quad (4.13)$$

حيث افترضنا استقطاب الحقل الكهربائي في الاتجاه $OZ$. إن $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o \hbar C}$ هي ثابتة البنية الدقيقة المساوية لـ $\frac{1}{137}$ والتي لا أبعاد لها.

تنطبق النتائج السابقة (4.13) على الحالة القريبة من الإرنان $0 < \hbar\omega_o = \hbar\omega_{jk} = E_j - E_k$ وتعني امتصاص الضوء المستحث. أما إذا كان $\hbar\omega_o < 0$ فنطبق حينئذ الطرف الثاني من (4.11) – حالة الإرنان المضاد كما في $(4.2)_2$ والاحتمال هو احتمال إصدار الضوء المستحث.

**ملاحظات :**

1- إن الحل الذي أعطيناه هنا هو حل نصف تقليدي بمعنى أننا لم نأخذ بعين الاعتبار تكميم الحقل الكهرطيسي، أي النظر إليه كمؤثر وليس مجرد دالة : يقوم التكميم، كما رأينا في الفصل الأول، على مقابلة كل مقدار فيزيائي – الطاقة على سبيل المثال المعبر عنها بمربع الحقل – بمؤثر. وهذا ما تفعله، فيما يخص الحقول، وعلى وجه التحديد الحقل الكهرطيسي، نظرية الحقول المكممة الخارجة عن إطار هذا الكتاب. يقع على عاتق هذه النظرية إعطاء نتائج أكثر دقة للامتصاص والإصدار المستحث وتفسير الإصدار العفوي للإشعاع الذي لا يمكننا تفسيره في الميكانيك الكمومي موضوع هذا الكتاب.

2- تصح الدراسة التي قمنا بها في حالة الأشعة الضوئية ولكنها لا تنطبق على حالة الإشعاعات الأخرى ذات أطوال الموجة القصيرة جداً كالأشعة السينية مثلاً. ذلك أننا لم نهتم في (4.10) بطور الحقل $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda}$ حيث $a$ فرق الطريق وهو بحدود $1\mathring{A}$ في الحالة التي تعنينا وهو مهمل في حالة أطوال الموجة الكبيرة – الأمواج الضوئية المساوية لعدة آلاف أنغسترومات. إلا أنه لا يمكن إهماله في حالة الأمواج التي أطوالها بحدود الأنغستروم، الأشعة السينية.

3- قامت كل الدراسة على افتراض الحقل الكهرطيسي على شكل أمواج مستوية، تابعة للزمن ولكنها مستقلة عن الوضع $\vec{r}$. هذا يعني أن الحقل $\vec{E}$ مشتق من كمون $\varphi(\vec{r})$ تعينه العلاقة

$$\varphi(r) = -\vec{E} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(r)$$

وهذا ما أتاح لنا كتابة طاقة الإلكترون في هذا الحقل على الشكل (4.9)

$$H' = -e\varphi = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}$$

أما إذا كانت الأمواج المستوية لا على التعيين : $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$، أو بعبارة أخرى إذا أخذنا فرق الطور بعين الاعتبار، فلابد من الرجوع إلى الصيغة العامة للهاميلتوني (2.19) وكتابتها من أجل إلكترون واحد على الشكل

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} + e\vec{A}(\vec{r}, t)\right]^2 + V(\vec{r}) + \mu_B\vec{\sigma}_e \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \tag{4.14}$$
$$= H_o + H'$$

حيث $H_o = \frac{P^2}{2m} + V(r)$ هو الهاميلتوني الحر للإلكترون في كمون $V$، قبل الإضطراب.

نعلم من الكهرطيسية أنه من الممكن دوماً تعريف الكمون المتجه $\vec{A}'$ بإضافة غراديان دالة $f(t, \vec{r})$ له، لأن هذه الإضافة لا تؤثر على قيمة الحقل المغنطيسي، بحيث يتحقق شرط لورانتس – الشرط الإضافي- بالكمون المتجه الجديد ونرمز له بـ $\vec{A}$ : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. يجب لذلك أن تحقق $f$ المعادلة

التفاضلية $\square^2 f = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{C^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right)$. اخترنا $\vec{A}$ في مناقشتنا لـ (2.19) بحيث يتحقق الشرط $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ المؤدي إلى $\left[\vec{P},\vec{A}\right]=0$. نختار $f$ بحيث ينعدم الكمون السلمي $U(t,\vec{r})$. يعني هذا الاختيار أولاً أن $\vec{A}$ عمودي على متجهة الموجه، على اتجاه الانتشار

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \tag{4.15}$$

وثانياً أن

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{4.16}$$

و $\vec{E}$ موازٍ لـ $\vec{A}$. نسمي هذا الاتجاه المشترك OZ ونكتب $\vec{A}$ على الشكل

$$\vec{A} = A_o\vec{e}_z e^{i(\omega t-ky)} + \overline{A}_o\vec{e}_z e^{-i(\omega t-ky)} \tag{4.17}$$

$$\vec{E} = -i\omega A_o\vec{e}_z e^{i(\omega t-ky)} + i\omega\overline{A}_o\vec{e}_z e^{-i(\omega t-ky)} \tag{4.16'}$$

أما $\vec{B}$ فهو في اتجاه OX $=0$

$$\vec{B} = \begin{cases}\partial A_z/\partial y\\ 0\\ 0\end{cases}$$

$$\vec{B} = -ikA_o\vec{e}_x e^{i(\omega t-ky)} + ik\overline{A}_o\vec{e}_x e^{-i(\omega t-ky)} \tag{4.18}$$

و

$$\left|\vec{B}\right| = k\left|\vec{A}\right| \tag{4.18'}$$

نهمل في (4.14) الحد بـ $A^2$ بحيث لا يبقى في هاميلتوني الاضطراب إلا

$$H' = e\cdot\frac{\vec{P}\cdot\vec{A}}{m} + \mu_B\vec{r}_e\cdot\vec{B}$$

إن نسبة هذين الحدين هي بالنظر إلى '(4.17)

$$\frac{\frac{e\hbar}{m}k|A|}{\frac{e|P||A|}{m}} = \frac{\hbar k}{P} << 1 \tag{4.19}$$

لأن $\frac{\hbar}{P}$ هي بحدود الأبعاد الذرية نظراً لعلاقة اللاتحديد لهايزنبرغ وتساوي تقريباً $a_o$ نصف قطر بور و $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ هي بحدود $\frac{1}{1000}$ من أجل الأمواج الضوئية والهيرتزية.

وهكذا لا يبقى في هاميلتوني الاضطراب إلا

$$H' = e\,\frac{\vec{P}\cdot\vec{A}}{m} \tag{4.20}$$

كتبنا في ((2.19).2) السرعة كمؤثر على الشكل

$$\vec{V}_r = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{i}{\hbar}[H,\vec{r}]$$

التفاضلية $\Box^2 f = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{C^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right)$. اخترنا $\vec{A}$ في مناقشتنا لـ (2.19) بحيث يتحقق الشرط $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ المؤدي إلى $\left[\vec{P}, \vec{A}\right] = 0$. نختار $f$ بحيث ينعدم الكمون السلمي $U(t, \vec{r})$. يعني هذا الاختيار أولاً أن $\vec{A}$ عمودي على متجهة الموجه، على اتجاه الانتشار

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.15)$$

وثانياً أن

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.16)$$

و $\vec{E}$ مواز لـ $\vec{A}$. نسمي هذا الاتجاه المشترك OZ ونكتب $\vec{A}$ على الشكل

$$\vec{A} = A_o \vec{e}_z e^{i(\omega t - ky)} + \bar{A}_o \vec{e}_z e^{-i(\omega t - ky)} \quad (4.17)$$

$$\vec{E} = -i\omega A_o \vec{e}_z e^{i(\omega t - ky)} + i\omega \bar{A}_o \vec{e}_z e^{-i(\omega t - ky)} \quad (4.16)'$$

أما $\vec{B}$ فهو في اتجاه OX

$$\vec{B} = \begin{cases} \partial A_z / \partial y \\ 0 \\ 0 \end{cases} = 0$$

$$\vec{B} = -ikA_o \vec{e}_x e^{i(\omega t - ky)} + ik\bar{A}_o \vec{e}_x e^{-i(\omega t - ky)} \quad (4.18)$$

و

$$\left|\vec{B}\right| = k\left|\vec{A}\right| \quad (4.18)'$$

نهمل في (4.14) الحد بـ $A^2$ بحيث لا يبقى في هاميلتوني الاضطراب إلا

$$H' = e \cdot \frac{\vec{P} \cdot \vec{A}}{m} + \mu_B \vec{r}_e \cdot \vec{B}$$

إن نسبة هذين الحدين هي بالنظر إلى '(4.17)

$$\frac{\frac{e\hbar}{m} k|A|}{\frac{e|P||A|}{m}} = \frac{\hbar k}{P} << 1 \quad (4.19)$$

لأن $\frac{\hbar}{P}$ هي بحدود الأبعاد الذرية نظراً لعلاقة اللاتحديد لهايزنبرغ وتساوي تقريباً $a_o$ نصف قطر بور و $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ هي بحدود $\frac{1}{1000}$ من أجل الأمواج الضوئية والهيرتزية.

وهكذا لا يبقى في هاميلتوني الاضطراب إلا

$$H' = e\,\frac{\vec{P} \cdot \vec{A}}{m} \quad (4.20)$$

كتبنا في ((2.19).2) السرعة كمؤثر على الشكل

$$\vec{V}_r = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{i}{\hbar}\left[H, \vec{r}\right]$$

أما H كمؤثر فهو $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$. لنفرض الآن أننا أهملنا تغير الطور، $\vec{r}$ ثابتة لا تتغير مع الزمن؛ يأخذ الهاميلتوني (4.20) الشكل

$$e\frac{i}{\hbar}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\vec{r}\right]\vec{A} = -e\vec{r}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

ونظراً لاختيار المعايرة (4.16)

$$H' = e\vec{r}\cdot\vec{E} = -\vec{\mu}\cdot\vec{E}$$

ويتطابق هاميلتوني الاضطراب (4.20) مع هاميلتوني الاضطراب المستقل عن الوضع (4.9).

# الفصل الخامس

## الإطار الرياضي

1- الفضاءات المتجهية المنظمة ........ 217

2- الفضاءات الهيلبرتية ........ 230

3- المؤثرات الخطية في ........ 247

4- التحلل (التفكيك) الطيفي ........ 257

5- نظرة سريعة على نظرية التوزيعات ........ 271

# الفصل الخامس: الإطــار الرياضــي

## 1. الفضاءات المتجهية المنظمة

### تمهيـد

إن ما نتوخاه في رسم هذا الإطار هو شرح بعض المفاهيم الرياضية وذكر بعض المبرهنات التي تعين القارئ على التعرف على الأسس الرياضية للميكانيك الكمومي. على التفاعل معها بانضباط ووعي وإزالة بعض من اللبس المحيط بها. تختلف هذه الأسس اختلافاً جوهرياً عن أسس الفيزياء التقليدية – الميكانيك التقليدي والترموديناميك والكهرطيسية – من حيث حاجتها إلى فضاءات متجهية غير منتهية وإلى مؤثرات فيها وإلى تكاملات – تكامل لوبيغ Lebesgue على سبيل المثال – مختلفة عن تكاملات ريمان أو ريمان ستيلتجيس المألوفة. كما أنها تشغل حيزاً هاماً مما يعرف في الرياضيات باسم التحليل الدالتي الذي لم يلق بعد في جامعاتنا الاهتمام الذي يستحقه. ونحن إن كنا لن ندخل في التفاصيل التي ستخرجنا بدون شك عن المبتغى من هذا الكتاب، من حيث محتواه العلمي الفيزيائي ومن حيث حجمه، فإننا نأمل أن تحقق الشروح التي سنقدمها الهدف المرجو وأن تثير فضول القارئ وتدفعه إلى الرجوع إلى الكتب المتخصصة في هذا الموضوع للكشف عن عمق الصلة التي تربط الفيزياء بلغتها الوحيدة الممكنة : الرياضيات.

### 1.1– الفضاءات المتريـة

إن منشأ مفاهيم الجوار والتقارب والالتصاق وغيرها وما ينتج عنها من تعريف للسعي إلى نهاية والاتصال والاشتقاق والمحدودية والتراص الخ من المفاهيم الطوبولوجية هو المستقيم الحقيقي حيث نعرف المسافة بين نقاطه ومن ثم المجالات المفتوحة والمغلقة بمعزل عن البنية الجبرية – بنية الحقل – التي يتمتع بها المستقيم ولذا فإننا سنذكر بالموضوعات التي تعرف الفضاء المتري وببعض خصائصه.

**تعريف 1 :**

نعرف الفضاء المتري بإعطاء مجموعة ما $E$ وبتطبيق لـ $E \times E$ في نصف المستقيم $R_+$ : $R_+ = \{\alpha \in R; \alpha \geq 0\}$ من المستقيم $R$ ، يقابل كل زوج $(x, y) \in E \times E$ بعدد نرمز له بـ $d(x, y) \geq 0$ نطلق عليه اسم المسافة بين $x$ و $y$ يحقق الموضوعات الثلاث التالية :

1- التناظر $d(x,y)=d(y,x)$.

2- الإيجابية $d(x,y)>0$ في حالة $x \neq y$ و $d(x,x)=0$

3- المتراجحة المثلثية $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

ينتج عن الموضوعتين (1 و 3) أن ضلع المثلث يساوي على الأقل الفرق بين الضلعين الآخرين.

لدينا مثلاً

$$-d(x,z) \leq d(x,y)-d(z,y) \leq d(x,z)$$

ومنه

$$|d(x,z)| \geq |d(x,y)-d(y,z)|$$

<u>أمثلة :</u>

1- إن المستقيم العددي والمستوي العقدي $R$ و $\mathbb{C}$ المزودين بالمسافة $d(x,y)=|x-y|$ هما فضاءان متريان وتسمى هذه المترية المترية الطبيعية على $R$ و $\mathbb{C}$.

2- نعرف النقاط $x$ في الفضاء $R^n$ بإعطاء الأعداد الحقيقية $x=(x^1,x^2...x^n)$ ونعرف مسافة عليه بالعلاقة

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2} \tag{1.1}$$

يمكن تعريف مسافة مماثلة على $\mathbb{C}^n$ بأخذ القيم المطلقة للأعداد العقدية $x^i-y^i$

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}|x^i-y^i|^2\right]^{1/2} \tag{1.1'}$$

كما يمكن تعريف مسافات مختلفة عن هاتين المسافتين. المهم هو أن تحقق المسافات المعرفة الموضوعات الثلاث أعلاه.

يعتمد برهان متراجحة المثلث من أجل (1.1) على برهان المتراجحة التالية المعروفة باسم متراجحة كوشي-شفارتز

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}b_i^2 \tag{1.2}$$

الناتجة عن المساواة التالية

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}b_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

المحققة من أجل $n=2$ والتي نتحقق من صحتها بالتكرار من أجل $n+1$. ننطلق من متراجحة كوشي-شفارتز للبرهان على المتراجحة

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

1- التناظر $d(x,y) = d(y,x)$.

2- الإيجابية $d(x,y) > 0$ في حالة $x \neq y$ و $d(x,x) = 0$

3- المتراجحة المثلثية $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

ينتج عن الموضوعتين (1 و (3 أن ضلع المثلث يساوي على الأقل الفرق بين الضلعين الآخرين. لدينا مثلاً

$$-d(x,z) \leq d(x,y) - d(z,y) \leq d(x,z)$$

ومنه

$$|d(x,z)| \geq |d(x,y) - d(y,z)|$$

**أمثلة :**

1- إن المستقيم العددي والمستوي العقدي $R$ و $\mathbb{C}$ المزودين بالمسافة $d(x,y) = |x-y|$ هما فضاءان متريان وتسمى هذه المترية المترية الطبيعية على $R$ و $\mathbb{C}$.

2- نعرف النقاط $x$ في الفضاء $R^n$ بإعطاء الأعداد الحقيقية $(x^1, x^2 ... x^n)$ $x =$ ونعرف مسافة عليه بالعلاقة

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2\right]^{1/2} \qquad (1.1)$$

يمكن تعريف مسافة مماثلة على $\mathbb{C}^n$ بأخذ القيم المطلقة للأعداد العقدية $x^i - y^i$

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^2\right]^{1/2} \qquad (1.1)'$$

كما يمكن تعريف مسافات مختلفة عن هاتين المسافتين. المهم هو أن تحقق المسافات المعرفة الموضوعات الثلاث أعلاه.

يعتمد برهان متراجحة المثلث من أجل (1.1) على برهان المتراجحة التالية المعروفة باسم متراجحة كوشي-شفارتز

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \qquad (1.2)$$

الناتجة عن المساواة التالية

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

المحققة من أجل $n = 2$ والتي نتحقق من صحتها بالتكرار من أجل $n+1$. ننطلق من متراجحة كوشي- شفارتز للبرهان على المتراجحة

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \qquad (1.3)$$

لدينا بالفعل حسب (1.2)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}$$

وهذا الطرف الأخير ليس سوى $\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}\right]^2$ و(1.3) صحيحة.

يكفي الآن أن نضع في (1,3) $y^i-x^i=a_i$ ، $z^i-y^i=b_i$ وبالتالي $z^i-x^i=a_i+b_i$ للتحقق من صحة متراجحة المثلث من أجل المسافة المعرفة بـ (1.1).

3- نرمز بـ $\ell_2$ للفضاء المتري ذي النقاط x، المعرفة بمتتاليات الأعداد الحقيقية أو العقدية $x=(x^1\ldots x^n\ldots)$ المحققة للعلاقة $\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^2<\infty$ (المتسلسلات المتقاربة)، وللمسافة

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|x^i-y^i|^2\right]^{1/2} \tag{1.4}$$

هذه المسافة معرفة من أجل أي متتاليتين $x=(x^1,x^2..x^n...)$ و $y=(y^1,y^2..y^n...)$ تنتميان إلى $\ell_2$ لأن $(x^i\pm y^i)^2\le 2\left(x^{i^2}+y^{i^2}\right)$ والمسافة منتهية.

وبصورة أعم، نعرف الفضاء المتري $\ell_p$ للمتتاليات الحقيقية $x=(x^1,x^2,...x^n...)$ المحققة للعلاقة $\sum_{i=1}^{n}|x^i|^p<\infty$ بالمسافة

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|x^i-y^i|^p\right]^{1/p} \tag{1.5}$$

إن $\ell_2$ حالة خاصة من هذا الفضاء $p=2$ و $\frac{1}{p}=1/2$

كما نعرف الفضاء المتري $L_p$ للدالات القيوسة المعرفة في المجال $[0,1]$ والمحققة للعلاقة

$$\int_0^1|x(t)|^p\,dt<\infty$$

بالمسافة

$$d(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \tag{1.6}$$

لنلاحظ أن $L_2$. $L_p$ المسمى بفضاء الدالات ذات المربع الجموع هو حالة خاصة من وهنا أيضاً فإن $L_2$ المسمى بفضاء الدالات ذات المربع الجموع هو حالة خاصة من $L_p$. لنلاحظ أن التكامل مأخوذ بمعنى تكامل لوبيغ، أي بتكامل دالات درجية –Step functions، en escalier– أي الدالات الثابتة في مجالات معينة – غير متناهية نحو الصفر – مع انقطاع (طفرة – قفزة) يكبر أو يصغر عند طرفي المجال وهي دالات غير قابلة للتكامل بالمعنى الريماني. إن دالات الاحتمال مثال على الدالات الدرجية. يشبه حساب تكاملها عملية جمع النقود عندما يقوم المحاسبون بوضع العملة من

نفس الفئة فوق بعضها، ثم ضرب ارتفاع العمود بقيمة القطعة – القياس – ثم الجمع على كل القياسات عوضاً عن الجمع قطعة فقطعة.

يبرهن أن مجموع الدالات الدرجية ذات الحامل المتراص – أي المساوية للصفر خارج مجال مغلق ومحدود من R – كثيفة في $L_2$ : تولد هذا الفضاء الذي يهمنا على وجه التحديد في الميكانيك الكمومي.

## 2.1– متراجحات مينكوفسكي وهولدر

تأخذ متراجحة المثلث في الفضاءات $L_p$ و $\ell_p$ شكلاً أعم من الشكل (1.3) وتسمى متراجحة مينكوفسكي

$$\sum_{i=1}^{n}\left[|a_i+b_i|^p\right]^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p} \quad (1.7)$$

هذا من أجل $\ell_p$ حيث $a_i$ و $b_i$ هما كما في (1.3) : $y^i - x^i = a_i$ ، $z^i - y^i = b_i$ ، $z^i - x^i = a_i + b_i$.

وبما أن المسافة معرفة فإن علاقة مينكوفسكي تبقى صحيحة من أجل $n \to \infty$. أما من أجل $L_p$ فيكفي تبديل علاقة الجمع في (1.7) بعلاقة تكامل

$$\left(\int|z(t)-x(t)|^p dt\right)^{1/p} \le \left(\int|z(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int|y(t)-x(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad (1.7)'$$

نبرهن هاتين المتراجحتين المعممتين لـ (1.3) انطلاقاً من متراجحة تعمم متراجحة كوشي–شفارتز (1.2) تعرف باسم متراجحة هولدر Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{1/q} \quad (1.8)$$

حيث كلا العددين الحقيقيين $p > 1$ ، $q > 1$ يحققان العلاقة

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

تنطبق (1.8) على متراجحة كوشي–شفارتز من أجل $p = q = 2$ (يقال عن p و q إنهما عددان مترافقان).

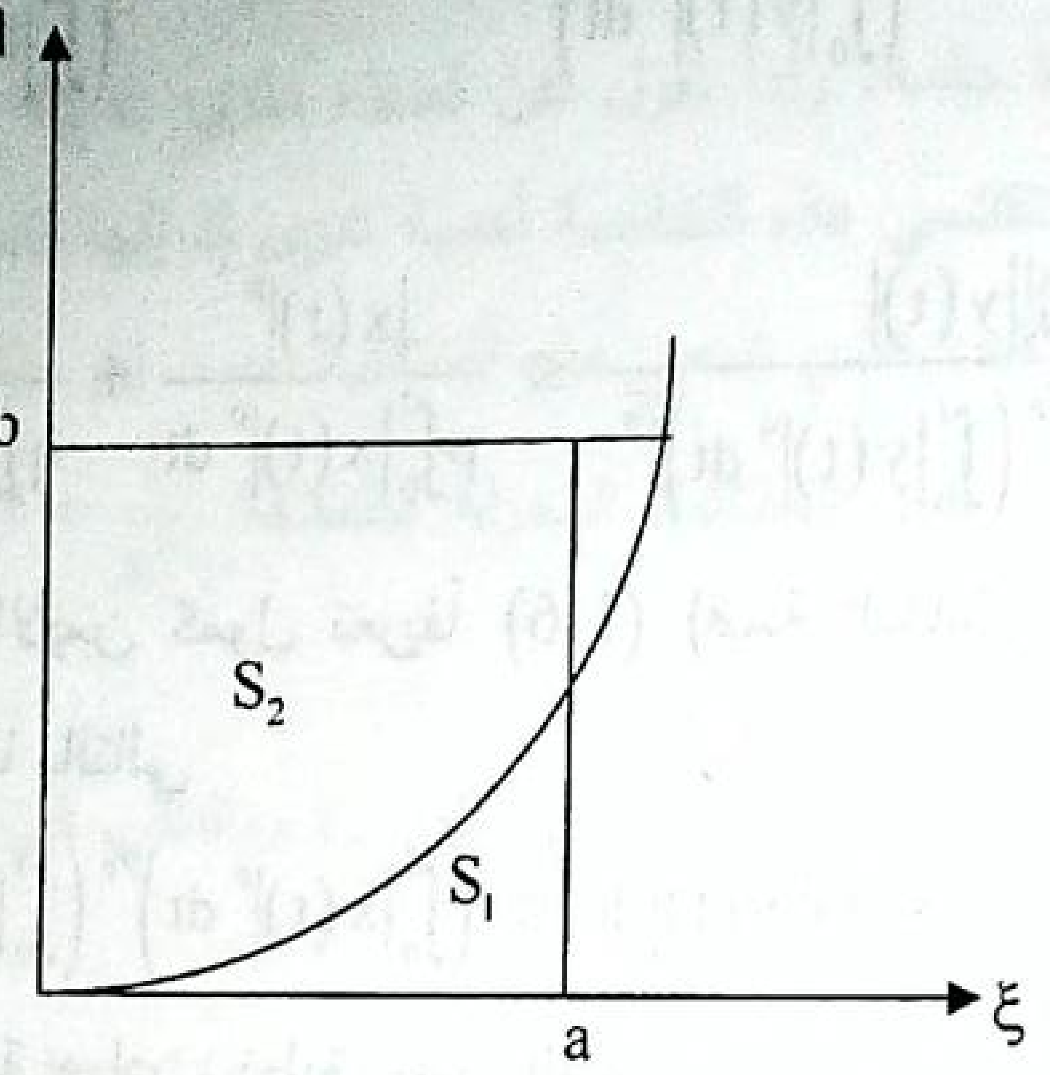
لنلاحظ أن هذه المتراجحة متجانسة بمعنى أنها إذا تحققت من أجل $a = (a_1 ... a_n)$ و $b = (b_1 ... b_n)$ فإنها محققة أيضاً من $\lambda a$ و $\mu b$ أياً كانت قيمة العددين $\lambda$ و $\mu$ ولذا يكفي البرهان عليها من أجل

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p = \sum_{i=1}^{n}|b_i|^q = 1 \quad (1.9)$$

أي أنه يكفي أن نبرهن أن

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \le 1 \qquad (1.8)'$$

نحصل على هذه النتيجة على النحو التالي : لنأخذ في المستوي $\eta$ و $\xi$ المنحني المعرف بالعلاقة $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$ أو بالعلاقة المطابقة $\xi = \eta^{q-1}$ لأن $(p-1)(q-1) = 1$. نرى من الشكل.1 أنه مهما كانت القيمة الموجبة لـ $a$ و $b$ فإن $S_1 + S_2 \ge ab$




الشكل.1

ولكن
$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}$$

و
$$S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}$$

ومنه
$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (1.10)$$

نبدل في هذه المتراجحة $a$ و $b$ بـ $|a_i|$ و $|b_i|$ ونجمع من أجل كل قيم $i \in [1, n]$ آخذين بعين الاعتبار (1.9) وعلاقة الترافق بين $p$ و $q$ لنتحقق من صحة العلاقة $(1.8)'$

لنكتب الآن مجموع الطرف الأيسر في (1.7) على الشكل

$$(1.11)\ \sum_{i=1}^{n}\left(|a_i| + |b_i|\right)^p = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(|a_i| + |b_i|\right)^{p-1}|a_i|\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\left(|a_i| + |b_i|\right)^{p-1}|b_i|\right)$$

ولنطبق متراجحة هولدر على كل حد من حدي الطرف الثاني حيث سنسمي $B_i = \left(|a_i| + |b_i|\right)^{p-1}$ آخذين بعين الاعتبار أن $(p-1)q = p$.

لنجد أن

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i| + |b_i|\right)^p \le \left[\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i| + |b_i|\right)^p\right]^{1/q}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}\right\}$$

وبتقسيم الطرفين على $\left[\sum_{i=1}^{n}(|a_i| + |b_i|)^p\right]^{1/q}$ نحصل على متراجحة مينكوفسكي (متراجحة المثلث من أجل $\ell_p$).

نكتب متراجحة هولدر (1.8) في $L_p$ انطلاقاً من (1.10) حيث

$$b = \frac{|y(t)|}{\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{1/q}} \quad ; \quad a = \frac{|x(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)^p| dt\right)^{1/p}}$$

لدينا من (1.10)

$$\frac{|x(t)||y(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{1/q}} \le \frac{|x(t)|^p}{p\int_0^1 |x(t)|^p dt} + \frac{|y(t)|^q}{q\int_0^1 |y(y)|^q dt}$$

إن كل حد من حدي الطرف الأيمن كمول تعريفاً (1.6) (قيمة التكامل تساوي 1). فالطرف الأيسر (الأصغر منه) كمول أيضاً ولدينا بالتالي

$$\int_0^1 |x(t)||y(t)|dt \le \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{1/q} \qquad (1.8)''$$

هذا هو الشكل التكاملي لمتراجحة هولدر. نطبق نفس المحاكمة التي استعملناها في (1.11) فنصل إلى (1.7)'.

## 3.1- التقارب في الفضاءات المترية، الفضاء المتري التام

نعرف انطلاقاً من مفهوم المسافة في الفضاءات المترية المجموعات المفتوحة، الكرات وهي مجموعة النقاط التي تبعد عن نقطة معينة مسافة أصغر أو تساوي r والسطح الكروي، المجموعات التي تبعد المسافة r عن نقطة ما والجوار والحدود. الخ. فنقول عن نقطة ما x في الفضاء المتري E إنها نقطة تراكم للمجموعة الجزئية A من E عندما يحتوي أي جوار لـ x عدداً غير منته من نقاط A. ليكن لدينا المتتالية ... $x_1, x_2 ... x_n$ ... من نقاط فضاء متري E، وليكن $O_\varepsilon(x)$ جوار للنقطة x يحتوى على الكرات ذات نصف القطر $r \le \varepsilon$. نقول إن المتتالية المذكورة تتقارب من x إذا احتوى كل جوار $O_\varepsilon(x)$ للنقطة x مجموعة النقاط $x_n$ من أجل $n \ge N_\varepsilon$ حيث $N_\varepsilon$ عدد مختار بدليل ε. ونقول إن x هي حد المتتالية $\{x_n\}$. أو بشكل آخر تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ من x عندما تتناهى المتتالية $d(x, x_1)$، $d(x, x_2)$ .. $d(x, x_n)$ نحو الصفر.

إن كل الفضاءات المترية انفصالية (séparé) (تحقق مبدأ هاوسدروف : أياً كانت النقطتان x, y من فضاء متري فإنه من الممكن إيجاد جوارين منفصلين $V_x$ و $V_y$ لهاتين النقطتين $V_x \cap V_y = \varnothing$).

وبالتالي فإن حد المتتالية $\{x_n\}$ وحيد.

وبتقسيم الطرفين على $\left[\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i| + |b_i|\right)^p\right]^{1/q}$ نحصل على متراجحة مينكوفسكي (متراجحة المثلث من أجل $\ell_p$).

نكتب متراجحة هولدر (1.8) في $L_p$ انطلاقاً من (1.10) حيث

$$b = \frac{|y(t)|}{\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{1/q}} \quad ; \quad a = \frac{|x(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)^p| dt\right)^{1/p}}$$

لدينا من (1.10)

$$\frac{|x(t)||y(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{1/q}} \leq \frac{|x(t)|^p}{p\int_0^1 |x(t)|^p dt} + \frac{|y(t)|^q}{q\int_0^1 |y(y)|^q dt}$$

إن كل حد من حدي الطرف الأيمن كمول تعريفاً (1.6) (قيمة التكامل تساوي 1). فالطرف الأيسر (الأصغر منه) كمول أيضاً ولدينا بالتالي

$$\int_0^1 |x(t)||y(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{1/q} \qquad (1.8)''$$

هذا هو الشكل التكاملي لمتراجحة هولدر. نطبق نفس المحاكمة التي استعملناها في (1.11) فنصل إلى (1.7)'.

## 3.1- التقارب في الفضاءات المترية، الفضاء المتري التام

نعرف انطلاقاً من مفهوم المسافة في الفضاءات المترية المجموعات المفتوحة، الكرات وهي مجموعة النقاط التي تبعد عن نقطة معينة مسافة أصغر أو تساوي $r$ والسطح الكروي، المجموعات التي تبعد المسافة $r$ عن نقطة ما والجوار والحدود. الخ. فنقول عن نقطة ما $x$ في الفضاء المتري $E$ إنها نقطة تراكم للمجموعة الجزئية $A$ من $E$ عندما يحتوي أي جوار لـ $x$ عدداً غير منته من نقاط $A$. ليكن لدينا المتتالية $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ من نقاط فضاء متري $E$، وليكن $O_\varepsilon(x)$ جوار للنقطة $x$ يحتوى على الكرات ذات نصف القطر $r \leq \varepsilon$. نقول إن المتتالية المذكورة تتقارب من $x$ إذا احتوى كل جوار $O_\varepsilon(x)$ للنقطة $x$ مجموعة النقاط $x_n$ من أجل $n \geq N_\varepsilon$ حيث $N_\varepsilon$ عدد مختار بدليل $\varepsilon$. ونقول إن $x$ هي حد المتتالية $\{x_n\}$. أو بشكل آخر تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ من $x$ عندما تتناهى المتتالية $d(x, x_1)$، $d(x, x_2)$ .. $d(x, x_n)$ نحو الصفر.

إن كل الفضاءات المترية انفصالية (séparé) (تحقق مبدأ هاوسدروف : أياً كانت النقطتان $x, y$ من فضاء متري فإنه من الممكن إيجاد جوارين منفصلين $V_x$ و $V_y$ لهاتين النقطتين $V_x \cap V_y = \varnothing$). وبالتالي فإن حد المتتالية $\{x_n\}$ وحيد.

إن كل متتالية متقاربة $\{x_n\}$ – حدها x – تحقق المعيار التالي المسمى معيار كوشي : يوجد، أياً كان $\varepsilon > 0$، عدد $p \in N$ بحيث يتحقق من أجل أي زوج من الأدلة $m, n \geq p$ الشرط $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.
إن $d(x_m, x) \leq r$، $d(x_n, x) \leq r$ تعريفاً وبالتالي فإن
$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) = 2r$. يكفينا إذاً أن نأخذ نصف الكرة r مساوياً لـ $\frac{1}{2}\varepsilon$. نقول عن المتتالية التي تحقق هذا الشرط إنها متتالية كوشية. وعلى العكس فإن الشرط $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ لا يضمن تقارب المتتالية بصورة عامة. ولذا نقول عن فضاء متري E إنه تام إذا كانت كل متتالية كوشية من عناصره متقاربة في E. تكتسي هذه الخاصة أهمية كبرى إذ إنها تتيح لنا معرفة ما إذا كانت متتالية ما متقاربة أم لا بدون معرفة الحد الذي تسعى هذه المتتالية نحوه. إن حقل الأعداد المنطقة Q ذا المترية $d(x, y) = |x - y|$ ليس تاماً. فحد المتتالية المعرفة بالعلاقة $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x^n}$ والكوشية في Q هو $\lim_{x\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ لا ينتمي إلى Q.
يبرهن أن لكل متتالية كوشية في $\ell_2$ حداً ينتمي إلى $\ell_2$ وبالتالي فإن الفضاء $\ell_2$ فضاء تام. وكذلك الأمر بالنسبة لـ $L_2$ : إنه فضاء تام.
نلاحظ أنه كما يتم ضم الأعداد الصماء إلى الأعداد المنطقة Q ليصبح المستقيم العددي R تاماً : كل متتالية كوشية في R متتالية متقاربة، فإنه من الممكن على الدوام كما فعل كانتور في حالة المستقيم غمس الفضاء المتري E في فضاء متري تام بحيث يكون E كثيفاً حيثما كان في الفضاء التام (everywhere dense) الذي نرمز له بـ $E^*$ : $\bar{E} = E^*$
وهذا الفضاء التام $E^*$ وحيد ومتقايس مع E أي أن المسافة بين نقطتين x و y لا على التعيين من E هي ذات المسافة.
وبين نظيرتيهما (نتيجة الغمس) X و Y في $E^*$

$$d(x, y) = d'(X, Y)$$

تسمى هذه العملية إتمام الفضاء المتري Completion.

## 4.1– الفضاءات المتجهية المنظمة (النظيمة) Normed

ليس لمفهوم النظيم ضرورة في الفضاءات التآلفية، الفضاء الفيزيائي بأبعاده الثلاثة أو الأربعة على سبيل المثال، لأن طويلة المتجهة معرفة بالمسافة بين نقطتين هما بداية ونهاية المتجهة في هذا الفضاء – بين حدثين في فضاء مينكوفسكي مثلاً – (انظر كتاب الميكانيك الفصل السابع). أما في الفضاءات المتجهية الأخرى فإننا بحاجة لهذا المفهوم في النظرية العامة للفضاءات المتجهية.

لنبدأ بإعطاء بعض التعريفات المتعلقة بمفهوم التحدب، انطلاقاً من مفهوم القطعة المستقيمة في الفضاء المتجهي $E$ على حقل الأعداد الحقيقية أو العقدية $K$. نسمي قطعة مستقيمة مغلقة ذات النهايتين $x$ و $y$ (العنصرين في $E$) مجموعة عناصر $E$ ذات الشكل

$$\alpha x + \beta y \tag{1.12}$$

$\alpha, \beta \geq 0$ و $\alpha + \beta = 1$.

ونسمي قطعة مفتوحة نفس مجموعة العناصر (1.12) مع $\alpha, \beta > 0$ و $\alpha + \beta = 1$. نكتب غالباً (1.12) على الشكل

$$x + \beta(y - x) \tag{1.12'}$$

ونقول عن مجموعة $M$ محتواة في $E$ إنها محدبة إذا احتوت بالإضافة إلى أي زوج من المتجهات $x, y \in M$، المستقيم $x + \beta(y - x)$. نعبر عن التحدب بقولنا إن تحول كل عنصر $x \in M$ بالتحاكي ذي المركز $x$ والنسبة $\beta$ حيث $0 < \beta < 1$ محتوى في $M$ أيضاً. نقول عن تطبيق عددي منته $f$ للمجموعة المحدبة $M \subset E$ إنه محدب (أو محدب تماماً) إذا كان لدينا من أجل أي متجهتين $x, y \in M$ مختلفتين عن بعضهما وأي عدد موجب $\alpha$، $0 < \alpha < 1$ المتراجحتان

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \tag{1.13}$$

أو (المحدب تماماً) أصغر قطعاً : $<$

نقول عن تطبيق $p$ للفضاء المتجهي $E$ في $\mathbb{C}$ إنه متجانس إذا حقق

$$p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \tag{1.14}$$

ونصف متجانس إذا حقق

$$p(x) = \bar{\alpha}\, p(x) \tag{1.14'}$$

حيث $\bar{\alpha}$ المرافق العقدي لـ $\alpha$.

أما إذا كان $E$ فضاء متجهياً على $R$ وكان $p$ تطبيقاً لـ $E$ في $R_+$ فإننا نقول إن $p$ متجانس بشكل موجب إذا حقق من أجل أي $x \in E$ و $0 \leq \alpha$ العلاقة

$$p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \tag{1.15}$$

إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التطبيق العددي المتجانس بشكل موجب محدباً هو تحقيق العلاقة، من أجل أي عنصرين $x, y \in M$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \tag{1.16}$$

الشرط لازم : يكفي أن نأخذ $\alpha = \frac{1}{2}$ في (1.13) ونأخذ الشرط (1.15) بعين الاعتبار

$$p\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \leq \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(y) = p\left(\frac{1}{2}x\right) + p\left(\frac{1}{2}y\right)$$

وعلى العكس فالشرط كافٍ لأن أخذ $\alpha x + (1 - \alpha)y$ في الطرف الأيسر من (1.16) يعطينا

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le p(\alpha x) + p((1-\alpha)y) = \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$$

**<u>تعريف 2</u> :**

نسمي نصف نظيم على الفضاء المتجهي $E$ المعرف على الحقل $K$ تطبيقاً $p$ لـ $E$ في $R_+$ يحقق الموضوعتين

i) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ (نصف التجانس)

ii) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ $p$ محدب لأن $p$ متجانس بشكل موجب

ينتج عن i) أن

$$p(x-y) = p(y-x) \qquad |\alpha| = 1 \qquad (1.17)$$

ولدينا كذلك $p(x) \le p(y) + p(x-y)$ حيث سمينا في ii) $X$ عوضاً عن $x+y$ ، $x = X - y$؛ وعلى نفس الشكل

$$p(y) \le p(x) + p(y-x)$$

من هاتين العلاقتين والعلاقة (1.17)

$$|p(x) - p(y)| \le p(x-y) \qquad (1.18)$$

**<u>تعريف 3</u> :**

نسمي نظيماً على $E$ نصف نظيم $p$ تقتضي فيه العلاقة $p(x) = 0$ أن يكون $x = 0$. ونرمز للنظيم بـ $\|x\|$.

لدينا إذاً من التعريف 2 ومن الشرط الجديد

1- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

2- $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ متراجحة المثلث

3- $\|x\| > 0$ من أجل $x \ne O$ و $\|O\| = 0$ حيث $O$ ترمز للمتجهة صفر.

نستخلص من 2) علاقة التحدب العامة

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \le \|x_1\| + \|x_2\| + \dots \|x_n\| \qquad (1.16)'$$

ونحصل على إشارة المساواة حسب 1) من أجل $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

أما العلاقة (1.18) فستكتب على الشكل

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\| \qquad (1.18)'$$

**تعريف 4 :**
نقول عن فضاء متجهي $E$ مزود بنظيم إنه فضاء منظم Normed.

إن الفضاء المتجهي المنظم هو فضاء متري حيث نعرف المسافة بين عنصرين (متجهتين) $x, y \in E$ بالعلاقة

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad (1.19)$$

تحقق هذه المسافة موضوعات المسافة المعطاة في التعريف 1 : التناظر (1.17) والإيجابية ومتراجحة المثلث. ولهذه المسافة خاصة إضافية إنها صامدة (منحفظة) بالانسحاب أي أن

$$d(x - a, y - a) = d(x, y) \qquad (1.20)$$

أما التحاكي ذو النسبة $\alpha$ فإنه يضرب المسافة بـ $|\alpha|$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y) \qquad (1.21)$$

وعلى العكس فإن كل مسافة معرفة على فضاء متجهي تتمتع بالخاصتين السابقتين هي بالضرورة مسافة معرفة انطلاقاً من نظيم هو

$$\|x\| = d(x, O) \qquad (1.22)$$

يبرهن بسهولة أن الكرات في الفضاء المتجهي المنظم هي مجموعات محدبة وأن التطبيق $(x, y) \rightarrow x + y$ لـ $E \times E$ في $E$ هو تطبيق متصل (مستمر) بانتظام أي أنه يحقق شرط ليبشيتس Lipschitz $d(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x')$ وكذلك التحاكي $x \rightarrow \lambda x$ فهو متصل بانتظام في $E$ وبالتالي فإن كل انسحاب $x \rightarrow a + x$ وكل تحاكٍ $x \rightarrow \lambda x$ هو تصاكل Homéomorphisme لـ $E$ على $E$ (التطبيق، والتطبيق العكسي كلاهما متصل).

يمكن تعريف عدة نظائم على فضاء متجهي ونقول عن نظيمين $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ إنهما متوائمان إذا تناهت أي متتالية $\{x_n\}$ كوشية بالنسبة إلى كل من النظيمين إلى نفس الحد $x$. أي أن تحقق الشرطين

$$\|x_n - x_m\|_1 \leq \varepsilon \qquad n, m \geq N$$

و

$$\|x_n - x_m\|_2 \leq \varepsilon$$

يؤدي إلى

$$\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \quad ; \quad \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$$

ويمكن بالتالي تزويد فضاء متجهي ما بفئة (عدودة) من النظائم المتوائمة زوجاً زوجاً ونقول إن الفضاء المتجهي نظيم عدودياً.

يطلق على الفضاءات المتجهية التامة والمنظمة اسم فضاءات باناخ Banach.

## 5.1- التطبيقات الخطية في الفضاءات المتجهية النظيمة

إن التطبيقات الخطية لفضاء متجهي نظيم E منتهي الأبعاد (n) في فضاء متجهي نظيم، F، تطبيقات متصلة بانتظام : ليكن u تطبيقاً خطياً وليكن x عنصراً من E ولنعرف النظيم فيه بالعلاقة $\|x\| = \max|x^i|$ . $1 \le i \le n$

لدينا
$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$$

و
$$\|u(x') - u(x'')\| = \left\|\sum_i (x'^i - x''^i)\, u(e_i)\right\| \le \sum_i \|u(e_i)\| \max|x'^i - x''^i|$$
$$\le K\|x' - x''\|$$

وبالتالي فإن شرط ليبشيتس محقق.

ليس الأمر كذلك في حال الفضاءات المتجهية لامتناهية الأبعاد. لدينا

**قضية 1 :**

إن التطبيق الخطي $u : E \to F$ المتصل من أجل $O \in E$ متصل في كل مكان بل ومتصل بانتظام.

إن الشرط اللازم والكافي لتحقيق ذلك هو وجود ثابتة $k \ge 0$ بحيث يكون

$$\|u(x)\| \le k\|x\| \qquad (1.23)$$

وفي الواقع ينتج عن الاتصال في النقطة O وجود ثابتة $\eta > 0$ بحيث يؤدي $\|x\| \le \eta$ إلى $\|u(x)\| \le 1$. وبالتالي فأياً كان التحاكي المعين بالنسبة $\lambda$ فإن

$$\|u(\lambda x)\| = |\lambda|\|u(x)\| \le |\lambda|$$

هذه العلاقة صحيحة إذاً من أجل أي متجهة $x' = \lambda x$ ، نظيمها $\|x'\| \le |\lambda|\eta$ : يكفي أن نأخذ $\lambda = \frac{\|x'\|}{\eta}$ و $k = \frac{1}{\eta}$ حتى تتحقق (1.23) من أجل أي $x'$ وبالتالي فإن

$$\|u(x') - u(x'')\| = \|u(x' - x'')\| \le k\|x' - x''\|$$

وهذا هو شرط ليبشيتس لتحقق الاتصال بانتظام.

**لازمة :**

إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون للتطبيق المتصل u تطبيق عكسي $u^{-1}$ هو وجود ثابتة $\gamma > 0$ تحقق الشرط

$$\|u(x)\| \ge \gamma\|x\| \qquad (1.23)'$$

لدينا من (1.23) كشرط لازم وكاف لـ $u^{-1}$ : $u^{-1}(y) = x$

$$\|u^{-1}(y)\| \le k\|y\|$$

$$\|x\| \le k\|u(x)\| \quad \text{و} \quad \gamma = \frac{1}{k}$$

**مثال :**

إن الفضاء المتري $\ell_p$ الذي عرفناه بالعلاقة (1.5) هو فضاء متجهي منظم نعرف النظيم بالعلاقة (1.22) وبالتالي بـ

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^p\right)^{1/p} \qquad (1.24)$$

يبرهن أنه فضاء تام، فهو إذاً فضاء باناخي. لننظر إلى التطبيق الخطي لـ $\ell_p$ في $\ell_q$، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$،

المعرف بالمصفوفة غير المنتهية $a^i_j$ المحققة للعلاقة

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a^i_j|^q = k < \infty$$

$$y^i = a^i_j\, x^j = \sum_{j=1}^{\infty} a^i_j x^j \qquad (1.25)$$

لنحسب نظيم $y$ المعرف بـ (1.24) ( $q$ عوضاً عن $p$ ) مستعينين بمتراجحة هولدر (1.8)

لدينا

$$\sum_{i=1}^{N}|y^i|^q = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a^i_j x^j|\right)^q \le \sum_{i=1}^{N}\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a^i_j|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x^j|^p\right)^{1/p}\right\}^q$$

إن الطرف الأيمن في هذه المتراجحة هو

$$\|x\|^q \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}|a^i_j|^q$$

والمتراجحة صحيحة أياً كان العدد $N$ ولذا يمكننا أن نكتب عندما يسعى $N$ نحو $\infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|y^i|^q \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a^i_j|^q\right)\|x\|^q$$

وبالتالي

$$\|u(x)\| = \|y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y^i|^q\right)^{1/q} \le \|x\| k^{1/q}$$

يحقق هذا التطبيق معيار الاتصال (الاستمرار) (1.23)؛ إنه تطبيق لـ $\ell_2$ في $\ell_2$ عندما يتساوى $p$ و $q$ : $p = q = 2$.

**تعريف 5 :**

نسمي نظيماً للتطبيق الخطي $u: E \to F$، حيث $E$ و $F$ فضاءان متجهيان منظمان الحد الأدنى من الأعداد $k$ التي تحقق الشرط (1.23)، التي تكتب الآن

$$\|u(x)\| \le \|u\| \cdot \|x\| \qquad (1.26)$$

أي أن $\|u\|$ هو الحد الأقصى للمقدار $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ ونكتب

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}}\|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1}\|u(x)\| \qquad (1.27)$$

تنتج علاقة التساوي الثانية من كون $\|u(x)\| \le \|u\| \cdot \|x\| \le \|u\|$ من أجل $\|x\| \le 1$ أي $\sup_{\|x\|\le 1}\|u(x)\| \le \|u\|$؛ هذا من جهة؛ يوجد من جهة أخرى، حسب تعريفنا لـ $\|u\|$ كحد أدنى في (1.26)، متجهة $x_o$ تحقق $\|u(x_o)\| \ge (\|u\| - \varepsilon)\|x_o\|$ من أجل أي مقدار $\varepsilon > 0$. لنأخذ $x_1 = \frac{x_o}{\|x_o\|}$ لدينا إذاً

$$\|u(x_1)\| \ge \|u\| - \varepsilon \qquad \text{من أجل } \|x_1\| = 1$$

وبالتالي فإن $\sup_{\|x\|\le 1}\|u(x)\| \ge \|u(x_1)\| \ge \|u\| - \varepsilon$ ومنه علاقة التساوي الثانية التي نكتبها بفضل هذه العلاقة مع $u(x_1)$ على الشكل

$$\sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|$$

**قضية 2 :**

تشكل مجموعة التطبيقات الخطية المتصلة $u: E \to F$، حيث $E$ و $F$ فضاءان منظمان، فضاء خطياً منظماً نظيمه معرف بالعلاقة (1.27) نرمز لهذه المجموعة بـ $\mathscr{L}(E; F)$. واضح أن جمع التطبيقات الخطية وضربها بعدد يجعل منها فضاءً متجهياً. يجب أن نبرهن أن $u_1 + u_2$ حيث $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E; F)$ تطبيق متصل

$$\|(u_1 + u_2)(x)\| = \|u_1(x) + u_2(x)\| \le \|u_1(x)\| + \|u_2(x)\| \le (\|u_1\| + \|u_2\|)\|x\|$$

تنتج المتراجحة الأخيرة من (1.26) وبالتالي فإن $u_1 + u_2$ تحقق الشرط (1.23). ولدينا حسب (1.27)

$$\|u_1 + u_2\| = \sup_{\|x\|=1}\|(u_1 + u_2)(x)\| \le \|u_1\| + \|u_2\|$$

نبرهن بنفس الشكل أن $\lambda u$ متصل وأن

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$$

نسمي الفضاء المتجهي المنظم $\mathscr{L}(E; K)$ المكون من الأشكال الخطية المتصلة الفضاء الثنوي لـ $E$ ونرمز له بـ $E'$. ينطبق هذا الفضاء على الثنوي الجبري عندما تكون أبعاد $E$ منتهية (كل التطبيقات

الخطية متصلة) ويوجد تشاكل تقابلي بين الفضائين. لكن هذا الأمر غير صحيح من أجل E لا نهائي الأبعاد لأن $E'$ لا يحتوي على الأشكال الخطية غير المتصلة.

## 2. الفضاءات الهيلبرتية

### 1.2- الشكل الهرميتي Hermitian form

**تعريف 6 :**

يسمى التطبيق $f : E \times E \to K$، حيث E فضاء متهجي و K حقل الأعداد العقدية، الذي يحقق الشروط التالية شكلاً هرميتياً

I $\quad f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$

II $\quad f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$

III $\quad f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$

IV $\quad f(\lambda x, y) = \bar{\lambda} f(x, y)$

V $\quad f(x, y) = \overline{f(y, x)}$

حيث – تشير إلى العدد العقدي المرافق.

لنلاحظ أن الخاصتين II و IV ناتجتان من الخواص الأخرى : II من I و V؛ IV من III و V. ينتج عن V أن $f(x, x)$ حقيقي. تعبر الشروط (I) – IV عن خطية الشكل بالنسبة لأحد المتغيرين، y، وعن الخطية المضادة بالنسبة للمتغير x. ولذا نقول إن f خطية مرة ونصف مرة Sesqui linear (ثلاثة أنصاف الخطية). أما عندما يكون E فضاءً حقيقياً $(K = R)$ فإن الخصائص I – IV تعني أن التطبيق خطي بالنسبة للمتغيرين وتعني V : $f(x, y) = f(y, x)$ أن f متناظر.

**تعريف 7 :**

نقول عن متجهتين $x, y \in E$ إنهما متعامدتان بالنسبة إلى الشكل الهرميتي f على E إذا كان $f(x, y) = 0$. ونقول عن متجهة عمودية على نفسها إنها متناحية $f(x, x) = 0$ ونقول عن الشكل الهرميتي إنه متدنٍ إذا وجدت في E متجهة $a \neq O$ عمودية على كل الفضاء E.

**قضية 3 :**

يتعين الشكل الهرميتي تماماً انطلاقاً من قيمه على القطر $E \times E$. ذلك أن

$$4f(x, y) = f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y) - if(x + iy, x + iy) + if(x - iy, x - iy) \qquad (2.1)$$

التي تكتب من أجل $K = R$

$$4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) \qquad (2.1)'$$

**قضية 4 :**

إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون شكل خطي ونصف هرميتياً هو أن يكون $f(x, x)$ من أجل كل $x$ حقيقياً.

الشرط لازم طبعاً حسب V. يكفينا إذاً أن نتحقق من V لنبرهن العكس؛ الشروط الأخرى هي شروط الخطية ونصف الخطية. لنحسب $f(y, x)$ حسب (2.1) ولنلاحظ أن $y \mp ix = \mp i(x \pm iy)$ الذي سيغير إشارة $\mp i$ في (2.1) إلى $\pm i$ وبالتالي

$$f(y, x) = \overline{f(x, y)}$$

وهو المطلوب.

**قضية 5 :**

نقول عن شكل هرميتي على فضاء متجهي E إنه موجب إذا كان $f(x, x) \geq 0$ أياً كان $x \in E$. يحقق الشكل في هذه الحالة متراجحة كوشي–شفارتز من أجل أي $x, y \in E$

$$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x)f(y, y) \qquad (2.2)$$

إن الإيجابية المفترضة تعني من أجل أي عدد سلمي $\lambda \in K$.

$$a)\ 0 \leq f(x+\lambda y, x+\lambda y) = f(x, x) + \lambda f(x, y) + \overline{\lambda} f(y, x) + |\lambda|^2 f(y, y)$$
$$= f(x, x) + 2\mathrm{Re}\lambda f(x, y) + |\lambda|^2 f(y, y)$$

وهذا الطرف الأخير ثلاثي الحد من الدرجة الثانية بـ $|\lambda|$؛ يجب كي يبقى موجباً أن يكون مميزه سالباً :

$$b)\ |f(x, y)|^2 - f(x, x)f(y, y) \leq 0$$

ومنه (2.2)

هذا المميز سالب تماماً عندما يكون الشكل غير متدنٍ $(f(x, x) > 0)$ نختار $\lambda$ بحيث يكون $x + \lambda y \neq 0$؛ تختفي بالتالي إشارة التساوي في علاقتي التراجح a) و b) أعلاه.

**لازمة 1 :**

ينتج عن (2.2) أن الفضاء الجزئي المكون من المتجهات المتناحية $x$، $f(x, x) = 0$ و ( f موجب) ينطبق على الفضاء الجزئي العمودي على كل متجهة $y \in E$.

**لازمة 2 :** إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون الشكل الهرميتي الموجب $f$ غير متدن هو أن تكون المتجهة $O$ هي المتجهة الوحيدة المتناحية أي أن يكون $f(x, x) > 0$ من أجل كل $x \in E$ ، $x \neq O$. إن $|f(x, y)|^2 < f(x, x)f(y, y)$ من أجل الشكل الهرميتي غير المتدني فلو وجدت متجهة متناحية $x$، $f(x, x) = 0$ وفي الوقت نفسه $x$ عمودية على كل متجهة $y \in E$ حسب اللازمة السابقة لحصلنا على العلاقة المتناقضة $0 < 0$.

**قضية 6 :** يعين الشكل الهرميتي الموجب وغير المتدني نظيماً على الفضاء المتجهي $E$. نرمز للشكل الهرميتي بـ

$$f(x, y) = \langle x|y\rangle$$

ونقول عن قيمة التطبيق إنها الجداء السلمي لـ $y$ بـ $x$.

نعرف النظيم بالعلاقة

$$\|x\| = \langle x|x\rangle^{1/2}$$

تبين الموضوعات III و IV أن $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛ يعني عدم التدني أن $\|x\| > 0$ من أجل $x \neq O$.

نستخلص متراجحة المثلث (متراجحة مينكوفسكي)، كالمعتاد، من متراجحة كوشي-شفارتز

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (2.3)$$

لدينا $\|x + y\|^2 = \langle x + y|x + y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x|y\rangle$

لكن $\mathrm{Re}\langle x|y\rangle$ أصغر من $|\langle x|y\rangle|$ أي أصغر من $\|x\| \cdot \|y\|$ ومنه

$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ وهو المطلوب

**ملاحظة :**

ترينا متراجحة كوشي-شفارتز (2.3) أن الجداء السلمي $u_x(y) = \langle x|y\rangle$ هو شكل خطي متصل (مستمر) لـ $E$ في $K$، نظيمه حسب (1.26) أصغر أو يساوي الواحد ولكنه يساوي الواحد على وجه الدقة لأن

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \quad \text{و} \quad \frac{\|u_x(x)\|}{\|x\|} = 1 \text{ حسب } (1.27)$$

## 2.2- الفضاءات قبل الهيلبرتية والهيلبرتية

**تعريف 8 :**

نسمي المجموعة $E$ المزودة ببنية فضاء متجهي على الحقل $K$ وبشكل هرميتي موجب فضاء قبل هيلبرتي. نقول عن فضاء قبل هيلبرتي إنه فضاء هيلبرتي إذا كان انفصالياً وتاماً.

**ملاحظات :**

1- لا يعرف الشكل الهرميتي الموجب – الجداء السلمي – نظيماً على الفضاء قبل الهيلبرتي وإنما نصف نظيم : توجد متجهات $x$ تحقق $\|x\| = \langle x|x\rangle = f(x,x) = 0$ بدون أن يكون $x = O$.

2- إلا أنه من السهل الانتقال من الفضاء $E$ حيث الشكل الهرميتي متدني إلى فضاء آخر حيث الشكل غير متدنٍ (ونقول إنه معرف موجب) وذلك باعتبار فضاء الصفوف $E/N$ حيث $N$ الفضاء المتجهي الجزئي للعناصر $x \in N$ التي تحقق العلاقة $f(x,y) = 0$ أياً كانت $y \in E$. إن الشكل الهرميتي مُعرف موجب في الفضاء المتجهي الخارج $E/N$. يصبح نصف النظيم المعرف على الفضاء قبل الهرميتي $E$ نظيماً على الفضاء المتجهي الخارج $E/N$. يعين هذا النظيم مترية على $E/N$ ويصبح الفضاء انفصالياً بالضرورة. وهكذا فإن الشكل الهرميتي غير المتدني يعني حتماً خاصة الانفصالية.

3- وعلى العكس فإن تزويد فضاء انفصالي بشكل هرميتي موجب يعني كون هذا الشكل معرفاً موجباً (غير متدنٍ) : نعلم أن نصف النظيم $p(x)$ يعرف الكرات المفتوحة؛ لتكن $B_o(\varepsilon)$ الكرة المفتوحة التي مركزها المتجهة $O$ وشعاعها $\varepsilon$. فإذا كان $p(x) = 0$ و $x \neq O$ فإن $x \in B_o(\varepsilon)$ مهما كان الشعاع $\varepsilon$ صغيراً. وبالتالي فإنه من المستحيل وجود جوارين منفصلين للمتجهتين $O$ و $x$ وهذا ما يناقض فرض الانفصال ومنه $p(x) = 0$ ، $x = O$ والشكل الهرميتي معرف موجب. وهكذا فالانفاصلية ووجود شكل هيرميتي موجب تكافئ وجود شكل هرميتي غير متدن أي :

4- نضع الشطر الثاني من التعريف 8 على الشكل التالي.

نقول عن فضاء قبل هيلبرتي إنه هيلبرتي إذا كان الشكل الهرميتي معرفاً موجباً (غير متدن) وكان الفضاء تاماً.

إنه إذاً فضاء منظم فهو متري وانفصالي؛ وتام : تتقارب أي متتالية كوشية من عناصره نحو عنصر فيه وهو عنصر وحيد.

5- إن الفضاءات المتجهية الجزئية ليست مغلقة بالضرورة عندما تكون أبعاد الفضاء غير منتهية (الفضاءات الهيلبرتية) خلافاً لما هو عليه الحال في الفضاءات المتجهية ذات الأبعاد المنتهية، حيث التطبيقات الخطية متصلة. ولذا فلن نطلق اسم فضاء متجهي جزئي إلا على الفضاءات المتجهية الجزئية المغلقة.

**تعريف 9 :**

نقول عن فضاء متري (هيلبرتي) إنه فصول[1] إذا احتوى على فضاء جزئي عدود وكثيف حيثما كان.

نرمز من الآن فصاعداً إلى الفضاء الهيلبرتي بـ $\mathscr{H}$، للفضاء الجزئي الكثيف حيثما كان بـ A. لدينا تعريفاً $\bar{A} = \mathscr{H}$، حيث $\bar{A}$ تعني المجموعة المغلقة؛ لنذكر أننا نقصد بعدودة المجموعة المكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية N (يمكن ترقيم عناصرها من 1 إلى ∞). لنلاحظ أننا لم نستعمل في هذا التعريف إلا خاصة المترية للفضاء المتجهي. لدينا عندما يتعلق الأمر بالبنية الجبرية للفضاء المتجهي التعريف التالي :

**تعريف 10 :**

نقول عن جماعة $A \subset \mathscr{H}$ إنها تامة Total إذا كان الفضاء الجزئي المغلق الذي تولده A منطبقاً على $\mathscr{H}$. أو بعبارة أخرى إذا كانت مجموعة التوافقات الخطية لعناصر A كثيفة حيثما كان.

إن الجماعة المؤلفة من وحيدات الحدود $1$، $t$، $t^2$ ... $t^n$.. جماعة تامة في فضاء الدالات الحقيقية المتصلة على مجال مغلق $[a, b]$ (مبرهنة فايرشتراس Weierstrass).

## 3.2– الفضاء الهيلبرتي $\ell_2$

لنركز انتباهنا من بين الفضاءات $\ell_p$ التي عرفناها في (1.5) وعرفنا نظيمها في (1.24) على $p = 2$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^2\right)^{1/2} \quad (2.4)$$

يكفينا إذاً أن نعرف هذا النظيم انطلاقاً من شكل هرميتي موجب غير متدن، من جداء سلمي، نكتبه على الشكل

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\bar{x}^i y^i \quad (2.5)$$

يحقق شروط التعريف 6. ونقول عن متجهتين إنهما متعامدتان إذا كان جداؤهما السلمي يساوي الصفر. أشرنا إلى أن $\ell_2$ فضاء تام. لن ندخل في تفاصيل البرهان كي لا نبتعد كثيراً عما نهدف إليه في هذا الإطار. يبرهن بسهولة أنه إذا كانت $\{x\}^{(n)} = \left(x^{1(n)} \dots x^{i(n)} \dots\right)$. $n = 1, 2 \dots n \dots N$ متتالية كوشية في $\ell_2$ فإن كل مركبة $\left(x^i\right)^n$ تشكل متتالية كوشية في $\mathbb{C}$ وبالتالي متقاربة في $\mathbb{C}$ إلى $x^i$. نضع $x = x^1 \dots x^n \dots$ ونبرهن في النهاية أن $\{x\}^n$ متقاربة إلى x و $x \in \ell_2$. وهكذا فإن $\ell_2$ فضاء هيلبرتي من النوع العدود.

---

[1] هذه التسمية Separable مدعاة للبس بين وجود مجموعة جزئية كثيفة حيثما كانت : $(\bar{A} = E)$ ومبدأ هاوسدورف – وجود جوارين منفصلين لنقطتين لا على التعيين $(V_x \cap V_y = \varnothing)$ – Séparé. لذا نفضل استعمال التسمية المكافئة : من النوع العدود عوضاً عن فصول عندما يتعلق الأمر بالفضاءات الهيلبرتية.

**قضية 7 :**

إن جماعة المتجهات المتعامدة في الفضاء $\ell_2$ عدودة على الأكثر.

لتكن هذه المتجهات $\varphi_i$ $i \in I$ و $I$ مجموعة الأدلة، لنفرض أنها نظامية أيضاً (نظيمها = 1)، وذلك بتقسيمها على $\|\varphi_i\|$ لأن ذلك لن يؤثر على البرهان. لدينا من أجل أي عنصرين $\varphi_i$ و $\varphi_j$ $i, j \in I$ النظيم.

$$\|\varphi_i - \varphi_j\| = \sqrt{2}$$

تعني هذه العلاقة أنه لا توجد نقاط مشتركة بين الكرتين $B_i$ و $B_j$ اللتين مركزهما $\varphi_i$ و $\varphi_j$ ونصف قطريهما يساوي $\frac{1}{2}$ أياً كان $i, j \in I$. ومن جهة ثانية توجد جماعة $\psi_n$ $n \in N$ كثيفة حيثما كانت في $\ell_2$ لأنه من النوع العدود؛ تحتوي كل كرة $B_i\left(\varphi_i, \frac{1}{2}\right)$ مركزها $\varphi_i$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ إحدى متجهات الجماعة $\psi_n$ على الأقل (وإلا لما غطت هذه الجماعة كل الفضاء) وهكذا فإن عدد هذه الكرات عدود على الأكثر. وهو المطلوب.

**قضية 8 :**

طريقة إنشاء نظمة متعامدة نظامية Orthonormalization.

نقبل هذه الطريقة بدون برهان : عندما يوجد في فضاء منظم من النوع العدود – $\ell_2$ هنا – جماعة من المتجهات المستقلة خطياً $f_n$ $n \in N$ فإنه من الممكن إنشاء نظمة متعامدة نظامية $\varphi_n$ $n \in N$ تعين بالعلاقة $\varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_n^i f_n$. (تبرهن هذه القضية بالتكرار على $n$).

**لازمة :**

يوجد في $\ell_2$ جماعة متعامدة نظامية وتامة نقول عنها أيضاً إنها قاعدة متعامدة نظامية.

لتكن $\psi_1 ... \psi_n ...$ جماعة عدودة كثيفة حيثما كانت في $\ell_2$. نستبعد من هذه المتتالية كل عنصر $\psi_k$ إذا كان توافقاً خطياً للعناصر $\psi_i$ التي سبقته $i < k$. ونحصل بهذا الشكل على الفضاء الجزئي المغلق الذي يولد $\ell_2$، على جماعة المتجهات المستقلة خطياً. نطبق عليها طريقة التعامد النظامي فنحصل على القاعدة المطلوبة.

**تعريف 11 :**

لتكن $(\psi_n)$ جماعة متعامدة نظامية لا على التعيين في $\ell_2$. نقول من أجل أي متجهة $x \in \ell_2$ إن العدد

$$x^i = \langle \psi_i | x \rangle \qquad (2.6)$$

هو معامل فوريي البائي أو مركبة x البائية بالنسبة للجماعة $(\psi_n)$. ونسمي المتسلسلة الصورية

$$\sum_i x^i \psi_i \qquad (2.7)$$

متسلسلة فوريي للمتجهة x.

نريد دراسة تقارب هذه المتسلسلة، أي تقارب متتالية الجموع الجزئية

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x^i \psi_i \qquad (2.8)$$

هذا من جهة، ونريد من جهة أخرى في حال تقاربها البحث عن تطابق حدها مع المتجهة x.

لنقارن المجموع

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \psi_i$$

حيث الأعداد العقدية $\alpha^i$ لا على التعيين مع المجموعة (2.8). لدينا

$$\|x - S_n\|^2 = \langle x - S_n | x - S_n \rangle = \langle x|x \rangle + \langle S_n|S_n \rangle - \langle S_n|x \rangle - \langle x|S_n \rangle$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(|\alpha^i|^2 - \overline{\alpha}^i x^i - \alpha^i \overline{x}^i\right)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(|x^i|^2 - |\alpha^i - x^i|^2\right)$$

إن الحد الأدنى للمقدار $\|x - S_n\|$ هو عندما ينطبق $\alpha^i$ على $x^i$ أي أن أفضل تقريب لـ x هو بواسطة متسلسلة فوريي (2.8) ولدينا في هذه الحالة

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|x^i|^2 \qquad (2.9)$$

وبعبارة أخرى

$$\sum_{i=1}^{n}|x^i|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (2.9)'$$

وبما أن n لا على التعيين وأن الطرف الثاني لا يتوقف على n فإن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{n}|x^i|^2$ متقاربة ولدينا المتراجحة التالية المعروفة باسم متراجحة بسل Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (2.10)$$

**تعريف 12 :**

نقول عن الجماعة $(\psi_n)$ إنها مغلقة إذا تحققت المساواة التالية من أجل كل متجهة $x \in \ell_2$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle \psi_i | x \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^2 = \|x\|^2 \qquad (2.11)$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة بارسفال Parseval أو علاقة الإغلاق.

ينتج عن هذه العلاقة أن المتجهة الوحيدة المتعامدة مع متجهات الجماعة $(\psi_n)$ هي المتجهة O.

إنها تبين بأخذ (2.9) بعين الاعتبار أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون الجماعة $(\psi_n)$ مغلقة هو أن تتقارب متسلسلة فوريي من المتجهة x. ولكن هذا يعني على وجه التحديد أن الجماعة $(\psi_n)$ كثيفة حيثما كانت وأن الجماعة $(\psi_n)$ تامة.

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x^i \psi_i \qquad (2.12)$$

<u>قضية 9</u> :

يتكافؤ القول عن جماعة إنها مغلقة مع القول إنها تامة.

يبقى أن نلاحظ أن الجماعة (التامة–المغلقة)، أن هذه القاعدة ليست قاعدة بالمعنى المتعارف عليه : إن x هي نهاية المتسلسلة المتقاربة وليست مجموعاً. يجب قراءة (2.12) بهذا المعنى

<u>قضية 10</u> :

لتكن $(x^i)$ متتالية أعداد سلمية تحقق العلاقة $\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^2 < \infty$. يوجد إذاً متجهة وحيدة $x \in \ell_2$ بحيث يكون

$$x^i = \langle \psi_i | x \rangle \qquad (1)$$ أياً كان الدليل i

و

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^2 = \|x\|^2 \qquad (2)$$

لنضع

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x^i \psi_i \qquad (3)$$

لدينا

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \sum_{i=n+1}^{n+p}|x^i|^2 < \varepsilon$$

لأن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{n}|x^i|^2$ متقاربة فرضاً. وبما أن $\ell_2$ تام فإن المتتالية الكوشية $x_n$ تتناهى نحو متجهة x؛

ولدينا من أجل كل $i \le n$

$$\langle \psi_i | x \rangle = \langle \psi_i | x - x_n \rangle + \langle \psi_i | x_n \rangle \qquad (4)$$

يتناهى الحد الأول من الطرف الثاني إلى الصفر عندما تتناهى n إلى $\infty$ لأن $x_n \to x$ و

$$|\langle \psi_i | x - x_n \rangle| \le \|\psi_i\| \cdot \|x - x_n\|$$

أما الحد الثاني فهو تعريفاً، حسب (3)، $x^i$ ومنه (1) من أجل $i \le n$

$$\langle \psi_i | x \rangle = x^i$$

لنلاحظ أن الطرف الأيسر في (4) لا يتوقف على n وبأخذنا $n \to \infty$ فإن (4) صحيحة من أجل كل i وبالتالي (1) صحيحة من أجل كل i. ولدينا

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle x - \sum_{i=1}^{n} x^i \psi_i | x - \sum_{i=1}^{n} x^i \psi_i \rangle$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left( \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x^i|^2 \right)$$

و(2) محققة. يبقى أن نبرهن أن x وحيدة. لنفرض وجود متجهة أخرى x' تحقق الشرطين (1) و(2). لدينا

$$\langle x - x' | x - x' \rangle = \|x\|^2 + \|x'\|^2 - \langle x|x' \rangle - \langle x'|x \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |x'|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |x''|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |x''|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 = 0$$

و

$$x = x'$$

**قضية 11 :**

إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون الجماعة $(\psi_n)$ تامة في $\ell_2$ هو أن تكون المتجهة O المتجهة الوحيدة المتعامدة مع المتجهات $\psi_n$.

ليكن $x = (x^1 ... x^n ...)$ عمودياً على كل متجهات القاعدة : $0 = \langle \psi_i | x \rangle = x^i$ والشرط لازم. لنفرض أن $(\psi_n)$ ليست تامة. يوجد إذاً متجهات y لا تحقق علاقة بارسفال (2.11)

$$\|y\|^2 > \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 \quad ; \quad x^i = \langle \psi_i | y \rangle$$

يوجد من جهة أخرى حسب القضية السابقة متجهة وحيدة x تحقق العلاقة $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2$ وبالتالي فإن المتجهة $x - y$ التي لا تساوي الصفر $\left(\|x\|^2 < \|y\|^2\right)$ عمودية على كل متجهات الجماعة خلافاً للفرض.

**ملاحظة هامة :**

يطلق عادة اسم الفضاء الإقليدي على الفضاء المزود بشكل خطي ونصف خطي غير متدن (بجداء سلمي) وبالتالي بنظيم. ثم تعرف الفضاءات الإقليدية التامة، وهكذا فإن الفضاء الهيلبرتي هو فضاء إقليدي تام وبشكل خاص فإن الفضاء الهيلبرتي $\ell_2$ هو فضاء إقليدي فصول وتام والقضايا 7، 8، 9 والعلاقات (2.10) و(2.11) ومتراجحة بسل وعلاقة بارسفال صحيحة من أجل الفضاء الإقليدي الفصول. أما القضيتان 10 و11 فصحيحتان من أجل الفضاء الإقليدي الفصول والتام.

ركزنا اهتمامنا على $\ell_2$ للمكانة التي يحتلها في دراسة الطيف المنفصل في الميكانيك الكمومي.

## 4.2- مبرهنة الإسقاط

نريد أن نبين أنه من الممكن في الفضاء الهيلبرتي، كما هو عليه الحال في الفضاء العادي، أن نسقط من نقطة ما مستقيماً عمودياً ووحيداً على المستوي، يحدد أقصر مسافة بينهما. رأينا أن الجداء السلمي يعرف النظيم. وسنحتاج للبرهان على مبرهنة الإسقاط إلى المقدمة التالية حيث العكس : يعرف النظيم الجداء السلمي .

**مقدمة :**

إن الشرط اللازم والكافي لكي يعين النظيم جداء سلمياً (شكلاً خطياً ونصف خطي معرفاً موجباً) هو أن تتحقق المطابقة أدناه المسماة متطابقة المتوسط.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (2.13)$$

إن اللزوم واضح. نبرهن الكفاية بتعريف جداء سلمي انطلاقاً من (2.1) على الشكل

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right\} \qquad (2.14)$$

التي ترينا فوراً أن $\langle x|x\rangle = \|x\|^2$ وأن $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ . نبرهن الخطية ونصف الخطية بوضعنا $x + x' \pm y$ في (2.13) لنستنتج أن

$$\|x+x'\pm y\|^2 = \|x\pm y\|^2 + \|x'\pm y\|^2 + \|x\|^2 + \|x'\|^2 - \frac{1}{2}\left\{\|x \pm y - x'\|^2 + \|x' \pm y - x\|^2\right\}$$

نحصل على الشيء نفسه بوضع $iy$ عوضاً عن $y$ بحيث تكافئ هاتان المتطابقتان التعريف $\langle x+x'|y\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x'|y\rangle$ حسب (2.14).

نبرهن أخيراً التجانس (الخاصة IV) بوضعنا في (2.14)

$$\varphi(\lambda) = \langle x|\lambda y\rangle - \lambda\langle x|y\rangle$$

ونبرهن، آخذين بعين الاعتبار الخطية، أن $\varphi(\lambda) = 0$ من أجل $\lambda$ عدد طبيعي ثم من أجل $\lambda$ منطق في $\mathbb{C}$ (أي من الشكل $\lambda = \frac{p}{q} + i\frac{p'}{q'}$) وأخيراً من أجل أي عدد $\lambda$ ينتمي إلى $\mathbb{C}$ لأن $\varphi(\lambda)$ دالة متصلة.

**مبرهنة 1 : مبرهنة الإسقاط**

لتكن F مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة من فضاء هيلبرتي $\mathscr{H}$. يوجد من أجل أي $x \in \mathscr{H}$ نقطة وحيدة $y \in F$ (ونعني بالنقطة هنا عنصراً من F أي متجهة) تحقق العلاقة

$$\|x-y\| = \inf_{z\in F}\|x-z\| \qquad (2.15)$$

## 4.2- مبرهنة الإسقاط

نريد أن نبين أنه من الممكن في الفضاء الهيلبرتي، كما هو عليه الحال في الفضاء العادي، أن نسقط من نقطة ما مستقيماً عمودياً ووحيداً على المستوي، يحدد أقصر مسافة بينهما. رأينا أن الجداء السلمي يعرف النظيم. وسنحتاج للبرهان على مبرهنة الإسقاط إلى المقدمة التالية حيث العكس : يعرف النظيم الجداء السلمي .

**مقدمة :**

إن الشرط اللازم والكافي لكي يعين النظيم جداء سلمياً (شكلاً خطياً ونصف خطي معرفاً موجباً) هو أن تتحقق المطابقة أدناه المسماة متطابقة المتوسط.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (2.13)$$

إن اللزوم واضح. نبرهن الكفاية بتعريف جداء سلمي انطلاقاً من (2.1) على الشكل

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right\} \qquad (2.14)$$

التي ترينا فوراً أن $\overline{\langle y|x\rangle} = \langle x|y\rangle$ وأن $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle$ . نبرهن الخطية ونصف الخطية بوضعنا $x + x' \pm y$ في (2.13) لنستنتج أن

$$\|x+x' \pm y\|^2 = \|x \pm y\|^2 + \|x' \pm y\|^2 + \|x\|^2 + \|x'\|^2 - \frac{1}{2}\left\{\|x \pm y - x'\|^2 + \|x' \pm y - x\|^2\right\}$$

نحصل على الشيء نفسه بوضع $iy$ عوضاً عن $y$ بحيث تكافئ هاتان المتطابقتان التعريف $\langle x+x'|y\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x'|y\rangle$ حسب (2.14).

نبرهن أخيراً التجانس (الخاصة IV) بوضعنا في (2.14)

$$\varphi(\lambda) = \langle x|\lambda y\rangle - \lambda\langle x|y\rangle$$

ونبرهن، آخذين بعين الاعتبار الخطية، أن $\varphi(\lambda) = 0$ من أجل $\lambda$ عدد طبيعي ثم من أجل $\lambda$ منطق في $\mathbb{C}$ (أي من الشكل $\lambda = \frac{p}{q} + i\frac{p'}{q'}$) وأخيراً من أجل أي عدد $\lambda$ ينتمي إلى $\mathbb{C}$ لأن $\varphi(\lambda)$ دالة متصلة.

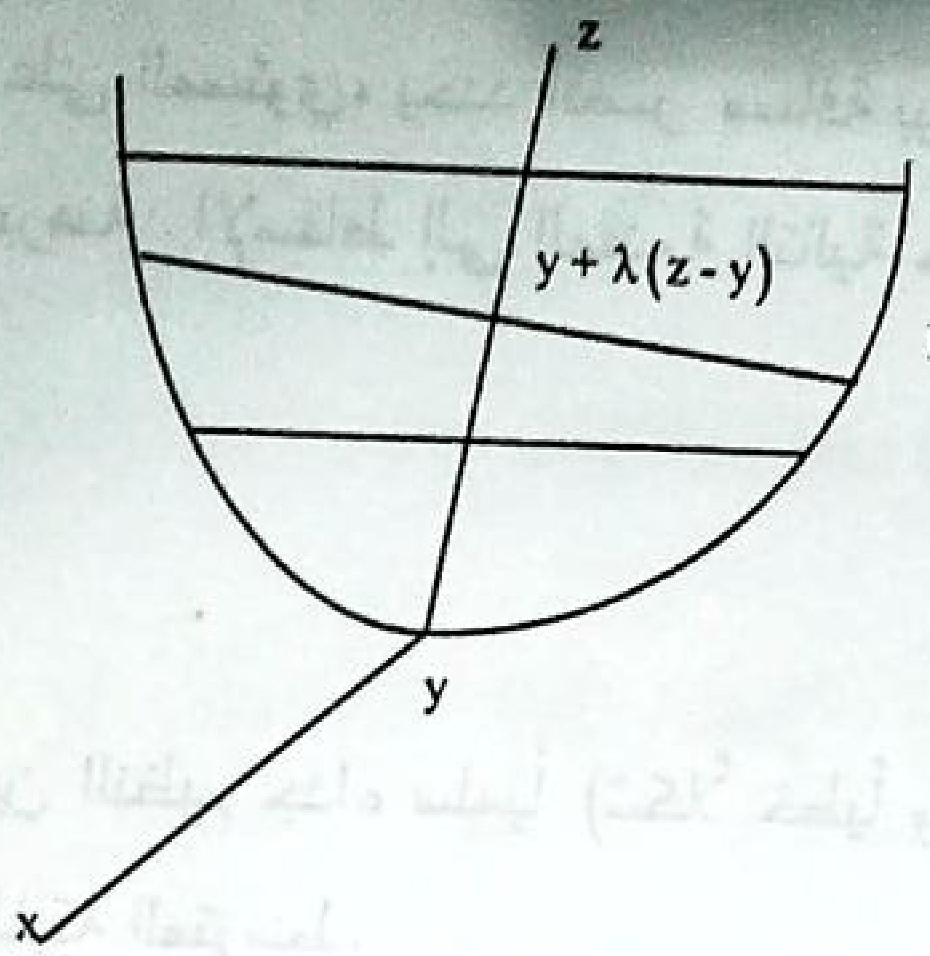
**مبرهنة 1 : مبرهنة الإسقاط**

لتكن $F$ مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة من فضاء هيلبرتي $\mathscr{H}$. يوجد من أجل أي $x \in \mathscr{H}$ نقطة وحيدة $y \in F$ (ونعني بالنقطة هنا عنصراً من $F$ أي متجهة) تحقق العلاقة

$$\|x-y\| = \inf_{z \in F}\|x-z\| \qquad (2.15)$$

تدل inf على الحد الأدنى، أي أن المسافة $d(x,y)=\|x-y\|$ كما عرفناها في (1.19) هي أقصر المسافات بين x وعناصر F؛ نسمي هذه النقطة y مسقط x على F ونكتب (2.15) على الشكل

$$d(x,F)=\inf_{z\in F} d(x,z) \qquad (2.15)'$$




الشكل.2

إن y هي أيضاً النقطة الوحيدة التي تحقق العلاقة

$$\mathrm{Re}\,\langle x-y|z-y\rangle \le 0 \qquad (2.16)$$

**البرهان :**

لنعرف المتتالية: $z_o, z_1, \dots z_n \dots \in F$ المقصرة للبعد عن x بالعلاقة

$$\|x-z_n\| = d+\frac{1}{n}$$

حيث سمينا $d=\inf_{z\in F}\|x-z\|$.

ولنطبق متطابقة المتوسط (2.13) على المتجهتين $z_m - x$ و $z_n - x$ :

$$\frac{1}{2}\|z_m+z_n-2x\|^2+\frac{1}{2}\|z_m-z_n\|^2=\|z_m-x\|^2+\|z_n-x\|^2$$

$$\frac{1}{2}\|z_m-z_n\|^2=\|z_m-x\|^2+\|z_n-x\|^2-2\left\|\frac{z_m+z_n}{2}-x\right\|^2$$

يتناهى كل من الحدين الأولين في الطرف الثاني إلى $d^2$ عندما يتناهى الدليلان n و m إلى اللانهاية. أما الحد الثالث فهو بالتأكيد أكبر من $2d^2$ لأن $\frac{z_m+z_n}{2}\in F$ و F محدب فرضاً ولأن d تعريفاً هو الحد الأدنى لـ $d(z,x)$. وهكذا فإن $\|z_m-z_n\|\le 0$ من أجل $m,n\to\infty$؛ لا يمكن طبعاً لهذه النهاية إلا أن تكون 0 وبالتالي فإن للمتتالية الكوشية $(z_n)$ نهاية في $\mathscr{H}$ لأن $\mathscr{H}$ تام تعريفاً. لتكن y هذه النهاية؛ y وحيدة لأن $\mathscr{H}$ انفصالي و $y\in F$ لأن F مغلق. و(2.15) محققة.

يبقى أن نبرهن (2.16). لدينا من أجل أي $z \in F$ : $y+\lambda(z-y) \in F$ من أجل $0<\lambda<1$ لأن $F$ محدب. ومنه حسب (2.15)

$$\|x-(y+\lambda(z-y))\|^2 \geq \|x-y\|^2 \quad (2.17)$$

أو

$$\|x-y\|^2+\lambda^2\|z-y\|^2-2\lambda \operatorname{Re}\langle x-y|z-y\rangle \geq \|x-y\|^2 \quad (2.17)'$$

أي أن

$$\frac{\lambda}{2}\|z-y\|^2 \geq \operatorname{Re}\langle x-y|z-y\rangle$$

إن $\lambda>0$ ويمكن أن يكون صغيراً قدر ما نريد بحيث تتحقق العلاقة (2.16). وإذا وجدت نقطة أخرى $y' \in F$ تحقق (2.16) فإنها منطبقة حتماً على $y$ : لنأخذ في (2.17) و'(2.17) $\lambda=1$ من أجل أي $z \in F$ و $y'$ لنحصل على

$$\|x-z\|^2 = \|x-y'\|^2+\|z-y'\|^2-2\operatorname{Re}\langle x-y'|z-y'\rangle \geq \|x-y'\|^2$$

أي أن

$$\|x-y'\| = \inf_{z\in F}\|x-z\|^2$$

وبالتالي تنطبق $y'$ على $y$ لأن $y$ هي المتجهة الوحيدة التي تحقق هذه العلاقة.

__لازمة 1__ :

إن الإسقاط لنقطة ما $x \in \mathscr{H}$ على المجموعة الجزئية المغلقة والمحدبة وغير الخاوية هو دالة متصلة بالمتغير $x$.

لتكن $y$ و $y'$ مسقطي النقطتين $x$ و $x'$ المنتميتين لـ $\mathscr{H}$. لدينا حسب (2.16)

$$\|x'-y'\| \leq \|x'-y\| \leq \|x'-x\|+\|x-y\|$$

المتراجحة الأخيرة هي متراجحة المثلث التي يحققها النظيم. لدينا بنفس الشكل

$$\|x-y\| \leq \|x-y'\| \leq \|x-x'\|+\|x'-y'\|$$

وبأخذ المتراجحة الأولى بعين الاعتبار

$$\|x-y\| \leq \|x-y'\| \leq 2\|x-x'\|+\|x-y\|$$

ومن المتراجحة الثانية في هذه العلاقة

$$\|x-y'\|-\|x-y\| \leq 2\|x-x'\|$$

عندما يتناهى $x' \to x$ فإن $\|x-y'\| \to \|x-y\|$ وبالتالي فإن $y' \to y$ لأن النظيم (المسافة) دالة متصلة.

**لازمة 2 :** عندما تشكل المجموعة $F$ فضاءً متجهياً جزئياً-مغلقاً :

إنها المرحلة الأخيرة من إثبات الإسقاط العمودي، إن مسقط $x \in \mathscr{H}$ على $F$ هو النقطة الوحيدة $y$ التي تجعل المتجهة $x-y$ عمودية على $F$.

لنكتب من أجل كل متجهة $z \in F$، المتجهة $z-y$، بحيث تشكل المتجهات $z-y$ كل متجهات $F$ ولنطبق المتراجحة (2.16) على المتجهة $Z-y$ حيث $Z = y + \lambda(z-y)$، $Z \in F$ لأن $F$ محدب، لدينا

$$\mathrm{Re}\left(\lambda\langle x-y|z-y\rangle\right) \le 0$$

نعطي لـ $\lambda$ القيمة $\overline{\langle x-y|z-y\rangle}$ (بتطبيق تحاك على $0<\lambda<1$) فنحصل على

$$\left|\langle x-y|z-y\rangle\right|^2 \le 0$$

أي

$$\langle x-y|z-y\rangle = 0 \qquad (2.18)$$

وهو المطلوب.

يبرهن أن المجموعة العمودية على الفضاء الجزئي $F$ هي نفسها فضاء جزئي نرمز له بـ $\perp F$ و $F \cap \perp F = \varnothing$، ويمكننا أنة نكتب أي متجهة $x \in \mathscr{H}$ على الشكل

$$x = y + y'$$

مع $y \in F$ و $y' \in \perp F$

ولدينا

$$\|y+y'\|^2 = \|y\|^2 + \|y'\|^2 \qquad \text{مبرهنة فيثاغورث}$$

لأن $\langle y|y'\rangle = 0$.

**تعريف 13 :**

نسمي التطبيق الذي يقابل أي متجهة $x \in \mathscr{H}$ بمسقطها على الفضاء الجزئي $F$ بالمسقط أو المسقط العمودي ونرمز له بـ $P_F(x)$.

**قضية 12 :**

إن المسقط $P_F(x)$ تطبيق خطي متصل نظيمه يساوي الواحد إذا كان $F \neq \{O\}$ ونواته المغلقة $F' = P_F^{-1}(O)$ هي الفضاء الجزئي العمودي على $F$. ونسميه مكمل $F$.

لتكن $P_F(x) = y$. لدينا من (2.18) ومن أجل أي متجهة $Z$ في $F$

$$\langle P_F(x) - x|Z\rangle = 0 \qquad (2.19)$$

أو

$$\langle P_F(x)|Z\rangle = \langle x|Z\rangle$$

ومنها الخطية. ومن جهة أخرى فإن الطرف الثاني يساوي الصفر عندما تكون $x$ عمودية على $F$، أي عندما تنتمي $x$ إلى $F' = \perp F$. وبما أن المتجهة $O$ هي الوحيدة العمودية على كل عناصر $F$ فإن (2.19) تبين أن $P_F(x) = x$ عندما تكون $x \in F$. لدينا أخيراً من مبرهنة فيثاغورث $(P_F(x) = y \in F$ ،$P_F(x) - x \in F')$

$$\|x\|^2 = \|P_F(x) - x\|^2 + \|P_F(x)\|^2$$

أو

$$\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

ومنه خاصة الاتصال. نحصل على إشارة المساواة من أجل $x \in F$؛ وهكذا فإن $\|P_F(x)\| = 1$.

نكتب $\mathscr{H}$ على شكل جمع مباشر $\mathscr{H} = F \oplus F'$ ونكتب $P_{F'} = I - P_F$ حيث $I$ التطبيق المتطابق، $P_F$ متصل أيضاً وكتابة $x$ على الشكل $x = y + y'$ تطبيق خطي متصل لـ $\mathscr{H} \to F \times F'$. يبرهن أن تطبيقه العكسي متصل أيضاً (Homeomorphic).

## 5.2– ثنوي الفضاء الهيلبرتي

أشرنا إلى أنه من الممكن في حالة الفضاءات المتجهية متناهية الأبعاد (انظر محلق الفصل الخامس في كتاب الميكانيك التقليدي والنسبوي الذي أعدنا نسخه في محلق الفصل التاسع من هذا الكتاب) تحويل التطبيق ثنائي الخطية $u(x, y)$ لجداء فضائين متجهيين $E_1$ و $E_2$ في حقل الأعداد السلمية $K$ : $E_1 \times E_2 \to K$ إلى تطبيق ينتمي إلى ثنوي أحد الفضائين وليكن $E_2'$ على سبيل المثال يعينه التطبيق $u_x : E_1 \to E_2'$ من أجل كل $x \in E_1$. بحيث يكون $u_x(y) = u(x, y)$ من أجل كل $x \in E_1$. وأنه من الممكن في حالة تطابق الفضائين $E = E_1 = E_2$، وعلى وجه الخصوص في حالة الجداء السلمي $E \times E \to K$، كتابة هذا الجداء على شكل جداء داخلي

$$u_x(y) = \langle u_x, y\rangle = \langle x|y\rangle \tag{2.20}$$

ونريد هنا أن نصل إلى نتيجة مشابهة في حالة الفضاءات الهيلبرتية – حيث الثنوي هو مجموعة التطبيقات الخطية المتصلة لـ $\mathscr{H}$ في $K$، وحيث الجداء السلمي خطي بالنسبة لأحد طرفيه ونصف خطي بالنسبة للطرف الآخر : إن كل شكل خطي متصل هو جداء سلمي كما في (2.20).

**مبرهنة 2 :**
ليكن $\mathscr{H}$ فضاءً هيلبرتياً. وليكن الشكل الخطي المتصل $u_x(y) = \langle x|y\rangle$، $u_x : \mathscr{H} \to K$ من أجل كل $x \in \mathscr{H}$. إن التطبيق $\tilde{u} : x \to u_x$ لـ $\mathscr{H}$ في $\mathscr{H}'$ هو تطبيق نصف خطي وتقابلي وتقايس للفضاء المنظم $\mathscr{H}$ في الفضاء المنظم $\mathscr{H}'$.

ومنها الخطية. ومن جهة أخرى فإن الطرف الثاني يساوي الصفر عندما تكون x عمودية على F، أي عندما تنتمي x إلى $F' = \perp F$. وبما أن المتجهة O هي الوحيدة العمودية على كل عناصر F فإن (2.19) تبين أن $P_F(x) = x$ عندما تكون $x \in F$ . لدينا أخيراً من مبرهنة فيثاغورث ($P_F(x) = y \in F$ ، $P_F(x) - x \in F'$)

$$\|x\|^2 = \|P_F(x) - x\|^2 + \|P_F(x)\|^2$$

أو

$$\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

ومنه خاصة الاتصال. نحصل على إشارة المساواة من أجل $x \in F$؛ وهكذا فإن $\|P_F(x)\| = 1$.

نكتب $\mathscr{H}$ على شكل جمع مباشر $\mathscr{H} = F \oplus F'$ ونكتب $P_{F'} = I - P_F$ حيث I التطبيق المتطابق، $P_{F'}$ متصل أيضاً وكتابة x على الشكل $x = y + y'$ تطبيق خطي متصل لـ $\mathscr{H} \to F \times F'$. يبرهن أن تطبيقه العكسي متصل أيضاً (Homeomorphic).

## 5.2- ثنوي الفضاء الهيلبرتي

أشرنا إلى أنه من الممكن في حالة الفضاءات المتجهية متناهية الأبعاد (انظر محلق الفصل الخامس في كتاب الميكانيك التقليدي والنسبوي الذي أعدنا نسخه في محلق الفصل التاسع من هذا الكتاب) تحويل التطبيق ثنائي الخطية $u(x, y)$ لجداء فضائين متجهيين $E_1$ و $E_2$ في حقل الأعداد السلمية K : $E_1 \times E_2 \to K$ إلى تطبيق ينتمي إلى ثنوي أحد الفضائين وليكن $E_2'$ على سبيل المثال يعينه التطبيق $u_x : E_1 \to E_2'$ من أجل كل $x \in E_1$. بحيث يكون $u_x(y) = u(x, y)$ من أجل كل $x \in E_1$. وأنه من الممكن في حالة تطابق الفضائين $E = E_1 = E_2$، وعلى وجه الخصوص في حالة الجداء السلمي $E \times E \to K$، كتابة هذا الجداء على شكل جداء داخلي

$$u_x(y) = \langle u_x, y \rangle = \langle x|y \rangle \tag{2.20}$$

ونريد هنا أن نصل إلى نتيجة مشابهة في حالة الفضاءات الهيلبرتية – حيث الثنوي هو مجموعة التطبيقات الخطية المتصلة لـ $\mathscr{H}$ في K، وحيث الجداء السلمي خطي بالنسبة لأحد طرفيه ونصف خطي بالنسبة للطرف الآخر : إن كل شكل خطي متصل هو جداء سلمي كما في (2.20).

**مبرهنة 2 :**

ليكن $\mathscr{H}$ فضاءً هيلبرتياً. وليكن الشكل الخطي المتصل $u_x(y) = \langle x|y \rangle$، $u_x : \mathscr{H} \to K$ من أجل كل $x \in \mathscr{H}$. إن التطبيق $\tilde{u} : x \to u_x$ لـ $\mathscr{H}$ في $\mathscr{H}'$ هو تطبيق نصف خطي وتقابلي وتقايس للفضاء المنظم $\mathscr{H}$ في الفضاء المنظم $\mathscr{H}'$.

تنتج نصف خطية $\bar{u}$ عن نصف خطية الشكل الهرميتي

$$x_1 + x_2 \to u_{x_1+x_2}$$

$$u_{x_1+x_2}(y) = \langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle = u_{x_1}(y) + u_{x_2}(y)$$

من جهة أخرى

$$\|u_x(y)\| = |\langle x|y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

وتعريفاً

$$\|u_x\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |\langle x|y \rangle| = \|x\| \qquad (2.21)$$

وبالتالي فإن $x \to u_x$ هو تقايس لـ $\mathcal{H}$ في $\mathcal{H}'$.

يبقى أن نبرهن أنه يقابل أي عنصر $x' \in \mathcal{H}'$ مختلف عن التطبيق المعدوم متجهة $x \in \mathcal{H}$ بحيث يكون $x' = u_x$ : أي أن كل شكل خطي متصل على فضاء هيلبرتي $x'(y)$ هو من الشكل $x'(y) = \langle x|y \rangle$ (مبرهنة ريتس Riesz). أو بعبارة أخرى إن التقابل بين $x$ و $u_x = x' \in \mathcal{H}'$ يعني تطابق الجداء السلمي $\langle x|y \rangle$ مع الجداء الداخلي $\mathcal{H}' \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ : $u_x(y) = \langle u_x|y \rangle$.

لتكن $H = x'^{-1}(O)$ نواة التطبيق $x'$ (إنها تعريفاً الفضاء الجزئي المغلق من $\mathcal{H}$ المؤلف من العناصر $x \in \mathcal{H}$ التي تحقق $x'(y) = 0$)؛ إذا كان $H = \mathcal{H}$ فإن $x'(y) = u_x(y) = 0$ من أجل كل عناصر $\mathcal{H}$ و $x' = u_x = 0$. أما إذا كان $H \neq \mathcal{H}$ فإن $H$ فوق مستوي Hyperplane من $\mathcal{H}$[2]:

لنأخذ متجهة $y_o \notin H$ وليكن $x'(y_o) = \alpha \neq 0$. إن

$$x'\left(y - \alpha^{-1}x'(y)y_o\right) = 0 \qquad \text{من أجل كل عنصر } y \in \mathcal{H}$$

لأن

$$x'\left(y - \alpha^{-1}x'(y)y_o\right) = x'(y) - \alpha^{-1}x'(y)x'(y_o)$$

نظراً لخطية التطبيق $x'$، وبأخذ $x'(y_o) = \alpha$ بعين الاعتبار

$$= 0$$

أي أن

$$y - \alpha^{-1}x'(y)y_o \in H$$

نسمي هذه المتجهة $y'$ ونتحقق أن كل متجهة $y \in \mathcal{H}$ هي من الشكل $y = y' + \beta y_o$، $\beta = \alpha^{-1}x'(y)$. أي أن $H$ هو فوق مستوي، وهو مغلق لأنه الصورة العكسية في تطبيق متصل لمجموعة مغلقة $\{0\}$. والمكمل العمودي في $\mathcal{H}$ لفوق المستوي $H$ هو المستقيم الموازي لـ $y_o$.

---

[2] أي أن كل عنصر $y \in \mathcal{H}$ يكتب على الشكل $y = y' + \alpha y_o$ حيث $y' \in H$ و $y_o \notin H$. يعمم هذا التعريف المستوي في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة (للمستوي بعدان) إلى فوق المستوي في الفضاء ذي الـ n بعداً، لفوق المستوي n-1 بعداً، ثم إلى فوق المستوي في الفضاء اللامنتهي الأبعاد : نكتب كل متجهة منه على الشكل $y = y' + \alpha y_o$ حيث $\alpha y_o$ متجهة ببعد واحد (عمودية على H).

وهكذا فإن التطبيق $u_{y_\circ}(y)$ : $y \to \langle y_\circ | y \rangle$ يساوي الصفر من أجل $y \in H$ وهو من الشكل $u_{y_\circ}(\beta y_\circ) = \langle y_\circ | \beta y_\circ \rangle$ من أجل y المنتمية إلى المكمل العمودي على H؛ $u_{y_\circ}(y) = \beta \|y_\circ\|^2$.

أو، بتبديل β بقيمتها :

$$u_{y_\circ}(y) = \alpha^{-1} x'(y) \|y_\circ\|^2$$

أي أن

$$x'(y) = \frac{\alpha}{\|y_\circ\|^2} u_{y_\circ}(y)$$

التي نكتبها على الشكل

$$x'(y) = u_{\lambda y_\circ}(y) \qquad (2.22)$$

حيث $\lambda = \frac{\bar{\alpha}}{\|y_\circ\|^2}$. ونكون قد قابلنا كل شكل خطي $x'(y)$ بالجداء $\langle \lambda y_\circ | y \rangle$.

<u>**تعريف 14**</u> :

نقول عن التطبيق $\tilde{u} : x \to u_x$ والتطبيق العكسي $\tilde{u}^{-1} : u_x \to x$ إنهما التطبيقان القانونيان لـ $\mathscr{H}$ على $\mathscr{H}'$ ولـ $\mathscr{H}'$ على $\mathscr{H}$. مما يسمح لنا بمطابقة $\mathscr{H}$ مع ثنويه $\mathscr{H}'$. إن $\mathscr{H}'$ فضاء منظم حسب العلاقة (2.21) وهو فضاء هيلبرتي نعرف الجداء السلمي فيه بالعلاقة

$$\langle u_{x_1} | u_{x_2} \rangle = \langle x_2 | x_1 \rangle \qquad (2.23)$$

يمكننا الوصول إلى هذه النتيجة مباشرة انطلاقاً من (2.14) وملاحظة أن

$$\tilde{u}(x + iy) = u_{x+iy} = u_x - iu_y$$

<u>**ملاحظة**</u> :

إن $\mathscr{H}'$ هيلبرتي ولذا فمن الممكن الحديث عن الأشكال الخطية المتصلة على $\mathscr{H}'$. إنها تشكل حسب المبرهنة 2 فضاءً هيلبرتياً نرمز له بـ $\mathscr{H}''$. نقول عن فضاء متجهي E إنه انعكاسي إذا كان $E = E''$. وهذا هو حال الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H} = \mathscr{H}' = \mathscr{H}''$. لنلاحظ أننا سمينا في كتابتنا للجداء السلمي $\langle x | y \rangle$ الطرف الأيمن كيت ket، حيث الخطية والطرف الأيسر برا حيث نصف الخطية. عندما نكتب هذا الجداء على شكل جداء داخلي $u_x(y) = \langle u_x | y \rangle$ فإن الطرف الأيسر ينتمي إلى الفضاء الثنوي. ولكن هذا لن يغير من الأمر شيئاً مادام الفضاء الثنوي متطابقاً في حالة الفضاء الهيلبرتي مع الفضاء الأصلي. سيختلف الأمر عندما نتجاوز الفضاء الهيلبرتي إلى فضاء آخر لا يتطابق مع ثنويه وهذا ما سنضطر لفعله عند دراسة الطيف المتصل كما سنرى.

## 6.2- المجموع المباشر الهيلبرتي

لتكن $\mathscr{H}_i$، $i \in I$، جماعة من الفضاءات الهيلبرتية، و I مجموعة أدلة لا عى التعيين، بمعنى أنها ليست بالضرورة متقابلة مع مجموعة الأعداد الطبيعية. نسمي $\mathscr{H}$ الجماعة $x = (x_i)$ ، $i \in I$ و $x_i \in \mathscr{H}_i$ المحققة للعلاقة

$$\sum_{i\in I} \|x_i\|^2_{\mathscr{H}_i} < \infty \tag{2.24}$$

(أي الجماعة التي يوجد من أجل كل عنصر فيها $x \in \mathscr{H}$ عدد عدود على الأكثر من المركبات $x_i \in \mathscr{H}_i$ المختلفة عن الصفر)

يبرهن أن $\mathscr{H}$ فضاء هيلبرتي نسميه المجموع المباشر للفضاءات الهيلبرتية $\mathscr{H}_i$؛ واضح أن لـ $\mathscr{H}$ بنية فضاء متجهي منظم بالعلاقة (2.24) الناتجة عن الجداء السلمي في $\mathscr{H}$

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i|y_i\rangle_{\mathscr{H}_i} \tag{2.25}$$

بحيث لا يبقى لإتمام البرهان إلا تبيان أنه تام، أن كل متتالية كوشية متقاربة ولكننا لن نفعله. يبرهن كذلك أن

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i \equiv \overline{\sum \mathscr{H}_i} \tag{2.26}$$

بمعنى أن كل متجهة $x_i \in \mathscr{H}_i$ متعامدة مع كل متجهة $x_j \in \mathscr{H}_j$؛ $i, j \in I$ و $i \neq j$؛ والفضاءات الجزئية المتعامدة فضاءات مغلقة في $\mathscr{H}$ ومجموعها الجبري تام في $\mathscr{H}$.

لنأخذ كمثل على $\mathscr{H}_i$ الفضاء K، الحقل السلمي (العقدي مثلاً $\mathbb{C}$) المعرف بالنظيم : $\|x\| = |x|$.

ولنرمز لـ $\mathscr{H} = \bigoplus_{i\in I} K$ بـ $\ell_2(I)$. إنه الفضاء الهيلبرتي $\ell_2$ الذي عرفنا نظيمه بـ (2.4) $I = N$. أما نظيمه المعطى بـ (2.24) فهو

$$\sum_{i\in I} |x_i|^2_K < \infty$$

والجداء السلمي فيه حسب (2.25) هو $\sum_{i\in I} \langle x_i|y_i\rangle_K = \sum_{i\in I} \bar{x}_i y_i$. يعمم هذا الفضاء الفضاءات $R^n$، $C^n$ و $\ell_2$ الهيلبرتي من النوع العدود؛ ويصح عليه كل ما يصح على هذه الفضاءات وبصورة خاصة متراجحة بسل (2.10) وعلاقة المساواة – برسفال – (2.11). يبرهن أن كل فضاء هيلبرتي متشاكل تقابلياً مع $\ell_2(I)$ وكل فضاء هيلبرتي من النوع العدود متشاكل تقابلياً مع $\ell_2$.

$$\ell_2(I) \leftrightarrow L_2$$

•

## 3. المؤثرات الخطية في $\mathcal{H}$

تعرفنا منذ البداية في كتاب الميكانيك على التطبيقات الخطية لفضاء متجهي منتهي الأبعاد، $E^n$، في فضاء آخر $E^m$ وعبرنا عن هذا التطبيق عندما تتحدد قاعدتان في هذين الفضائين بمصفوفة A، $m \times n$؛ بمصفوفة مربعة $n \times n$ عندما يكون التطبيق- الذي يسمى عندئذ مؤثراً – لفضاء في ذاته، وبمصفوفة مربعة قلوبة عندما يكون التطبيق العكسي معرفاً أيضاً. تعرفنا كذلك، بكتابة المصفوفة على شكل قطري، على المتجهات التي تحقق العلاقة $Ax = \lambda x$ أو $(A - \lambda I)x = 0$ حيث $x \in E^n$ و $\lambda \in K$، وعلى الـ n قيمة الممكنة لـ $\lambda$ التي نحصل عليها كحل لكثير الحدود المميز $\det A - \lambda I = 0$. سمينا هذه المتجهات، المتجهات الخاصة وتقابلها القيم الخاصة $\lambda_i$. عرفنا كذلك كيفية الانتقال من المؤثر في E إلى المؤثر في ثنويه E' بأخذ منقول المصفوفة $A$ : $\tilde{A}$ عندما يكون الحقل السلمي الذي عرف الفضاء عليه هو حقل الأعداد الحقيقية، أو أخذ مرافق المصفوفة (المؤثر) $A^\dagger = \bar{\tilde{A}}$ عندما يكون الحقل السلمي حقل الأعداد العقدية.

لا توجد صعوبة كبرى في تعميم هذه النتائج على الفضاءات المنظمة وبصورة خاصة على الفضاءات الهيلبرتية عندما يكون الطيف (مجموعة القيم الخاصة) مؤلفاً من نقاط منفصلة، وهو ما يحدث من أجل فئة صغيرة من المؤثرات – هي المؤثرات المتراصة. تكمن الصعوبة في واقع الأمر عندما يكون الطيف متصلاً. سنحاول قدر المستطاع بدون الدخول في تفاصيل تخرجنا عن المبتغى من هذا الكتاب الذي يبقى كتاباً في الفيزياء وليس في فقه لغة الفيزياء إن صح التعبير.

### 1.3- تعريفات، المؤثرات المتراصة

**تعريف 15 :**

نقول عن عدد عقدي $\lambda \in \mathbb{C}$ إنه قيمة منتظمة للمؤثر الخطي المتصل u في فضاء منظم E إذا كان للمؤثر $u - \lambda I$، حيث I المؤثر التطابقي، مقلوب في مجموعة المؤثرات الخطية المتصلة لـ E. نرمز لهذا المقلوب بـ $R_\lambda$ :

$$R_\lambda = (u - \lambda I)^{-1} \tag{3.1}$$

ونسميه المحلل Resolvent.

نسمي المقادير $\lambda$ التي لا تحقق العلاقة (3.1)، التي ليست بقيم منتظمة القيم الطيفية لـ u. نسمي مجموعة هذه القيم طيف u ونرمز لها بـ $Sp(u)$. وبصورة خاصة عندما تكون $\lambda \in Sp(u)$ فإن للمعادلة التالية

$$(u - \lambda I)x = 0 \qquad (3.2)$$

حلول أخرى غير الحل التافه $x = 0$ ؛ $x \in E$ الذي يحقق (3.2) هو متجهة خاصة تقابل القيمة الخاصة $\lambda$. نكتب (3.2) غالباً على الشكل

$$ux = \lambda x \qquad (3.2)'$$

تشكل مجموعة المتجهات $x$ التي تحقق (3.2) فضاءً متجهياً جزئياً مغلقاً من $E$، هو نواة التطبيق $u - \lambda I$ : $x \in Ker(u - \lambda I)$ (حيث $Ker$ ترمز إلى نواة)، نسميه الفضاء الجزئي الخاص المقابل للقيمة الخاصة $\lambda$ ونرمز له بـ $E_\lambda$.

يبرهن، كنتيجة لكون مجموعة القيم المنتظمة مفتوحة في $\mathbb{C}$ والتطبيق $\lambda \to R_\lambda$ تحليلي، أن الطيف في $\mathbb{C}$ متراص – مغلق محدود – محتوى في الكرة $\|u\| \leq \lambda$.

ليست المجموعات المغلقة والمحدودة في الفضاءات المتجهية المنظمة اللامتناهية الأبعاد متراصة بالضرورة، خلافاً لما هو عليه الحال في الفضاءات منتهية الأبعاد. إن كل تطبيق خطي $u$ للفضاء المنظم $E^n$ في الفضاء المنظم $E^m$ – المتصل طبعاً – تطبيق متراص لأن نظيم صورة أي جزء محدود $B$ من $E$ – محتوى في كرة نصف قطرها $r$ – هو $\|u(B)\| \leq \|u\| \cdot r$، $u(B)$ محدود و $\overline{u(B)}$، حيث – تشير إلى المجموعة المغلقة، متراص. لا ينطبق هذا الواقع إلا على فئة محدودة من التطبيقات في الفضاءات المنظمة اللامتناهية الأبعاد.

**<u>تعريف 16</u> :**

ليكن $E$ و $F$ فضائين منظمين على $\mathbb{C}$. نقول عن التطبيق $u$ لـ $E$ في $F$ إنه متراص إذا تحقق من أجل كل جزء محدود $B$ من $E$ كون $\overline{u(B)}$ متراصاً في $F$.

ينتج عن ذلك أن $\overline{u(B)}$ محدود وأن $u$ متصل حسب العلاقة (1.23).

يبرهن بسهولة أنه إذا سعت متتالية من التطبيقات المتراصة $\{u_n\}$ نحو تطبيق $u$ فإن هذا التطبيق متراص كذلك؛ وأن تركيب تطبيقين، $u$ متراص و $v$ متصل : $u \circ v$ متراص هو أيضاً. إن التطبيق الواحدي $Ix = x$ ليس متراصاً وبالتالي فإن التطبيق العكسي $u^{-1}$ لتطبيق متراص ليس محدوداً (وبالتالي ليس متصلاً) لأن $u^{-1} \circ u = I$ و $I$ ليس متراصاً.

يبرهن أن طيف المؤثر المتراص مؤلف من نقاط منفصلة $\{\lambda_n\}$ وأنه عدود على الأكثر. ولا يوجد إلا عدد منته $r$ من القيم الخاصة التي تتجاوز قيمتها المطلقة $|\lambda_i|$ $i = 1,2...r$ عدداً موجباً $\delta > 0$ معطى مسبقاً؛ وبالتالي فإن عدد المتجهات الخاصة المقابلة لنفس القيمة الخاصة $\lambda_i \neq 0$ عدد منته. وهكذا يمكن ترتيب طيف المؤثر المتراص $...\langle\lambda_n|...|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$ ؛ $|\lambda_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

## 2.3– المؤثرات المرافقة Adjoints

لندرس الحالة العامة التي نقابل فيها التطبيق الخطي، $u : E_1 \to E_2$ ؛ بين فضائين منظمين $u(x) = ux = y$ بتطبيق بين ثنويي هذين الفضائين $g : E_2' \to E_1'$

$$g(u(x)) = g(y) = f(x)$$

$$f \in E_1' \text{ ،} g \in E_2'$$

نكتب هذا الانتقال على شكل جداء داخلي

$$\langle f, x\rangle = \langle g, ux\rangle \qquad (3.3)$$

نرمز لـ $f$ بـ $u^\dagger g$ ونقول إن $u^\dagger$ هو التطبيق المرافق لـ $u$ ونكتب (3.3) على الشكل

$$\langle u^\dagger g, x\rangle = \langle g, ux\rangle \qquad (3.3)'$$

رأينا عندما يكون الفضاءان $E_1^n$ ، $E_2^m$ منتهيي الأبعاد، $n$ و $m$ أننا نعبر عن $u$ من أجل قاعدتين معينتين بالمصفوفة $a^i_j$،

$$y^i = a^i_j x^j \qquad (3.4)_1$$

ونكتب (3.3) على الشكل

$$f_j x^j = g_i y^i \qquad (3.3)''$$

نرى من "(3.3) و $(3.4)_1$ أننا نعبر عن $u^\dagger g = f$ بمنقول المصفوفة $u$

$$f_j = a^i_j g_i = \tilde{a}_j{}^i g_i \qquad (3.4)_2$$

يمكننا تكرار العملية '(3.3) من أجل تطبيقين $u : E_1 \to E_2$ و $v : E_2 \to E_3$ وبالتالي $f \in E_1'$ و $g \in E_2'$ و $h \in E_3'$ على الشكل

$$E_1 \overset{u}{\to} E_2 \overset{v}{\to} E_3 \quad \text{،} \quad v \circ u(x) \in E_3$$

لدينا من جهة

$$\langle h, v(ux)\rangle = \langle (vu)^\dagger h, x\rangle = \langle f, x\rangle$$

ومن جهة ثانية

$$\langle h, v(ux)\rangle = \langle v^\dagger h, ux\rangle$$

أي أن $g = v^\dagger h \in E_2'$ ومنه

$$= \langle g, ux\rangle = \langle u^\dagger g, x\rangle$$

$$= \langle u^\dagger v^\dagger h, x\rangle = \langle f, x\rangle$$

أي أن مرافق التطبيق المركب $v \circ u$ ونرمز له $(vu)^\dagger$ هو $u^\dagger v^\dagger$

$$(vu)^\dagger = u^\dagger v^\dagger \qquad (3.5)$$

يبين التعريف '(3.3) أنه إذا كان $I = u$ هو التطبيق المتطابق في $E_1$ فإن $g = u^\dagger g$ و $u^\dagger$ هو التطبيق المتطابق في $E'_1$ أي أن مرافق $I$ هو $I^\dagger$ :

$$\langle I^\dagger g, x\rangle = \langle g, Ix\rangle \qquad (3.3)''$$

نستنتج من هذه العلاقة والعلاقة (3.5) أنه في حال وجود تطبيق عكسي لـ $u$، $u^{-1}$ فإن

$$(uu^{-1})^\dagger = I^\dagger = (u^{-1})^\dagger u^\dagger$$

و

$$(u^{-1})^\dagger = (u^\dagger)^{-1} \qquad (3.6)$$

يبرهن أن نظيم التطبيق المرافق يساوي نظيم التطبيق

$$\|u^\dagger\| = \|u\|$$

كما يبرهن أن مرافق المؤثر المتراص متراص أيضاً.

لنر الآن كيف نعبر عن المؤثر المرافق في حال الفضاء الهيلبرتي – حيث النظيم ناتج عن الجداء السلمي، عن وجود شكل هرميتي :

ليكن $u_x \in \mathscr{H}'$ التطبيق الذي عرفناه بالعلاقة (2.20) وليكن $A$ مؤثراً في $\mathscr{H}$ نكتب العلاقة '(3.3) حيث يحل $A$ محل $u$، $u_x$ محل $g$ و $y$ محل $x$

$$\langle A^\dagger u_x, y\rangle = \langle u_x, Ay\rangle \equiv \langle x|Ay\rangle$$

ولكن التطبيق $\tilde{u} : x \to u_x$ هو تقايس لـ $\mathscr{H}$ في $\mathscr{H}'$، أي أن

$$\langle A^\dagger \tilde{u}x, y\rangle = \langle \tilde{u}x, Ay\rangle$$

لننتقل من $\mathscr{H}'$ إلى $\mathscr{H}$ من $u_x$ إلى $x$ بالتطبيق التقابلي المتقايس $\tilde{u}^{-1}$ حسب المبرهنة 2 فنحصل على

$$\langle \tilde{u}^{-1}A^\dagger \tilde{u}x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle \qquad (3.7)$$

أي أن المرافق للمؤثر $A$ في الفضاء الهيلبرتي هو $\tilde{u}^{-1}A^\dagger\tilde{u}$ الذي ينتمي هو أيضاً إلى فضاء المؤثرات الخطية في $\mathscr{H}$، نرمز له مع ذلك بـ $A^\dagger$ ونكتب (3.7) على الشكل

$$\langle A^\dagger x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle \qquad (3.8)$$

يمكن أن نرى مباشرة أن $\|A\| = \|A^\dagger\|$ انطلاقاً من متراجحة كوشي–شفارتز.

لنلاحظ كذلك أن

$$(\lambda A)^\dagger = \bar{\lambda} A^\dagger \qquad (3.9)$$

حيث $\bar{\lambda}$ العدد العقدي المرافق لـ $\lambda$.

**تعريف 17 :**

نقول عن مؤثر في فضاء هيلبرتي إنه مترافق ذاتي Self-adjoint أو إنه هرميتي إذا تحقق الشرط

$$A = A^{\dagger} \qquad (3.10)$$

أو حسب (3.8)

$$\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$$

يبين هذا التعريف أن القيم الخاصة لمؤثر مترافق ذاتي حقيقية وأن الفضاءات الجزئية الخاصة، ونرمز لها بـ $\mathscr{H}_\lambda$ متعامدة فيما بينها.

لدينا في الواقع، من أجل $Ax = \lambda x$ و $Ay = \mu y$ : $x \in E_\lambda$ ، $y \in E_\mu$ :

$$\langle x|Ax\rangle = \langle x|\lambda x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle = \langle \lambda x|x\rangle = \bar{\lambda}\langle x|x\rangle \text{ و } \lambda = \bar{\lambda} \qquad (3.11)$$

كذلك

$$\langle x|Ay\rangle = \langle x|\mu y\rangle = \mu\langle x|y\rangle = \langle Ax|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle \qquad (3.12)$$

ولا تتحقق المساواة $\mu\langle x|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$ حيث $\lambda \neq \mu$ إلا من أجل

$$\langle x|y\rangle = 0 \quad \text{و} \quad x \perp y$$

## 3.3– المؤثرات ذاتية الترافق المتراصة

**مبرهنة 3 :**

a) إن طيف المؤثر المترافق ذاتياً والمتراص في فضاء هيلبرتي طيف منفصل بحت.

b) تقع القيم الخاصة، وكلها حقيقية، في مجال مغلق $[m, M]$ من R حيث $m = \inf\limits_{\|x\|=1}\langle x|Ax\rangle$ و $M = \max\limits_{\|x\|=1}\langle x|Ax\rangle$.

c) الفضاءات الجزئية $\mathscr{H}_{\lambda_i}$ ، $\mathscr{H}_{\lambda_j}$ متعامدة من أجل $\lambda_i, \lambda_j \in Sp(A)$ و $\lambda_i \neq \lambda_j$

d) ليكن $A_\lambda = A - \lambda I$ حيث $\lambda \in Sp(A)$ ولتكن $A_\lambda(\mathscr{H})$ صورة التطبيق $A_\lambda$ في $\mathscr{H}$. يمكن عندئذ كتابة $\mathscr{H}$ على شكل جمع مباشر

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_\lambda \oplus \overline{A_\lambda(\mathscr{H})} \qquad (3.13)$$

تنتج a) عما قبلناه دون برهان من أجل المؤثرات المتراصة؛ أما b) فتنتج عن كون طيف المؤثر – أياً كان – مغلقاً، عن a) وعن العلاقة (3.11)؛ c) هي العلاقة (3.12).

**تعريف 17 :**

نقول عن مؤثر في فضاء هيلبرتي إنه مترافق ذاتي Self-adjoint أو إنه هرميتي إذا تحقق الشرط

$$A = A^{\dagger} \qquad (3.10)$$

أو حسب (3.8)

$$\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$$

يبين هذا التعريف أن القيم الخاصة لمؤثر مترافق ذاتي حقيقية وأن الفضاءات الجزئية الخاصة، ونرمز لها بـ $\mathscr{H}_\lambda$ متعامدة فيما بينها.

لدينا في الواقع، من أجل $Ax = \lambda x$ و $Ay = \mu y$ : $x \in E_\lambda$ ، $y \in E_\mu$ :

$$\langle x|Ax\rangle = \langle x|\lambda x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle = \langle \lambda x|x\rangle = \bar{\lambda}\langle x|x\rangle \text{ و } \lambda = \bar{\lambda} \qquad (3.11)$$

كذلك

$$\langle x|Ay\rangle = \langle x|\mu y\rangle = \mu\langle x|y\rangle = \langle Ax|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle \qquad (3.12)$$

ولا تتحقق المساواة $\mu\langle x|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$ حيث $\lambda \neq \mu$ إلا من أجل

$$\langle x|y\rangle = 0 \quad \text{و} \quad x \perp y$$

## 3.3– المؤثرات ذاتية الترافق المتراصة

**مبرهنة 3 :**

a) إن طيف المؤثر المترافق ذاتياً والمتراص في فضاء هيلبرتي طيف منفصل بحت.

b) تقع القيم الخاصة، وكلها حقيقية، في مجال مغلق $[m, M]$ من R حيث $m = \inf_{\|x\|=1}\langle x|Ax\rangle$ و $M = \max_{\|x\|=1}\langle x|Ax\rangle$.

c) الفضاءات الجزئية $\mathscr{H}_{\lambda_i}$ ، $\mathscr{H}_{\lambda_j}$ متعامدة من أجل $\lambda_i, \lambda_j \in Sp(A)$ و $\lambda_i \neq \lambda_j$

d) ليكن $A_\lambda = A - \lambda I$ حيث $\lambda \in Sp(A)$ ولتكن $A_\lambda(\mathscr{H})$ صورة التطبيق $A_\lambda$ في $\mathscr{H}$. يمكن عندئذ كتابة $\mathscr{H}$ على شكل جمع مباشر

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_\lambda \oplus \overline{A_\lambda(\mathscr{H})} \qquad (3.13)$$

تنتج a) عما قبلناه دون برهان من أجل المؤثرات المتراصة؛ أما b) فتنتج عن كون طيف المؤثر – أياً كان – مغلقاً، عن a) وعن العلاقة (3.11)؛ c) هي العلاقة (3.12).

لنلاحظ للبرهان على d) أن $A_\lambda$ مترافق ذاتياً؛ ليكن $y$ عنصراً من صورة $A_\lambda$ في $\mathscr{H}$ $y \in A_\lambda(\mathscr{H})$ أي أنها من الشكل $y = A_\lambda x'$. لدينا إذاً من أجل أي نقطة $x$ من النواة $x \in A_\lambda^{-1}(O)$ $(A_\lambda x = O)$، أي من أجل أي نقطة $x \in \mathscr{H}_\lambda$

$$\langle y|x\rangle = \langle A_\lambda x'|x\rangle = \langle x'|A_\lambda x\rangle = 0$$

وبما أن الجداء السلمي متصل فإن كانت $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ حيث $y_n \in A_\lambda(\mathscr{H})$ فإن

$$\langle y|x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle y_n|x\rangle = 0$$

و $y \in \overline{A_\lambda(\mathscr{H})}$ أي أن $\overline{A_\lambda(\mathscr{H})} \perp \mathscr{H}_\lambda$ وعلى العكس إذا كان $y \in A_\lambda(\mathscr{H})$ و $x$ متجهة ما تحقق العلاقة $\langle y|x\rangle = 0$ فإن $x \in \mathscr{H}_\lambda$

لدينا في الواقع

$$0 = \langle y|x\rangle = \langle A_\lambda x'|x\rangle = \langle x'|A_\lambda x\rangle$$

وبالتالي $A_\lambda x = 0$ و $x \in \mathscr{H}_\lambda$. وبهذا ننهي البرهان.

**<u>لازمة 1</u> :**

إن أي عدد عقدي هو قيمة منتظمة لـ $A$.

**<u>لازمة 2</u> :**

يمكن كتابة الفضاء $\mathscr{H}$ على الشكل

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\lambda_i \in Sp(A)} \mathscr{H}_{\lambda_i} \tag{3.14}$$

يكفينا أن نلاحظ أن الفضاءات الجزئية $\mathscr{H}_{\lambda_i}$ لا تتغير نتيجة تطبيق $A$ عليها $A\mathscr{H}_\lambda \subseteq \mathscr{H}_\lambda$ (نقول إنها مستقرة). وهذا حال الفضاء المغلق $\varepsilon$ الذي تولده هذه الفضاءات؛ $\varepsilon$ هو لصاق (Adherence) $\mathscr{H}_{\lambda_i}$. ليكن $F$ الفضاء الجزئي العمودي على $\varepsilon$، $\varepsilon \perp F$. إن $F$ مستقر بتطبيق $A$ : ليكن $y \in F$، $Ay \in F$ أيضاً لأنه أياً كان $x \in \varepsilon$ فإن $Ax \in \varepsilon$ وعليه

$$0 = \langle y|Ax\rangle = \langle Ay|x\rangle$$

و $Ay \in F$. إن اقتصار تطبيق $A$ على $F$ يعني وجود متجهات خاصة، واحدة على الأقل، وقيم خاصة ولكن متجهة خاصة في $F$ هي متجهة خاصة في $\mathscr{H}$ خلافاً لفرضنا أن $F$ عمودي على مجموعة المتجهات الخاصة وهكذا فإن $F = \{O\}$ و (3.14) محققة.

**<u>لازمة 3</u> :**

ليكن $P_\lambda$ المسقط على $\mathscr{H}_\lambda$ لدينا إذاً من (3.14)

$$I = \sum_{\lambda_i \in Sp(A)} P_{\lambda_i} \qquad (3.15)$$

نقول إن المسقِطات $P_{\lambda_i}$ تحلل الوحدة $I$. نختصر الكتابة عادة ونكتب

$$I = \sum_i P_i \qquad (3.15)'$$

ونكتب أي متجهة $x \in \mathscr{H}$ على الشكل

$$|x\rangle = I|x\rangle = \sum_i P_i|x\rangle \qquad (3.16)$$

لدينا من ناحية أخرى

$$|x\rangle = \sum_i a_i|x_i\rangle$$

حيث $x_i \in \mathscr{H}_{\lambda_i} = \mathscr{H}_i$ و $a_i = \langle x_i|x\rangle$ بفرض أن المتجهات $|x_i\rangle$ منظمة بالواحد $\|x_i\|^2 = \langle x_i|x_i\rangle = 1$ وهكذا فإن العلاقة السابقة تكتب

$$|x\rangle = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i|x\rangle \qquad (3.16)'$$

وبالمقارنة مع (3.16) نرى أن

$$I = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i| = \sum_i P_i \quad , \quad P_i|x\rangle = a_i|x_i\rangle \qquad (3.15)''$$

وهذا ما يتيح لنا كتابة المؤثر المترافق ذاتياً والمتراص من أجل أي متجهة على الشكل

$$A|x\rangle = \sum_i A|x_i\rangle\langle x_i|x\rangle = \sum_i \lambda_i|x_i\rangle\langle x_i|x\rangle \qquad (3.17)$$

$$= \sum_i \lambda_i P_i|x\rangle$$

أو

$$A = \sum_i \lambda_i P_i \qquad (3.18)$$

## 4.3- المؤثر الإسقاطي – المسقط

رأينا في القضية 12 ( §2.4) أن المسقِط تطبيق متصل نظيمه يساوي الواحد. سنجمع في القضية التالية خواص المسقط.

**قضية 13 :**

a) إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون مؤثر ما مؤثر إسقاط هو أن يكون مترافقاً ذاتياً ومتطابق القوة (Idempotent)، $P^2 = P$.

b) إن جداء مسقطين $P_1$ و $P_2$ مسقط في حالة واحدة فقط : إذا كان $[P_1, P_2] = 0$.

c) إن مجموع مسقطين $P_1$ و $P_2$ مسقط إذا كان $P_1P_2 = 0$ وفي هذه الحالة فقط. نقول عن المسقطين عندئذ إنهما متعامدان.

d) إن الفرق بين مسقطين $P_1 - P_2$ مسقط في حالة واحدة فقط هي $P_1P_2 = P_2$.

**البرهان :**

a) رأينا أنه يمكن كتابة متجهة ما $x$ على الشكل $x = x_1 + x_2$ ؛ $x = Px + x_2$ حيث $x_1 \perp x_2$ ، $x_2$ تنتمي إلى الفضاء الجزئي العمودي على الفضاء $Px$. لدينا إذاً من أجل أي متجهتين $x$ و $y = y_1 + y_2$

$$\langle Px|y\rangle = \langle x_1|y\rangle = \langle x_1|y_1 + y_2\rangle = \langle x_1|y_1\rangle$$

وكذلك

$$\langle x|Py\rangle = \langle x_1 + x_2|y_1\rangle = \langle x_1|y_1\rangle$$

ومنه $P = P^\dagger$

واضح أن $P(Px) = Px_1 = Px$ و $P^2 = P$.

لنبرهن الكفاية : لدينا بفرض $P = P^\dagger$ و $P^2 = P$

$$\|Px\|^2 = \langle Px|Px\rangle = \langle P^2x|x\rangle = \langle Px|x\rangle$$
$$\leq \|Px\| \cdot \|x\|$$

أي أن

$$\|P(x)\| \leq \|x\|$$

وبالتالي فإن $P$ مؤثر متصل نظيمه $\leq 1$ ؛ ونحصل على إشارة المساواة من أجل $Px = x$ ، أي من أجل $x \in F$ كما في القضية 12.

لنبرهن أن الفضاء الجزئي $F$ المؤلف من المتجهات $x_n \in \mathscr{H}$ التي تحقق $Px_n = x_n$ هو فضاء مغلق؛ أي أن $Px = x$ من أجل $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. لدينا

$$\|Px - x_n\| = \|P(x - x_n)\| \leq \|x - x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

وبالتالي $Px \to \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

وأخيراً، لدينا من أجل أي متجهة $z \in F$ ، $Pz = z$

$$\langle x - Px|z\rangle = \langle x - Px|Pz\rangle = \langle Px - P^2x|z\rangle = 0$$

لأن $Px = P^2x$ وبالتالي فإن كون $x - Px$ عمودياً على $F$ يعني أن $Px$ هو مسقط $x$ على $F$ (2.18).

b) إن الشرط $P_1P_2 = P_2P_1$ ضروري لكي يكون الجداء $P = P_1P_2$ مترافقاً ذاتياً. وهو كاف لكي يكون $P$ مترافقاً ذاتياً ومتطابق القوة. ليكن $F_1$ و $F_2$ الفضائين الجزئيين المعينين بـ $P_1$ و $P_2$ على الترتيب. إن $P$

هو المسقط على $F_1 \cap F_2$ وهكذا فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون هذان الفضاءان متعامدين هو أن يكون $P = P_1P_2 = 0$.

c) إذا كان $P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2$ فإن $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$؛ نضرب هذه المساواة على اليسار ثم على اليمين بـ $P_1$ لنجد أن $P_1P_2 = P_2P_1$ وأن $P_1P_2P_1 = 0$ ومنه $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ والشرط ضروري. وعلى العكس فإن تحقق هاتين العلاقتين يبين أن $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$ كما يبين أن $F_1 \perp F_2$ حيث $P_1x_1 \in F_1$ و $P_2x_2 \in F_2$ $(P_2P_1x = 0)$. نكتب إذاً من أجل كل $x \in \mathscr{H}$

$$Px = P_1x + P_2x = x_1 + x_2 \in F_1 \oplus F_2$$

وبالتالي فإن

$$\langle x - Px | Px \rangle = \langle Px - P^2x | x \rangle = 0$$

و $P$ هو المسقط على المجموع $F_1 \oplus F_2$.

يمكننا تعميم c من أجل أي مجموع مباشر هيلبرتي : $\sum_{i \in I} P_i$ هو مؤثر إسقاط إذا تحقق الشرط $P_iP_j = 0$ من أجل أي زوج من الأدلة $i, j$ في $I$.

d) لنلاحظ أن $I - P_F$ هو مسقط على الفضاء الجزئي المكمل لـ $F$ في $\mathscr{H}$ الذي نرمز له بـ

$$\mathscr{H} \ominus F$$

هذا يعني أن $I - (P_1 - P_2) = (I - P_1) + P_2$ مسقط حسب c) لأن $P_2 = P_1P_2$؛ وعلى العكس فإن تحقق هذا الشرط يعني أن $(I - P_1)P_2 = 0$ والمجموع $(I - P_1) + P_2$ مسقط حسب c)

و $P_1 - P_2 = I - [(I - P_1) + P_2]$ مسقط وهو المطلوب.

إن الشرط $P_2 = P_1P_2$ يعني أن $F_2 \subseteq F_1$، ومنه فإن $P_1 - P_2$ هو المسقط على $F_1 \ominus F_2$.

رأينا في الرقم السابق كيف نقسم الفضاء الهيلبرتي إلى جمع مباشر لعدد، عدود على الأكثر، من الفضاءات الجزئية تحددها المسقطات $P_{\lambda_i}$ المتوقفة على الأعداد المنفصلة الحقيقية $\lambda_i$ حيث $\lambda_i \in Sp(A)$. إلا أنه ما من شيء يمنع من القيام بنفس التجزئة عندما نريد دراسة الأطياف المتصلة بأخذ مسقطات تتوقف على الوسيط الحقيقي $\lambda \in [a, b]$ وتحليل الوحدة – أو تجزئتها كما فعلنا في (3.15). نقول إذاً إن جماعة المسقطات التابعة للوسيط $\lambda$ تشكل تحليلاً للوحدة أو إنها جماعة طيفية إذا حققت

a) $P_\lambda P_\mu = P_\nu$ حيث $\nu$ هو أصغر العددين $\lambda$ و $\mu$ و $\lambda, \mu, \nu \in [a, b]$.

b) $P_\lambda$ متصل على اليسار : $P_{\lambda-0} = P_\lambda$ من أجل كل $\lambda \in [a, b]$.

c) $P_a = 0$ و $P_b = I$.

تبين a) أن $P_\lambda P_\mu = P_\mu P_\lambda$ و أنه من أجل $\mu \geq \lambda$ :

$$P_\lambda - P_\mu = P_\lambda - P_\lambda P_\mu = P_\lambda (I - P_\mu) \geq 0 \quad (3.19)$$ [3]

$P_\lambda - P_\mu$ مسقط كما في الحالة d) من القضية 13 أعلاه.

c') إذا كان المجال $[a, b]$ لامتناه $[-\infty, +\infty]$ فإن c تستبدل بـ

$$P_\infty = \lim_{\lambda \to \infty} = I \qquad \text{و} \qquad P_{-\infty} = 0$$

هذان الحدان موجودان لأن $P_\lambda$ متتالية متزايدة (حسب c) من أجل الحد $+\infty$ من المؤثرات ذاتية الترافق والتبادلية حسب a) وتتبادل مع المؤثر الوحدة I التي يكبرها جميعاً؛ وهي الشروط التي تجعل هذا النوع من المؤثرات يتقارب بقوة[4] نحو المؤثر $I \; : \; P \leq I$. و $P_\lambda$ متناقصة من أجل الحد $-\infty$ وتخضع لنفس الشروط.

ليكن لدينا المجال نصف المفتوح : $\Delta = [\mu, \lambda[$ نرمز للمسقط حسب (3.19) على هذا المجال بـ $P(\Delta) = P_\lambda - P_\mu$. نرى بسهولة من a) أنه لدينا من أجل أي مجالين $\Delta_1 = [\mu_1, \lambda_1[$ و $\Delta_2 = [\mu_2, \lambda_2[$:

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta) \qquad \text{حيث} \qquad \Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$$

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = 0 \qquad \text{من أجل} \qquad \varnothing = \Delta_1 \cap \Delta_2$$

إن الجداء $P_{\lambda_2} - P_{\mu_1} = (P_{\lambda_1} - P_{\mu_1})(P_{\lambda_2} - P_{\mu_2})$ في حالة تقاطع المجالين ووقوع $\lambda_2$ على سبيل المثال في المجال $[\mu_1, \lambda_1[$ ويساوي الصفر في حالة كون $\lambda_2 < \mu_1$ على سبيل المثال. إن المسقطين $P(\Delta_1)$ و $P(\Delta_2)$ تبادليان وإذاً فـ $P(\Delta)$ مسقط.

يمكننا الآن أخذ المجالات $\Delta$ متناهية في الصغر $\Delta = [\lambda - \varepsilon, \lambda[$ وتعريف المسقط التفاضلي $dP_\lambda$ وكتابة المسقط الوحدة I على غرار ما فعلناه في (3.15) و "(3.15) من أجل العناصر المنفصلة $\lambda_i$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dP_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda\rangle \, d\lambda \langle\lambda| \quad (3.20)$$

كما يمكننا حساب تكامل ريمان ستيلتجس التالي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, dP_\lambda x \quad (3.21)$$

من أجل أي دالة متصلة $f : R \to \mathbb{C}$ وأي متجهة $x \in \mathscr{H}$.

يبرهن أن هذا التكامل يكافئ تعريف التكامل

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, d\langle P_\lambda y | x \rangle \quad (3.21)'$$

والقول إنه شكل خطي متصل بالمتغير y أو القول إن التكامل التالي منته

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\|P_\lambda x\|^2 < \infty \quad (3.21)''$$

---

[3] تعني هذه العلاقة أننا عرفنا المؤثر ذاتي الترافق الموجب وبالتالي استخلصنا علاقة ترتيب بين المؤثرات ذاتية الترافق الموجبة : نقول عن مؤثر ذاتي الترافق A إنه موجب إذا كان $\langle Ax|x \rangle \geq 0$ من أجل كل x و $A \geq B$ إذا كان $A - B$ موجباً.

[4] التقارب القوي للمؤثرات، هو التقارب بالنظيم $A_n \to A \Leftrightarrow \|A_n x - Ax\| \to 0$ من أجل كل $x \in \mathscr{H}$.

## 1.4- المؤثرات المغلقة

لنلاحظ منذ البداية أنه يستحيل في كثير من الأحيان تعريف المؤثر من أجل كل نقطة من نقاط الفضاء؛ ولنبدأ بإعطاء المثل البسيط التالي : ليكن لدينا الفضاء المتجهي للدالات المتصلة الحقيقية المعرفة على المجال $[0, 1]$. نرمز لهذا الفضاء بـ $X = C[0, 1]$. ولنعرف المؤثر الخطي $A : x \to \frac{dx}{dt}$ الذي يقابل الدالة المتصلة بمشتقها. ليست كل دالة متصلة قابلة للاشتقاق وبالتالي فإن $A$ ليس معرفاً على كل الفضاء $C[0, 1]$ وإنما على حيز منه هو المجموعة الجزئية المؤلفة من الدالات المتصلة قابلة الاشتقاق، نسمي هذا الحيز حيز $A$ ونرمز له بـ $D(A)$ : $C'[0, 1] = D(A) \subset C[0, 1]$. نعلم من حساب التفاضل الابتدائي أنه إذا سعت متتالية $\{x_n\}$ من الدالات قابلة الاشتقاق نحو دالة $x$ فإن $x \in D(A)$ و $\frac{dx}{dt} = \lim_{n\to N} \frac{dx_n}{dt}$ ونقول عن $A$ إنه مؤثر مغلق ولكنه غير متصل، غير محدود بعدد $k$ حسب (1.23) : يكفي أن نأخذ $x_n = t^n$ بنظيم $\|x_n\| = 1$ إن $\frac{t^n}{|t^n|}$. $\|Ax_n\| = \left\|\frac{dx_n}{dt}\right\| = n$ وبالتالي فـ $A$ غير محدود. لنعطي كمثل آخر مؤثر الوضع $Q$ في الفضاء الهيلبرتي $L_2$ بمتغير واحد $q$ :

$$Qx(q) = qx(q)$$

لدينا

$$\|Qx\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |q\,x(q)|^2\, dq$$

وهو أكبر من

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(q)}\, x(q)\, dq$$

والمؤثر $Q$ ليس محدوداً، أي ليس متصلاً.

وهكذا فإن مؤثرين أساسيين في الميكانيك الكمومي، الوضع والاندفاع، لا ينتميان إلى فئة المؤثرات المتصلة، وبالأولى المتراصة، وطيفا هذين المؤثرين، وغيرهما من المؤثرات ليست أطيافاً منفصلة. ومن جهة أخرى فإن كل المؤثرات المتصلة معرفة على الفضاء $\mathscr{H}$ كله (لن نبرهن على ذلك) ولذلك لسنا في حاجة إلى تعيين حيز التعريف من أجلها خلافاً للمثلين السابقين، حيث حيز تعريف التفاضل هو $D(A) \subset C[0, 1]$ في المثل الأول وحيز تعريف المؤثر $Q$ هو مجموعة المتجهات $x \in \mathscr{H}$ التي يكون من أجلها $qx(q) \in L_2$. علينا إذاً أن نعرف كل مرة حيز تعريف المؤثر وأن نضع على المؤثر قيوداً أقل صرامة من قيود الاتصال والتراص.

## 4. التحلل (التفكيك) الطيفي Spectral decomposition

### 1.4- المؤثرات المغلقة

لنلاحظ منذ البداية أنه يستحيل في كثير من الأحيان تعريف المؤثر من أجل كل نقطة من نقاط الفضاء؛ ولنبدأ بإعطاء المثل البسيط التالي : ليكن لدينا الفضاء المتجهي للدالات المتصلة الحقيقية المعرفة على المجال $[0, 1]$. نرمز لهذا الفضاء بـ $X = C[0, 1]$. ولنعرف المؤثر الخطي $A : x \to \frac{dx}{dt}$ الذي يقابل الدالة المتصلة بمشتقها. ليست كل دالة متصلة قابلة للاشتقاق وبالتالي فإن $A$ ليس معرفاً على كل الفضاء $C[0, 1]$ وإنما على حيز منه هو المجموعة الجزئية المؤلفة من الدالات المتصلة قابلة الاشتقاق، نسمي هذا الحيز حيز $A$ ونرمز له بـ $D(A)$ : $C^1[0, 1] = D(A) \subset C[0, 1]$. نعلم من حساب التفاضل الابتدائي أنه إذا سعت متتالية $\{x_n\}$ من الدالات قابلة الاشتقاق نحو دالة $x$ فإن $x \in D(A)$ و $\frac{dx}{dt} = \lim_{n \to N} \frac{dx_n}{dt}$ ونقول عن $A$ إنه مؤثر مغلق ولكنه غير متصل، غير محدود بعدد $k$ حسب (1.23) : يكفي أن نأخذ $x_n = t^n$ بنظيم $\|x_n\| = 1$ إن $\frac{t^n}{|t^n|}$. $\|Ax_n\| = \left\|\frac{dx_n}{dt}\right\| = n$ وبالتالي فـ $A$ غير محدود. لنعطي كمثل آخر مؤثر الوضع $Q$ في الفضاء الهيلبرتي $L_2$ بمتغير واحد $q$ :

$$Qx(q) = qx(q)$$

لدينا

$$\|Qx\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |q\, x(q)|^2\, dq$$

وهو أكبر من

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(q)}\, x(q)\, dq$$

والمؤثر $Q$ ليس محدوداً، أي ليس متصلاً.

وهكذا فإن مؤثرين أساسيين في الميكانيك الكمومي، الوضع والاندفاع، لا ينتميان إلى فئة المؤثرات المتصلة، وبالأولى المتراصة، وطيفا هذين المؤثرين، وغيرهما من المؤثرات ليست أطيافاً منفصلة. ومن جهة أخرى فإن كل المؤثرات المتصلة معرفة على الفضاء $\mathscr{H}$ كله (لن نبرهن على ذلك) ولذلك لسنا في حاجة إلى تعيين حيز التعريف من أجلها خلافاً للمثلين السابقين، حيث حيز تعريف التفاضل هو $D(A) \subset C[0, 1]$ في المثل الأول وحيز تعريف المؤثر $Q$ هو مجموعة المتجهات $x \in \mathscr{H}$ التي يكون من أجلها $qx(q) \in L_2$. علينا إذاً أن نعرف كل مرة حيز تعريف المؤثر وأن نضع على المؤثر قيوداً أقل صرامة من قيود الاتصال والتراص.

**تعريف 18 :**

ليكن D حيز تعريف المؤثر الخطي A في $\mathscr{H}$ (المؤثر الوحيد الذي يهمنا هنا)، ولتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة في D نحو عنصر ما $x \in \mathscr{H}$. ولنفرض أن $Ax_n \to y$ حيث $y \in \mathscr{H}$. نقول عن A إنه مغلق إذا كان $x \in D$ وكان $Ax = y$ : $x_n \to x$ تتضمن $Ax_n \to Ax$ – تماماً كما في حال المؤثر المشتق أعلاه.

لنلاحظ أن هذا التعريف محقق عندما يكون التطبيق A متصلاً في $D$ : $Ax_n \to Ax$. إن كل تطبيق متصل في D مغلق أيضاً والعكس ليس صحيحاً بطبيعة الحال.

لنلاحظ كذلك أن تقارب المتتالية $\{Ax_n\}$ ليس مضموناً. إن كل ما يقوله التعريف هو أنه في حال تقاربها نحو y فإن y وحيد $Ax = y$. أي أن المجموعتين $\{x_n\}$، $\{Ax_n = y_n\}$ مغلقتان وهذا ما نعبر عنه بقولنا إن المبيان (Graphe) $G(A) = \{(x_n, y_n) \in D \times D; y_n = Ax_n\}$ مغلق.

يمكننا أن نعرف علاقة ترتيب جديدة بين المؤثرات انطلاقاً من حيز تعريفها فنقول عن مؤثرين $A_1$ و $A_2$ إن $A_1 \subseteq A_2$ إذا كان حيز $A_1$ محتوى في حيز $A_2$، $D(A_1) \subseteq D(A_2)$ وكان $A_1x = A_2x$ من أجل كل $x \in D(A_1)$. نقول إن $A_2$ تمديد لـ $A_1$ أو إن $A_1$ قصر لـ $A_2$.

## 2.4– المؤثر المرافق، المؤثر المتناظر والمؤثر ذاتي الترافق

لم يعد من الممكن تعريف المؤثر المرافق بالسهولة التي عرفنا فيها (3.7) و (3.8) لأن حيز التعريف ليس منطبقاً على كل الفضاء $\mathscr{H}$ : ليكن D حيز تعريف المؤثر A وليكن لدينا الجداء السلمي $\langle y|Ax\rangle$ من أجل $x \in D(A)$ و $y \in \mathscr{H}$؛ والسؤال هل يوجد عنصر $y' \in \mathscr{H}$ يحقق العلاقة

$$\langle y'|x\rangle = \langle y|Ax\rangle \tag{4.1}$$

وهل هذا العنصر وحيد ؟ إذا كان هذا العنصر موجوداً ووحيداً فإننا سنسميه $y'$ ونكتب $A^{\dagger}y = y'$

$$\langle A^{\dagger}y|x\rangle = \langle y|Ax\rangle \tag{4.2}$$

ونقول إن $A^{\dagger}$ هو المؤثر المرافق لـ A.

**قضية 14 :**

إن الشر ط اللازم والكافي لوجود $A^{\dagger}$ هو أن يكون $\overline{D(A)} = \mathscr{H}$ (أي أن يكون حيز تعريف A كثيفاً حيثما كان في $\mathscr{H}$).

إن الشرط كاف لأن تحققه يعني أنه إذا وجدت متجهتان $y'$ و $y''$ تحققان العلاقة (4.1) فإن

$$\langle y' - y''|x\rangle = 0$$

وبالتالي $y' = y''$ والعنصر وحيد لأن المتجهة صفر هي المتجهة الوحيدة العمودية على $x$؛ وعلى العكس فإن (4.1) محققة من أجل $y' = y = 0$ ومحققة أيضاً، إذا تحققت من أجل متجهة ما $y'$، من أجل أي متجهة $y' + z$ حيث $z \perp x$، ولن تكون $y'$ وحيدة إلا إذا استحال وجود $z$ أي استحال وجود أي متجهة عمودية على $x$ عدا المتجهة O أي إذا كان $\overline{D(A)} = \mathscr{H}$ (الشرط اللازم).

إن حيز تعريف المؤثر المرافق $D(A^{\dagger})$ هو مجموعة $y \in \mathscr{H}$ التي يوجد من أجلها $y' \in \mathscr{H}$ تحقق العلاقة (4.1).

**ملاحظات :**

1- نرى بسهولة أن $A^{\dagger}$ خطي وأنه في حالة كون $B \subset A$ وفي حال وجود مرافق لـ B، فإن $B^{\dagger} \supset A^{\dagger}$ : إن $D(B) \subset D(A)$ وتبين (4.1) أن $y \in D(A^{\dagger})$ يعني أن $\langle y'|x\rangle = \langle y|Ax\rangle$ ولكن $Ax = Bx$ وبالتالي $\langle y'|x\rangle = \langle y|Bx\rangle$ و $y \in D(B^{\dagger})$. ثم إن وجود المرافق $B^{\dagger}$ يعني أن $\overline{D(B)} = \mathscr{H}$ مثله مثل $\overline{DA} = \mathscr{H}$.

2- نرى كذلك أن $A^{\dagger}$ مغلق لأن (4.1) تكافئ $\langle y'|x\rangle + \langle y|-Ax\rangle = 0$ أي أن الزوج $\{x, -Ax\}$ عمودي في $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ على الزوج $\{y', y\}$؛ لكن $\{x - Ax\}$ حيث $x \in D(A)$ هو فضاء جزئي من $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ وبالتالي فإن مكمل هذا الفضاء $(y', y)$ الذي هو مبيان $A^{\dagger}$ مغلق حسب القضية 12 و $A^{\dagger}$ مغلق.

3- لكن A ليس مغلقاً بالضرورة، إن حيز تعريفه كثيف في $\mathscr{H}$ ليس إلا، ومع ذلك لدينا

**تعريف 19 :**

نقول عن مؤثر A في $\mathscr{H}$، $\overline{D(A)} = \mathscr{H}$ إنه متناظر إذا تحقق $A^{\dagger} \supseteq A$ أي إذا كان $A^{\dagger}$ تمدداً لـ A ونقول عنه إنه ذاتي الترافق إذا كان $A^{\dagger} = A$. ومعنى هذا عندئذ أن A مغلق هو أيضاً.

4- أما إذا كان A المتناظر ونرمز له بـ T معرفاً في كل الفضاء $\mathscr{H}$، $D(T) = \mathscr{H}$ فإنه محدود (متصل) وذاتي الترافق. إن : $D(T) = \overline{D(T)} = \mathscr{H}$ حسب القضية 14 وعليه فـ T مغلق في كل الفضاء، مبيانه $G(A) = \{(x_n, y_n) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}\}$ مغلق. تقول مبرهنة المبيان (لن نبرهنها هنا) إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون المؤثر الخطي المعرف في كل الفضاء متصلاً هو أن يكون مبيانه مغلقاً. وأخيراً فإن $D(T) = \mathscr{H}$ تحول العلاقة $D(T^{\dagger}) \supseteq D(T)$ إلى $D(T^{\dagger}) = D(T)$ و $T^{\dagger} = T$.

واضح أن $T^{\dagger\dagger} = T$ :

$$\langle x|Ty\rangle = \langle T^{\dagger}x|y\rangle = \langle x|T^{\dagger\dagger}y\rangle$$

لنعد الآن إلى المثالين اللذين قدمناهما في مطلع هذا الرقم.

وبالتالي $y' = y''$ والعنصر وحيد لأن المتجهة صفر هي المتجهة الوحيدة العمودية على $x$، وعلى العكس فإن (4.1) محققة من أجل $y' = y = 0$ ومحققة أيضاً، إذا تحققت من أجل متجهة ما $y'$، من أجل أي متجهة $y' + z$ حيث $z \perp x$، ولن تكون $y'$ وحيدة إلا إذا استحال وجود $z$ أي استحال وجود أي متجهة عمودية على $x$ عدا المتجهة $O$ أي إذا كان $\overline{D(A)} = \mathscr{H}$ (الشرط اللازم).

إن حيز تعريف المؤثر المرافق $D(A^{\dagger})$ هو مجموعة $y \in \mathscr{H}$ التي يوجد من أجلها $y' \in \mathscr{H}$ تحقق العلاقة (4.1).

**ملاحظات :**

1- نرى بسهولة أن $A^{\dagger}$ خطي وأنه في حالة كون $B \subset A$ وفي حال وجود مرافق لـ $B$، فإن $B^{\dagger} \supset A^{\dagger}$ : إن $D(B) \subset D(A)$ وتبين (4.1) أن $y \in D(A^{\dagger})$ يعني أن $\langle y|Ax \rangle = \langle y'|x \rangle$ ولكن $Ax = Bx$ وبالتالي $\langle y|Bx \rangle = \langle y'|x \rangle$ و $y \in D(B^{\dagger})$. ثم إن وجود المرافق $B^{\dagger}$ يعني أن $\overline{D(B)} = \mathscr{H}$ مثله مثل $\overline{DA} = \mathscr{H}$.

2- نرى كذلك أن $A^{\dagger}$ مغلق لأن (4.1) تكافئ $\langle y'|x \rangle + \langle y|-Ax \rangle = 0$ أي أن الزوج $\{x, -Ax\}$ عمودي في $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ على الزوج $\{y', y\}$؛ لكن $\{x - Ax\}$ حيث $x \in D(A)$ هو فضاء جزئي من $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ وبالتالي فإن مكمل هذا الفضاء $(y', y)$ الذي هو مبيان $A^{\dagger}$ مغلق حسب القضية 12 و $A^{\dagger}$ مغلق.

3- لكن $A$ ليس مغلقاً بالضرورة، إن حيز تعريفه كثيف في $\mathscr{H}$ ليس إلا، ومع ذلك لدينا

**تعريف 19 :**

نقول عن مؤثر $A$ في $\mathscr{H}$، $\overline{D(A)} = \mathscr{H}$ إنه متناظر إذا تحقق $A^{\dagger} \supseteq A$ أي إذا كان $A^{\dagger}$ تمدداً لـ $A$ ونقول عنه إنه ذاتي الترافق إذا كان $A^{\dagger} = A$. ومعنى هذا عندئذ أن $A$ مغلق هو أيضاً.

4- أما إذا كان $A$ المتناظر ونرمز له بـ $T$ معرفاً في كل الفضاء $\mathscr{H}$، $D(T) = \mathscr{H}$ فإنه محدود (متصل) وذاتي الترافق. إن : $D(T) = \overline{D(T)} = \mathscr{H}$ حسب القضية 14 وعليه فـ $T$ مغلق في كل الفضاء، مبيانه $G(A) = \{(x_n, y_n) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}\}$ مغلق. تقول مبرهنة المبيان (لن نبرهنها هنا) إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون المؤثر الخطي المعرف في كل الفضاء متصلاً هو أن يكون مبيانه مغلقاً. وأخيراً فإن $D(T) = \mathscr{H}$ تحول العلاقة $D(T^{\dagger}) \supseteq D(T)$ إلى $D(T^{\dagger}) = D(T)$ و $T^{\dagger} = T$.

واضح أن $T^{\dagger\dagger} = T$ :

$$\langle x|Ty \rangle = \langle T^{\dagger}x|y \rangle = \langle x|T^{\dagger\dagger}y \rangle$$

لنعد الآن إلى المثالين اللذين قدمناهما في مطلع هذا الرقم.

## 3.4- المؤثران Q و P

إن الفضاء الهيلبرتي $L_2(-\infty, +\infty)$ هو فضاء الدالات ذات المربع الجموع بمعنى تكامل ليبيغ. إن هذا التكامل هو تكامل دالات درجية متزايدة أو متناقصة وليس من المطلوب من القارئ الفيزيائي معرفة خصائص الدالات الكمولة بهذا المعنى. كما أن تعيين الدالات القابلة للاشتقاق في $L_2$ ليس بالأمر الهين: إنها من فئة الدالات المتصلة إطلاقاً وهي بالتالي محدودة التغيرات – متكونة من الفرق بين دالتين رتيبتين غير متناقصتين وهي مواضيع لا يمكن الخوض فيها في كتاب معد للقارئ الفيزيائي قبل غيره. ولذا فإنه يمكن للقارئ رغم التبسيط في اختيار الدالات القفز في قراءة أولى على هذين المثالين اللذين يبرهنان على ذاتية ترافق Q و P، مؤثرا الوضع والاندفاع.

1- مؤثر الوضع Q في $L_2$ : $\mathscr{H} = L_2(-\infty, +\infty)$.

يبرهن في نظرية تكامل لوبيغ أن مجموعة الدالات الدرجية ذات الحامل المتراص (المعدومة خارج مجال محدود ومغلق) كثيفة في $L_2$. نرمز لهذه المجموعة بـ D. يحتوي حيز مؤثر الوضع $D(Q)$ هذه المجموعة لأن $qx(q) \in L_2$. لنبرهن أن Q ذاتي الترافق أي أن $Q^\dagger \subseteq Q$.

لنأخذ كدالة درجية الدالة المميزة Characteristic : الدالة $x(q)$ التي تساوي الواحد من أجل $q \in [\alpha, q_\circ]$ وتساوي الصفر خارج هذا المجال.

$$x(q) = 1 \quad \text{من أجل} \quad q \in [\alpha, q_\circ]$$

$$x(q) = 0 \quad \text{من أجل} \quad q \notin [\alpha, q_\circ]$$

تنتمي هذه الدالة إلى $D(Q)$ الذي يحتوي على D. لتكن $y \in D(Q^\dagger)$ أي أن $Q^\dagger y = y'$ ولنبرهن أن $y \in D(Q)$ :

لنكتب طرفي العلاقة

$$\langle y|qx\rangle = \langle y|Qx\rangle = \langle Q^\dagger y|x\rangle$$

على شكل تكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(q)}\, q\, x(q)\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y'(q)}\, x(q)\, dq \qquad (1)$$

ونظراً لأن $x(q)$ دالة مميزة فالتكامل هو

$$\int_{\alpha}^{q_\circ} \overline{q y(q)}\, dq = \int_{\alpha}^{q_\circ} \overline{y'(q)}\, dq$$

(q حقيقية). إن اشتقاق هذا التكامل بالنسبة للحد الأعلى $q_\circ$ يعطينا $q_\circ y(q_\circ) = y'(q_\circ)$ أي أن $y \in D(Q)$ و $D^\dagger(Q) \subseteq D(Q)$ وبالتالي $Q^\dagger = Q$ : مؤثر الوضع ذاتي الترافق.

2- مؤثر الاندفاع P في $L_2(-\infty, +\infty)$.

## 3.4- المؤثران Q و P

إن الفضاء الهيلبرتي $L_2(-\infty, +\infty)$ هو فضاء الدالات ذات المربع الجموع بمعنى تكامل لبيبغ. إن هذا التكامل هو تكامل دالات درجية متزايدة أو متناقصة وليس من المطلوب من القارئ الفيزيائي معرفة خصائص الدالات الكمولة بهذا المعنى. كما أن تعيين الدالات القابلة للاشتقاق في $L_2$ ليس بالأمر الهين: إنها من فئة الدالات المتصلة إطلاقاً وهي بالتالي محدودة التغيرات – متكونة من الفرق بين دالتين رتيبتين غير متناقصتين وهي مواضيع لا يمكن الخوض فيها في كتاب معد للقارئ الفيزيائي قبل غيره. ولذا فإنه يمكن للقارئ رغم التبسيط في اختيار الدالات القفز في قراءة أولى على هذين المثالين اللذين يبرهنان على ذاتية ترافق Q و P، مؤثرا الوضع والاندفاع.

1- مؤثر الوضع Q في $L_2$ : $\mathscr{H} = L_2(-\infty, +\infty)$.

يبرهن في نظرية تكامل لوبيغ أن مجموعة الدالات الدرجية ذات الحامل المتراص (المعدومة خارج مجال محدود ومغلق) كثيفة في $L_2$. نرمز لهذه المجموعة بـ D. يحتوي حيز مؤثر الوضع $D(Q)$ هذه المجموعة لأن $qx(q) \in L_2$. لنبرهن أن Q ذاتي الترافق أي أن $Q^\dagger \subseteq Q$.

لنأخذ كدالة درجية الدالة المميزة Characteristic : الدالة $x(q)$ التي تساوي الواحد من أجل $q \in [\alpha, q_\circ]$ وتساوي الصفر خارج هذا المجال.

$$x(q) = 1 \qquad \text{من أجل} \qquad q \in [\alpha, q_\circ]$$

$$x(q) = 0 \qquad \text{من أجل} \qquad q \notin [\alpha, q_\circ]$$

تنتمي هذه الدالة إلى $D(Q)$ الذي يحتوي على D. لتكن $y \in D(Q^\dagger)$ أي أن $Q^\dagger y = y'$ ولنبرهن أن $y \in D(Q)$ :

لنكتب طرفي العلاقة

$$\langle y|qx\rangle = \langle y|Qx\rangle = \langle Q^\dagger y|x\rangle$$

على شكل تكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(q)}\, q\, x(q)\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y'(q)}\, x(q)\, dq \qquad (1)$$

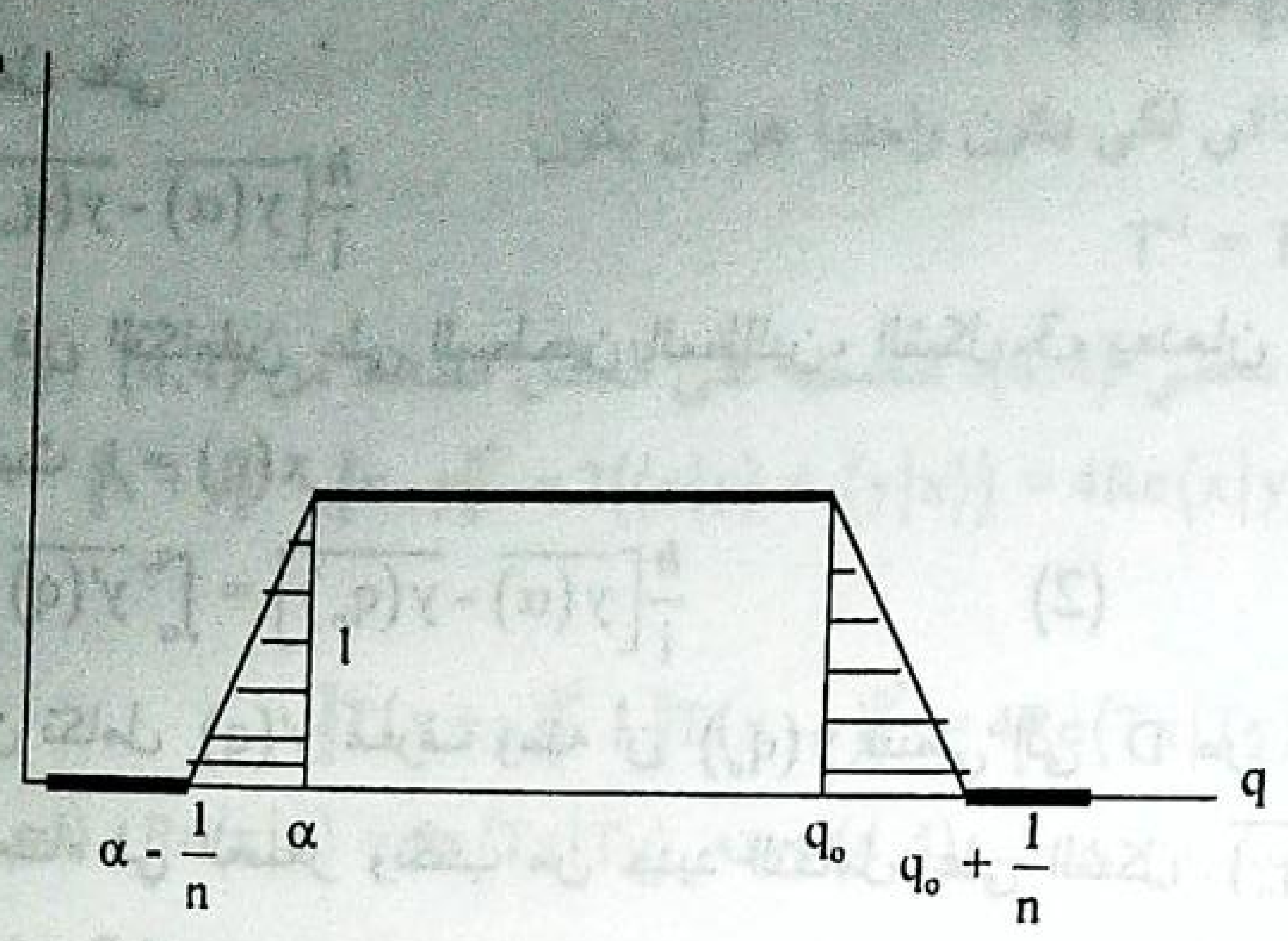
ونظراً لأن $x(q)$ دالة مميزة فالتكامل هو

$$\int_{\alpha}^{q_\circ} \overline{qy(q)}\, dq = \int_{\alpha}^{q_\circ} \overline{y'(q)}\, dq$$

(q حقيقية). إن اشتقاق هذا التكامل بالنسبة للحد الأعلى $q_\circ$ يعطينا $q_\circ y(q_\circ) = y'(q_\circ)$ أي أن $y \in D(Q)$ و $D^\dagger(Q) \subseteq D(Q)$ وبالتالي $Q^\dagger = Q$ : مؤثر الوضع ذاتي الترافق.

2- مؤثر الاندفاع P في $L_2(-\infty, +\infty)$.

سنأخذ كدالات متصلة وقابلة للاشتقاق في $L_2$ مجموعة الدالات D المعرفة على النحو التالي، الشكل.3:




الشكل.3

$x_n(q) = 1$ من أجل $q \in [\alpha, q_o]$

$x_n(q) = 0$ من أجل $q \le \alpha - \frac{1}{n}$ ،$q \ge q_o + \frac{1}{n}$

و $x_n$ خطية من أجل $q \in \left[\alpha - \frac{1}{n}, \alpha\right]$ و $q \in \left[q_o, q_o + \frac{1}{n}\right]$.

إن مجموعة التوافقات الخطية للدالات $x_n$، مع n، $\alpha$، $q_o$ مختلفة، كثيفة في $L_2$ $\overline{D} = L_2$؛ إنها حيز تعريف P وبالتالي فإن للمؤثر P مرافقاً $P^\dagger$. لنبرهن كما في المثال الأول أنه في حالة $(P^\dagger)$ $y \in D$، $y' = P^\dagger y$ فإن $y \in D(P)$ و $P^\dagger = P$ : لدينا من أجل $x \in D$

$$\langle y|Px\rangle = \langle P^\dagger y|x\rangle = \langle y'|x\rangle$$

التي نكتبها كما في العلاقة (1) أعلاه لنبين أن $y' \in Py$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(q)} \frac{\hbar}{i} \frac{dx(q)}{dq} \cdot dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y'(q)}\, x(q)\, dq$$

ونطبقها على المتجهة $x_n(q) \in D$؛ يصبح الطرف الأيسر نظراً لكون $\frac{dx}{dq}$ يساوي الصفر ماعدا في المجالين $\left[\alpha - \frac{1}{n}, \alpha\right]$ و $\left[q_o, q_o + \frac{1}{n}\right]$ حيث يساوي n أو n- على الترتيب

$$n\frac{\hbar}{i}\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} \overline{y(q)}\, dq - n\frac{\hbar}{i}\int_{q_o}^{q_o+\frac{1}{n}} \overline{y(q)}\, dq$$

إن مجالي التكامل، في هذين التكاملين، صغيران قدر ما نريد عندما تسعى n إلى اللانهاية بحيث يمكننا كتابة الأول على الشكل $\left(\alpha-\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)\right)\overline{y(\alpha)}$ والثاني على الشكل $\left(q_0+\frac{1}{n}-q_0\right)\overline{y\left(q_0+\frac{1}{n}\right)}$.

وجعل $n \to \infty$ فنحصل على

$$\frac{\hbar}{i}\left[\overline{y(\alpha)}-\overline{y(q_0)}\right]$$

أما في الطرف الأيمن فإن التكاملين على السطحين المظللين، الشكل.3، يعدمان بعضهما ولا يبقى إلا التكامل بين $\alpha$ و $q_0$ حيث $x(q)=1$

$$\frac{\hbar}{i}\left[\overline{y(\alpha)}-\overline{y(q_0)}\right]=\int_{\alpha}^{q_0}\overline{y'(q)}\,dq \qquad (2)$$

تبين متراجحة شفارتز أن تكامل $y'(q)$ معرف ومنه أن $y(q_0)$ تنتمي إلى D من أجل أي مجال منته. نأخذ المجال $[\alpha, q_0]$ متناه في الصغر ونكتب من جديد التكامل على الشكل $(q_0-\alpha)\overline{y'(q_0)}$، نأخذ المقادير العقدية المرافقة في 2 لنجد

$$\frac{\hbar}{i}\frac{y(q_0)-y(\alpha)}{q_0-\alpha}=y'(q_0)$$

أي أن

$$\frac{\hbar}{i}\frac{dy(q)}{dq}\bigg|_{q=q_0}=y'(q_0)$$

و $y \in D(P)$ وهو المطلوب.

## 4.4- المؤثرات الواحدية

نحتاج في الفيزياء الكمومية إضافة إلى المؤثرات ذاتية الترافق المعبرة عن المقادير الفيزيائية إلى مؤثرات أخرى تعبر عن قوانين الانحفاظ، عن عدم تغير الجداء السلمي نتيجة تطبيق مؤثر على المتجهات في $\mathscr{H}$ على غرار ما يفعله مؤثر الدوران في الفضاء الإقليدي العادي أو مؤثر لورانتس في فضاء مينكوفسكي، فضاء النسبية الخاصة.

**تعريف 20 :**

نقول عن مؤثر خطي متصل T في فضاء هيلبرتي $\mathscr{H}$ إنه متقايس إذا حافظ على الجداء السلمي :

$$\langle Ty|Tx\rangle=\langle y|x\rangle \qquad (4.3)$$

أياً كان $x, y \in \mathscr{H}$.

وبشكل خاص نقول عنه إنه واحدي إذا كان غامراً Surjective (صورة التطبيق هي كل الفضاء $\mathscr{H}$).

**قضية 15 :**

a– إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون مؤثر ما T متقايساً هو أن يتحقق

$$\|Tx\| = \|x\| \qquad (4.4)$$

b– والشرط اللازم والكافي لكي يكون واحدياً هو أن يكون

$$T^{-1} = T^{\dagger} \qquad (4.5)$$

a : واضح أن (4.3) تعطي (4.4). لنحسب على العكس انطلاقاً من (4.4) $\langle x|y \rangle$؛ لدينا من جهة

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle) = 4\mathrm{Re}\langle x|y\rangle$$

ومن جهة أخرى

$$\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = 4\mathrm{Re}\langle Tx|Ty\rangle$$

الطرفان الأيسران متساويان حسب (4.4) ومنه $\mathrm{Re}\langle x|y\rangle = \mathrm{Re}\langle Tx|Ty\rangle$، نقوم بنفس البرهان من أجل الحد التخيلي باستبدال y بـ iy ومنه a -

b : إن $T^{-1}$ موجود لأن (4.4) تبين أن نواة التطبيق T مكونة من المتجهة صفر فقط والتطبيق تقابلي. إن حيز تعريف $T^{-1}$ هو $\mathscr{H}$ كله تعريفاً. مبيان T مغلق حسب مبرهنة المبيان ولـ T مرافق $T^{\dagger}$. ترينا (4.3) أن

$$T^{\dagger} = T^{-1} \qquad \text{و} \qquad TT^{\dagger} = I$$

لأن $T^{\dagger} - T^{-1} = (T^{\dagger} - T^{-1})TT^{-1} = 0$ .

وعلى العكس فإن (4.5) تعني أن $TT^{\dagger} = I$ والجداء السلمي منحفظ. كما تبين أن التطبيق T غامر لأن صورة T $D(T^{\dagger}) = D(T^{-1}) = \mathscr{H}$ و $D(T^{-1})$ هي صورة $T^{-1}$. ينتج عن (4.5) : $T^{\dagger}T = I$، إن مربع القيمة المطلقة لقيمة خاصة للمؤثر الواحدي يساوي الواحد دوماً $Tx = \alpha x$، $T^{\dagger}x = \bar{\alpha}x$ و $\alpha^2 = \bar{\alpha}\alpha = 1$.

لنعطي هنا مثالين هامين عن المؤثرات الواحدية، أولهما ذو طابع هندسي يرتبط بعدم تغير الجداء السلمي نتيجة "الانسحاب"، كما في الفيزياء التقليدية والنسبوية عندما يتعلق الأمر بالانسحاب في الفضاء التقليدي أو فضاء مينكوفسكي، وثانيهما يتعلق بالتعبير عن الموجة، بنشرها، بواسطة الأمواج المستوية : تحويلات فوريي.

**المثال 1 :**

تحويل فوريي : ليكن $x(q) \in L_2(-\infty, +\infty)$ . يُبرهن أن المتتالية بالمتغير p

$$\chi_n(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-n}^{+n} e^{-ipq} x(q)\, dq \qquad (4.6)$$

تسعى، عندما $n \to \infty$ في $L_2(-\infty, +\infty)$، إلى متجهة $\chi(p)$، نسميها تحويل فوريي للمتجهة $x \subset L_2(q)$ . إن هذا التحويل خطي، نرمز له بـ F ونكتب

**قضية 15 :**

a- إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون مؤثر ما $T$ متقايساً هو أن يتحقق

$$\|Tx\| = \|x\| \tag{4.4}$$

b- والشرط اللازم والكافي لكي يكون واحدياً هو أن يكون

$$T^{-1} = T^{\dagger} \tag{4.5}$$

a : واضح أن (4.3) تعطي (4.4). لنحسب على العكس انطلاقاً من (4.4) $\langle x|y\rangle$؛ لدينا من جهة

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle) = 4\mathrm{Re}\langle x|y\rangle$$

ومن جهة أخرى

$$\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = 4\mathrm{Re}\langle Tx|Ty\rangle$$

الطرفان الأيسران متساويان حسب (4.4) ومنه $\mathrm{Re}\langle x|y\rangle = \mathrm{Re}\langle Tx|Ty\rangle$، نقوم بنفس البرهان من أجل الحد التخيلي باستبدال $iy$ بـ $y$ ومنه $a$ -

b : إن $T^{-1}$ موجود لأن (4.4) تبين أن نواة التطبيق $T$ مكونة من المتجهة صفر فقط والتطبيق تقابلي. إن حيز تعريف $T^{-1}$ هو $\mathscr{H}$ كله تعريفاً. مبيان $T$ مغلق حسب مبرهنة المبيان ولـ $T$ مرافق $T^{\dagger}$. ترينا (4.3) أن

$$T^{\dagger} = T^{-1} \quad \text{و} \quad TT^{\dagger} = I$$

لأن $T^{\dagger} - T^{-1} = (T^{\dagger} - T^{-1})TT^{-1} = 0$.

وعلى العكس فإن (4.5) تعني أن $TT^{\dagger} = I$ والجداء السلمي منحفظ. كما تبين أن التطبيق $T$ غامر لأن صورة $T$ $\mathscr{H} = D(T^{\dagger}) = D(T^{-1})$ و $D(T^{-1})$ هي صورة $T^{-1}$. ينتج عن (4.5) : $T^{\dagger}T = I$، إن مربع القيمة المطلقة لقيمة خاصة للمؤثر الواحدي يساوي الواحد دوماً $Tx = \alpha x$، $T^{\dagger}x = \bar{\alpha}x$ و $\alpha^2 = \bar{\alpha}\alpha = 1$.

لنعطي هنا مثالين هامين عن المؤثرات الواحدية، أولهما ذو طابع هندسي يرتبط بعدم تغير الجداء السلمي نتيجة "الانسحاب"، كما في الفيزياء التقليدية والنسبوية عندما يتعلق الأمر بالانسحاب في الفضاء التقليدي أو فضاء مينكوفسكي، وثانيهما يتعلق بالتعبير عن الموجة، بنشرها، بواسطة الأمواج المستوية : تحويلات فوريي.

**المثال 1 :**

تحويل فوريي : ليكن $x(q) \in L_2(-\infty, +\infty)$. يُبرهن أن المتتالية بالمتغير $p$

$$\chi_n(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-n}^{+n} e^{-ipq} x(q)\, dq \tag{4.6}$$

تسعى، عندما $n \to \infty$ في $L_2(-\infty, +\infty)$، إلى متجهة $\chi(p)$، نسميها تحويل فوريي للمتجهة $x \subset L_2(q)$. إن هذا التحويل خطي، نرمز له بـ $F$ ونكتب

$$\chi(p) = F\,x(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipq}\,x(q)\,dq \qquad (4.6)'$$

لنبرهن أن $F$ مؤثر واحدي

$$\|\chi(p)\|^2 = \|F\,x(q)\|^2 = \|x(q)\|^2 \qquad (4.7)$$

لنبرهن إذاً أن الطرف الأيسر هو مربع نظيم $x$ :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(q'-q)}\,\overline{x(q')}\,x(q)\,d'q\,dq\,dp$$

إن "دالة" ديراك المعرفة على الشكل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(q'-q)\,\varphi(q')\,dq' = \varphi(q) \qquad (4.8)$$

والتي تعطي من جهة أخرى

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(q'-q)}dp \equiv \delta(q'-q) \qquad (4.9)$$

تختزل هذا التكامل إلى $\|x(q)\|^2$، وهكذا فإن $F$ يحقق الشرط $a$ من القضية 15. يُبرهن بنفس الشكل أن المتتالية بالمتغير $q$

$$x_n(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-n}^{+n} e^{ipq}\chi(p)\,dp$$

تسعى، عندما $n \to \infty$، إلى $x(q)$. فالمتحول العكسي لـ $F$ موجود : $F^{-1}\chi(p) = x(q)$

$$x(q) = F^{-1}\chi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq}\chi(p)\,dp \qquad (4.10)$$

ومتقايس حسب (4.7).

ولـ $F$ مرافق $F^{-1} = F^{\dagger}$ وتحويل فوريي واحدي.

<u>المثال 2</u> : الانسحاب ببعد واحد

ليكن $T_a$ المؤثر الذي ينقل المتجهة $x(q) = L_2(-\infty, +\infty)$ من الوضع $q$ إلى الوضع $q-a$

$$T_a x(q) = x(q-a) = x(q) - a\left.\frac{\partial x}{\partial q}\right|_{q=a}$$

ولكن المؤثر التفاضلي $\frac{\partial}{\partial q}$ متناسب مع مؤثر الاندفاع $p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ – أخذنا هنا كلمة الاندفاع بالمعنى العام كاشتقاق بالنسبة للوضع بمعناه العام – أي أن

$$T_a x(q) = \left(I - \frac{i}{\hbar}aP\right)x(q)$$

والمؤثر $P$ هو مولد الانسحاب (I.6.§2.2)

$$T_a x(q) = e^{-\frac{i}{\hbar}aP}\,x(q) = x'(q) \qquad (4.11)$$

$$\chi(p) = F\,x(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipq}x(q)\,dq \qquad (4.6)'$$

لنبرهن أن F مؤثر واحدي

$$\|\chi(p)\|^2 = \|F\,x(q)\|^2 = \|x(q)\|^2 \qquad (4.7)$$

لنبرهن إذاً أن الطرف الأيسر هو مربع نظيم x :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(q'-q)}\overline{x(q')}\,x(q)\,d'q\,dq\,dp$$

إن "دالة" ديراك المعرفة على الشكل

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(q'-q)\,\varphi(q')\,dq' = \varphi(q) \qquad (4.8)$$

والتي تعطي من جهة أخرى

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(q'-q)}dp \equiv \delta(q'-q) \qquad (4.9)$$

تختزل هذا التكامل إلى $\|x(q)\|^2$، وهكذا فإن F يحقق الشرط a من القضية 15. يُبرهن بنفس الشكل أن المتتالية بالمتغير q

$$x_n(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-n}^{+n} e^{ipq}\chi(p)\,dp$$

تسعى، عندما $n \to \infty$، إلى $x(q)$. فالمتحول العكسي لـ F موجود : $F^{-1}\chi(p) = x(q)$

$$x(q) = F^{-1}\chi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq}\chi(p)\,dp \qquad (4.10)$$

ومتقايس حسب (4.7).

ولـ F مرافق $F^{-1} = F^{\dagger}$ وتحويل فوريي واحدي.

__المثال 2__ : الانسحاب ببعد واحد

ليكن $T_a$ المؤثر الذي ينقل المتجهة $x(q) = L_2(-\infty, +\infty)$ من الوضع q إلى الوضع $q-a$

$$T_a x(q) = x(q-a) = x(q) - a\left.\frac{\partial x}{\partial q}\right|_{q=a}$$

ولكن المؤثر التفاضلي $\frac{\partial}{\partial q}$ متناسب مع مؤثر الاندفاع $p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ – أخذنا هنا كلمة الاندفاع بالمعنى العام كاشتقاق بالنسبة للوضع بمعناه العام – أي أن

$$T_a x(q) = \left(I - \frac{i}{\hbar}aP\right)x(q)$$

والمؤثر P هو مولد الانسحاب (I.6.§2.2)

$$T_a x(q) = e^{-\frac{i}{\hbar}aP}x(q) = x'(q) \qquad (4.11)$$

واضح أن $T_a$ متقايس وأن $T_a^{-1}x'(q) = e^{\frac{i}{\hbar}aP}x(q)$ ؛ $T^{-1}$ موجود ويساوي $T_a^{\dagger} = e^{\frac{i}{\hbar}aP}$ لأن $P^{\dagger} = P$ ومؤثر الانسحاب واحدي.

## 5.4– التمثيل الطيفي للمؤثرات ذاتية الترافق

يمكننا كتابة المؤثر ذاتي الترافق A على غرار ما فعلناه من أجل المؤثر ذاتي الترافق المتراص، $A = \sum \lambda_i P_i$ (3.18)، بأن نكتب A مستعينين بتجزئة الوحدة (3.20) على الشكل التالي

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_\lambda \qquad (4.12)$$

سنعطي البرهان على هذه العلاقة كتمرين عن كيفية التعامل مع تجزئة الوحدة والاسقاط على مجال معين، كذلك مع تكامل ريمان ستيتجليس (3.21).

**قضية 16 :**

لتكن $\lambda \to f(\lambda)$ دالة متصلة معرفة على R، قيمها حقيقية وليكن $D \in \mathscr{H}$ حيزاً من $\mathscr{H}$ معرفاً بالعلاقة

$$D = \left\{ x \in \mathscr{H} : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|P_\lambda x\|^2 < \infty \right\} \qquad (4.13)$$

أي أنه مجموعة المتجهات x التي تحقق التكاملات (3.21)، '(3.21)، "(3.21).

إن D كثيف في $\mathscr{H}$ ويعرف مؤثراً ذاتي الترافق T (حيز تعريفه D) تعطيه العلاقة

$$\langle Tx|y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\langle P_\lambda x|y \rangle \qquad (4.14)$$

أياً كان $y \in \mathscr{H}$ و $x \in D$

ولدينا $TP_\lambda \supset P_\lambda T$ : $TP_\lambda$ تمديد لـ $P_\lambda T$.

**البرهان :**

يوجد أياً كانت المتجهة $y \in \mathscr{H}$، عدد موجب صغير قدر ما نريد، $\varepsilon > 0$، كما يوجد، من أجل أي مقدارين $\alpha$ و $\beta$ $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ مسقط $P(\Delta) = P_\beta - P_\alpha$ بحيث تكون المتجهة $P(\Delta)y$ قريبة قدر ما نريد من y

$$\|y - P(\Delta)y\| < \varepsilon$$

لدينا التكامل التالي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|P_\lambda P(\Delta)y\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|P_\lambda y\|^2 < \infty \qquad (4.14)'$$

الذي يعني أن $P(\Delta)y \in D$؛ ولكننا اخترنا $P(\Delta)y$ لتتناهى نحو $y$ و $y$ هي حسب الخاصة 'c، التي أوردناها في آخر الفقرة 3، للمسقط، $(P_\infty = I)$، $y = P_\infty y = \lim\limits_{\beta\to\infty} P_\beta y$، وتنتمي إذاً إلى $D$. وهكذا فإن $D$ مغلق، وكثيف في $\mathscr{H}$ لأن $y$ متجهة لا على التعيين من $\mathscr{H}$. لنبين الآن أن $T$ متناظر؛ أن $\langle y|Tx\rangle = \overline{\langle Tx|y\rangle} = \langle T^\dagger y|x\rangle$.

لنحسب إذاً

$$\overline{\langle Tx|y\rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)}\, d\overline{\langle P_\lambda x|y\rangle}$$

آخذين بعين الاعتبار أن $f(\lambda)$ حقيقية

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\langle y|P_\lambda x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\langle P_\lambda y|x\rangle$$

$$\equiv \langle T^\dagger y|x\rangle$$ و $T$ متناظر

ليكن $D(T^\dagger)$ حقل تعريف $T^\dagger$ وليكن $y \in D(T^\dagger)$ و $y' = T^\dagger y$. إن $P(\Delta)Z \in D$ أياً كانت $Z \in \mathscr{H}$.

ولدينا

$$\langle Z|P(\Delta)y'\rangle = \langle P(\Delta)Z|y'\rangle = \langle P(\Delta)Z|T^\dagger y\rangle$$

ومن (4.14) و'(4.14)

$$= \langle TP(\Delta)Z|y\rangle = \int_\alpha^\beta f(\lambda)\, d\langle P_\lambda Z|y\rangle$$

يتناهى هذا التكامل من أجل $-\infty \to \alpha$ و $+\infty \to \beta$ إلى

$$\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}} \langle Z|P(\Delta)y'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\langle P_\lambda Z|y\rangle = F(Z)$$

$F(Z)$ شكل خطي متصل بالمتغير $Z$ ولذا فهو يكافئ العلاقة "(3.21) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\|P_\lambda y\|^2 < \infty$$

و $y \in D$ حسب (4.13)؛ إذاً $D(T^\dagger) \supseteq D(T)$ ولكن $D(T) \supseteq D(T^\dagger)$ لأن $T$ متناظر ومنه $T = T^\dagger$ و $T$ ذاتي الترافق

ليكن لدينا أخيراً $x \in D(T)$ ولنطبق المسقط $P_\mu$ على الجموع الريمانية التي تعطي $Tx$

$$Tx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x$$

$$P_\mu Tx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d(P_\mu P_\lambda x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d(P_\lambda P_\mu x)$$

لأن $P_\mu P_\lambda = P_\lambda P_\mu$ حسب القاعدة a) من تعريف الاسقاط

$$= TP_\mu x$$

ومنه $TP_\mu \supset P_\mu T$ وينتهي البرهان.

**لازمة :**

نعرف المؤثر ذاتي الترافق A وفق العلاقة (4.14) بأخذ $f(\lambda) = \lambda$

$$\langle Ax|y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\langle P_\lambda x|y\rangle \quad (4.15)$$

حيث حيز تعريفه

$$D(A) = \left\{x \in \mathscr{H};\ \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|P_\lambda x\|^2 < \infty\right\}$$

ونكتب (4.15) رمزياً على الشكل (4.12) المقابل لـ (3.18) عندما يكون المؤثر ذاتي الترافق متراصاً. نقول إن (4.12) هي التمثيل الطيفي للمؤثر ذاتي الترافق A. (4.15) و (4.12) تبرران كتابتنا للمؤثر I على الشكل (3.20)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dP_\lambda$$

يمكننا انطلاقاً من (4.15) تعريف المؤثر ذاتي الترافق $A^n$ وأي كثير حدود $\mathscr{P}_n(A)$ وبالتالي أي دالة متصلة $f(A)$ إذا كانت f دالة متصلة عقدية معرفة على R على الشكل الآتي

$$\langle A^n x|y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n d\langle P_\lambda x|y\rangle \quad (4.16)$$

وحيز تعريف $A^n$ هو كل $x \in \mathscr{H}$ تحقق

$$D(A^n) = \left\{x \in \mathscr{H} : \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2n} d\|P_\lambda x\|^2 < \infty\right\}$$

و $\mathscr{P}_n(A)$ بالعلاقة

$$\langle \mathscr{P}_n(A)x|y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{P}_n(\lambda)\, d\langle P_\lambda x|y\rangle \quad (4.17)$$

نكتب أخيراً $f(A) = T$ ونعرفه بالعلاقة (4.14)

$$\langle f(A)x|y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\langle P_\lambda x|y\rangle \quad (4.18)$$

**قضية 17** : (بدون برهان).

يتألف طيف المؤثر ذاتي الترافق A في $\mathscr{H}$ من فئتين، طيف نقطي (نقاط منفصلة) نرمز له بـ $\sigma_P(A)$ وطيف متصل نرمز له بـ $\sigma_C(A)$ ونكتب

$$\text{Sp}\,A = \sigma_P(A) \cup \sigma_C(A) \subset R$$

i) تنتمي النقطة $\lambda_0$ إلى الطيف النقطي إذا كان $P_{\lambda_0+\varepsilon} \neq P_{\lambda_0}$ (أي إذا كانت $\lambda_0$ نقطة انقطاع للدالة $P_\lambda$) وفي هذه الحالة فقط. ويتكون الفضاء الجزئي المقابل لـ $\lambda_0$ من $P_{\lambda_0+\varepsilon} - P_{\lambda_0}$.

ii) $\lambda_0 \in \sigma_C(A)$ إذا، وإذا فقط تحقق الشرطان

1) $P_{\lambda_0+\varepsilon} = P_{\lambda_0}$

2) $P_{\lambda_o+\varepsilon} \neq P_{\lambda_o-\varepsilon}$ أياً كان $\varepsilon > 0$

أما إذا كان $P_{\lambda_o+\varepsilon} = P_{\lambda_o}$ وبقي ثابتاً $P_\lambda = P_{\lambda_o}$ في جوار $\lambda_o$ فإن $\lambda_o$ لا تنتمي إلى الطيف؛ إنها قيمة منتظمة، حل للمحال $(A - \lambda_o I)^{-1}$.

## 6.4– التمثيل الطيفي للمؤثر الواحدي ، تمثيل P

رأينا أن القيم الخاصة للمؤثر الواحدي عقدية وقيمتها المطلقة تساوي الواحد. نستبدل في القضية 16 $f(\lambda)$ ذات القيم العقدية بـ $f(\lambda)$ ذات القيم الحقيقية ونكتب التمثيل الطيفي للمؤثر الواحدي، نرمز له بـ U، كما في (4.12)

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dP_\theta \qquad (4.19)$$

سنرمز لتحويل فوريي العكسي $F^{-1}$ المعرف بـ (4.10) بالرمز U ونكتب

$$(4.10)' \quad x(q) = U\chi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} \chi(p)\, dp$$

ولنرمز بـ $P_\lambda$ للتحليل الطيفي للمؤثر Q

$$P_\lambda x(q) = \begin{cases} x(q) & q \le \lambda \text{ من أجل} \\ 0 & q > \lambda \text{ من أجل} \end{cases} \qquad (4.20)$$

يعطينا هذا التحليل الطيفي تحليل مؤثر الاندفاع **p** ولنرمز له بـ $P'_\lambda$. إنه على غرار (4.20)

$$P'_\lambda \chi(p) = \begin{cases} \chi(p) & p \le \lambda \text{ من أجل} \\ 0 & p > \lambda \text{ من أجل} \end{cases}$$

أي أن

$$P'_\lambda \chi(p) = \chi(p) = Ux(q) = UP_\lambda x(q) = U P_\lambda U^{-1} \chi(p)$$

و

$$P'_\lambda = U P_\lambda U^{-1} \qquad (4.21)$$

ومن جهة أخرى فإن مؤثر الاندفاع هو $\frac{1}{i}\frac{d}{dq}$ (أخذنا $\hbar = 1$) وبالتالي

$$\mathbf{p}\, x(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} p\, \chi(p)\, dp$$

(لهذا التكامل معنى إذا كانت الدالتان $\chi(p)$ و $p\,\chi(p)$ تنتميان في الوقت ذاته إلى $L_2$ و $L_1$)

$$= U(p\,\chi(p))$$

ولكن

$Q\,\chi(p) = p\,\chi(p)$ وفق تعريف مؤثر الوضع ومنه

$$\mathbf{p}\, x(q) = U\,Q\,\chi(p) = U\,Q\,U^{-1} x(q)$$

ونحصل على الشكل التكاملي لـ (4.21)

2) $P_{\lambda_0+\varepsilon} \neq P_{\lambda_0-\varepsilon}$ أياً كان $\varepsilon > 0$

اما إذا كان $P_{\lambda_0+\varepsilon} = P_{\lambda_0}$ ويبقى ثابتاً $P_\lambda = P_{\lambda_0}$ في جوار $\lambda_0$ فإن $\lambda_0$ لا تنتمي إلى الطيف؛ إنها قيمة منتظمة، حل للمحلل $(A - \lambda_0 I)^{-1}$.

## 6.4- التمثيل الطيفي للمؤثر الواحدي ، تمثيل P

رأينا أن القيم الخاصة للمؤثر الواحدي عقدية وقيمتها المطلقة تساوي الواحد. نستبدل في القضية 16 $f(\lambda)$ ذات القيم العقدية بـ $f(\lambda)$ ذات القيم الحقيقية ونكتب التمثيل الطيفي للمؤثر الواحدي، نرمز له بـ U، كما في (4.12)

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dP_\theta \qquad (4.19)$$

سنرمز لتحويل فورييه العكسي $F^{-1}$ المعرف بـ (4.10) بالرمز U ونكتب

$$(4.10)' \quad x(q) = U\chi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} \chi(p)\, dp$$

ولنرمز بـ $P_\lambda$ للتحليل الطيفي للمؤثر Q

$$P_\lambda x(q) = \begin{cases} x(q) & q \le \lambda \quad \text{من أجل} \\ 0 & q > \lambda \quad \text{من أجل} \end{cases} \qquad (4.20)$$

يعطينا هذا التحليل الطيفي تحليل مؤثر الاندفاع **p** ولنرمز له بـ $P'_\lambda$. إنه على غرار (4.20)

$$P'_\lambda \chi(p) = \begin{cases} \chi(p) & p \le \lambda \quad \text{من أجل} \\ 0 & p > \lambda \quad \text{من أجل} \end{cases}$$

أي أن

$$P'_\lambda \chi(p) = \chi(p) = Ux(q) = UP_\lambda x(q) = U P_\lambda U^{-1} \chi(p)$$

و

$$P'_\lambda = U P_\lambda U^{-1} \qquad (4.21)$$

ومن جهة أخرى فإن مؤثر الاندفاع هو $\frac{1}{i}\frac{d}{dq}$ (أخذنا $\hbar = 1$) وبالتالي

$$\mathbf{p}\, x(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipq} p\, \chi(p)\, dp$$

(لهذا التكامل معنى إذا كانت الدالتان $\chi(p)$ و $p\,\chi(p)$ تنتميان في الوقت ذاته إلى $L_2$ و $L_1$)

$$= U(p\,\chi(p))$$

ولكن

$$Q\,\chi(p) = p\,\chi(p)$$ وفق تعريف مؤثر الوضع ومنه

$$\mathbf{p}\, x(q) = U\, Q\, \chi(p) = U\, Q\, U^{-1} x(q)$$

ونحصل على الشكل التكاملي لـ (4.21)

$$\mathbf{p} = U Q U^{-1} \qquad (4.21)'$$

وعلى العكس فإن

$$U^{-1}\mathbf{p}\, U = Q \qquad (4.22)$$

لأن تطبيقها على $\chi(p)$ يعطينا

$$U^{-1}\mathbf{p}U\, \chi(p) = Q\, \chi(p) = p\, \chi(p) \qquad (4.22)'$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل أي $\chi(p)$ ∍ $D(Q)$ مما يعني أن $U^{-1}\mathbf{p}U$ هو تمديد ذاتي الترافق للمؤثر $Q$ وبالمقابل فإن $Q^{\dagger}$ هو تمديد ذاتي الترافق للمؤثر $(U^{-1}\mathbf{p}U)^{\dagger}$ ومنه $U^{-1}\mathbf{p}U = (U^{-1}\mathbf{p}U)^{\dagger}$ (4.22).

## 7.4– مسألة الطيف المتصل

لنبدأ بالسؤال عن معنى المتجهة الخاصة والقيمة الخاصة في حالة الطيف المتصل. واضح أن المتجهة الخاصة $x$ المقابلة للقيمة الخاصة $a$ لمؤثر ذاتي الترافق متراص $A$ تشكلان نقطتي انقطاع في التمثيل الطيفي المنفصل لـ $A$ وفي المجال الذي يحدد الطيف في $R$ : $Ax = ax$ واحتمال الانتقال من متجهة خاصة إلى أخرى انتقال قطعي سواء أكان الانتقال عفوياً أو ومحرضاً (إصدار أو امتصاص). لكن الأمر مختلف في حالة الطيف المتصل فالمتجهة الخاصة $x$ ذات القيمة الخاصة $a$ لن تكون إلا متجهة تقريبية بالمعنى التالي : ليكن لدينا المجال الصغير $]a, b[ = \Delta$ وليكن

$$P(\Delta) = P_b - P_a$$

لدينا من (4.12)، ونظراً لكون $A$ و $P(\Delta)$ ذاتيي الترافق،

$$AP(\Delta) = P(\Delta)A = \int_{\Delta} \lambda dP_{\lambda}$$

أي من أجل أي متجهة $\mathscr{H}$ $x \in P(\Delta)$

$$Ax = \int_a^b \lambda dP_{\lambda}x$$

و

$$Ax - ax = \int_a^b (\lambda - a)\, dP_{\lambda}x$$

وأخيراً

$$\|Ax - ax\| \le (b - a)\|x\|$$

أي أن $x$ متجهة خاصة تقريبية لـ $A$ عندما يكون المجال $]a, b[$ صغيراً $Ax \cong ax$، ويصح الأمر على كل المتجهات $\mathscr{H}$ $x \in P(\Delta)$. هذا يعني أن لكل هذه المتجهات الخاصة نفس الاحتمال : تتأرجح الحالة الفيزيائية بين مختلف هذه الحالات. هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإنه من المستحيل تعيين القيمة الخاصة المنتمية إلى الطيف المتصل بدقة، كما هو عليه الحال في أي قياس متصل.

ومع ذلك لا بد لنا من تعميم مفهوم المتجهات والقيم الخاصة لتشمل بالإضافة إلى الطيف المنفصل الطيف المتصل إذا ما أردنا صياغة قوانين الميكانيك الكمومي بدقة. يقول ديراك في كتابه The Principles of Quantum Mechanics §12 "هناك أمثلة عديدة في العلوم حيث نجد أنه لا غنى لنا عن بعض المفاهيم النظرية الواقعة على حدود ما يطرأ عملياً لنتمكن من صياغة قوانين الطبيعة صياغة مضبوطة. إن تعميم مفهوم المتجهة الخاصة هو واحد منها".

لننظر من جهة ثانية إلى بعض المتجهات الخاصة التي تعترضنا في الأطياف المتصلة لبعض المؤثرات. لنأخذ مثلاً معادلة القيم الخاصة للمؤثر Q

$$(Q - \lambda I)x(q) = 0$$

إنها تكافؤ $(q - \lambda)x(q) = 0$ وتعني أن $x(q)$ يساوي الصفر حيثما كان تقريباً، بالرمز $(p \cdot p)$، ماعدا النقطة $q = \lambda$؛ تكامل لوبيغ لهذه المتجهة في $L_2$ يساوي الصفر وبالتالي فإن المتجهات الخاصة لمؤثر الوضع لا تنتمي إلى الفضاء الهيلبرتي $L_2 \leftrightarrow \ell_2(I)$.

يصح الأمر نفسه على مؤثر الاندفاع

$$\mathbf{p} = \frac{1}{i}\frac{d}{dq}$$

متجهاته الخاصة هي $e^{ipq}$.

$\mathbf{p}e^{ipq} = pe^{ipq}$، ولا تنتمي هي أيضاً إلى $L_2$ : $1 = \left|e^{ipq}\right|^2$ وليست كمولة على المجال $]-\infty, +\infty[$.

لنأخذ كمثل ثالث وأخير المتجهات الخاصة للمؤثر الواحدي، مؤثر الانسحاب، المعرف بـ (4.11) ولنفتش عن متجهاته الخاصة : $x(q - a) = T_a x(q) = \alpha x(q)$ مستعملين نشر فوريي (4.10). لدينا

$$e^{ip(q-a)}\chi(p) = \alpha e^{ipq}\chi(p)$$

رأينا أن القيم الخاصة للمؤثر الواحدي عقدية قيمتها المطلقة = 1. نكتب $\alpha$ إذاً على الشكل $\alpha = e^{i\beta}$

$$e^{ip(q-a)} = e^{i\beta}e^{ipq}$$

يجب أن يحقق المتغير p العلاقة $p = \frac{\beta + 2k\pi}{-a}$. هذا يعني أن $\chi(p) = 0$ خارج هذه القيم لـ p. $\chi(p)$ يساوي الصفر حيثما كان تقريباً. وبما أن تحويل فوريي واحدي فإن $\|x(q)\|^2 = \|\chi(p)\|^2 = 0$ وليس لمؤثر الانسحاب متجهات خاصة في $L_2$.

والخلاصة أنه لابد من فضاءات أخرى تتضمن $L_2$ للتعبير عن المتجهات الخاصة – بالمعنى الضيق الذي أعطيناه لها – ولدراسة الأطياف المتصلة.

<u>**ملاحظة هامة :**</u>

إن الخروج من الفضاء الهيلبرتي $L_2$ يعني أنه لم يعد من الممكن مطابقة الفضاء الجديد مع ثنويه. لم تعد مبرهنة ريتس صحيحة : إنها المبرهنة التي سمحت لنا بهذه المطابقة، $\mathscr{H} = \mathscr{H}'$، وعدم التفريق

في رمز ديراك ⟨ | ⟩ بين – البرا – كمتجهة في $\mathscr{H}$ أو بمتجهة في $\mathscr{H}$ (التطبيق الخطي لـ $\mathscr{H}$ في $\mathbb{C}$)، عدم التفريق بين الجداء السلمي $\langle x|y\rangle$ والجداء الداخلي $\langle u_x, y\rangle = u_x(y)$.

## 5. نظرة سريعة على نظرية التوزيعات Distributions

### 1.5– دالة ديراك δ

استعمل ديراك في دراسته للطيف المتصل دالة شاذة عرفت باسمه، عرفها كما يلي :

$$\delta(x - x_o) = 0 \qquad \text{من أجل} \quad x \neq x_o$$

$$\delta(x - x_o) = \infty \qquad \text{من أجل} \quad x = x_o$$

وعرف تكامل لوبيغ لهذه "الدالة"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_o)\, dx = 1 \tag{5.1}$$

ورأى فيها تعميماً لرمز كرونكر

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{من أجل} \quad m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

إلا أنه لا معنى للتكامل السابق لأن تكامل لوبيغ لدالة تساوي الصفر تقريباً حيثما كانت (p · p) يساوي الصفر.

كان ديراك يعرف ذلك طبعاً ولكنه استعمل هذا التكامل كرمز إذ لا تدخل هذه الدالة إلا في الحسابات الوسيطة ولا تلعب أي دور في النتائج، فهي تعرف على سبيل المثال في تكامل جدائها بدالة "منتظمة" قدر ما نريد ويحل محل التعريف (5.1) التعريف التالي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_o)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(x_o) \tag{5.2}$$

أو بأخذ $x_o = 0$ :

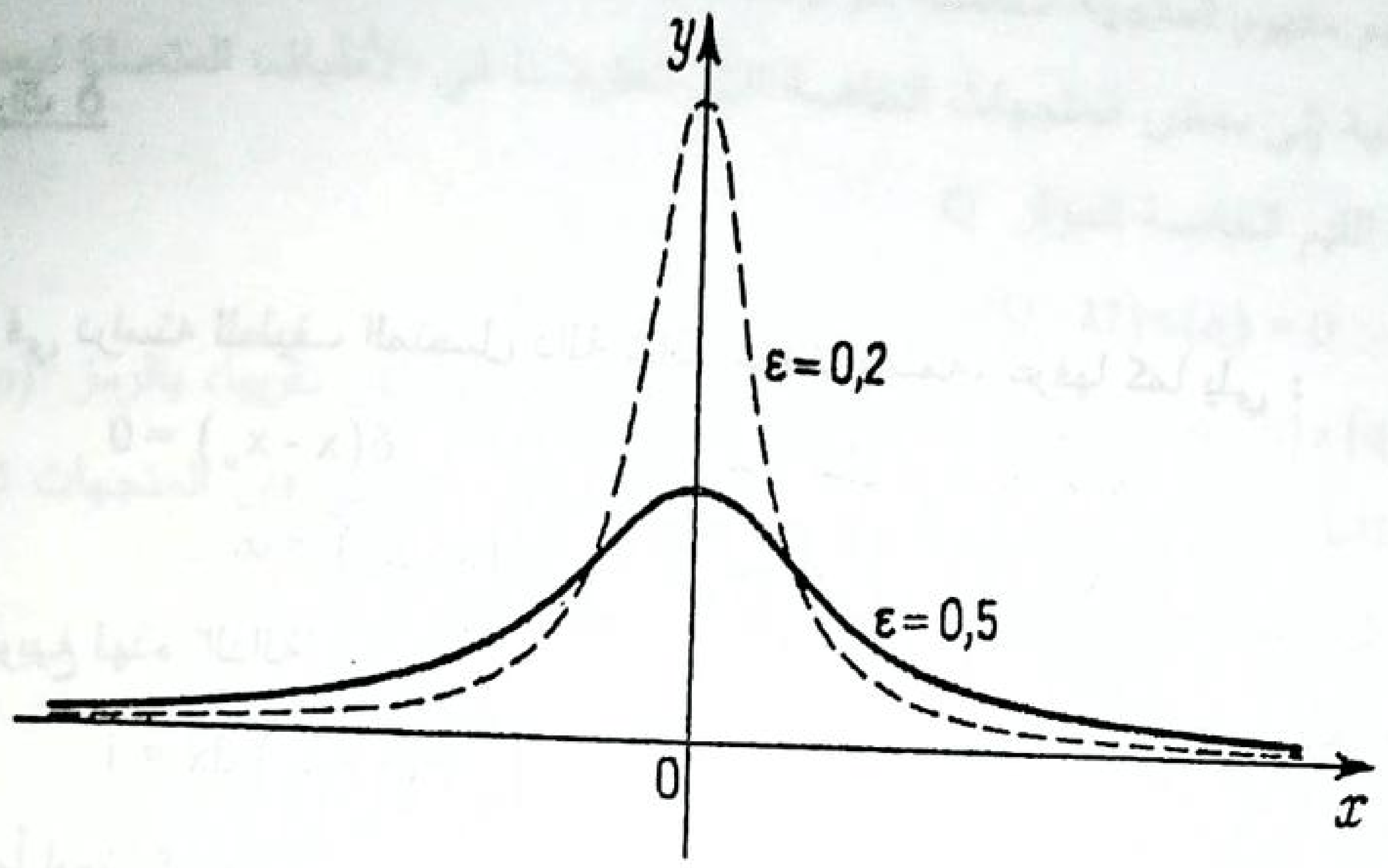
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0) \tag{5.2'}$$

إن مهمة هذه الفقرة هي إعطاء معنى رياضي لهذه العلاقات الرمزية، جعل العلاقة بين دالة شاذة ودالة جيدة ذات مدلول وتعريف "مشتقات" الدالات الشاذة، وصولاً إلى المتجهات الخاصة والقيم الخاصة لمؤثرات الطيف المتصل. أو بمعنى آخر إن نظرية التوزيعات هي تعميم لفهوم الدالة – وليست بأي حال من الأحوال تقليصاً له. كان سوبولوف أول من وضع أسس هذه النظرية عام 1936 وأطلق عليها اسم الدالات المعممة Generalized ثم صاغها شوارتز بشكل متكامل عام 1950.

لنبين قبل البدء في الإطلال على هذه النظرية أنه يمكن التقرب من الدالة $\delta$ على النحو التالي. ليكن لدينا الدالة التابعة لوسيط $\varepsilon$ :

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \qquad \varepsilon > 0$$

والممثلة بالشكل.4 حسب قيمة $\varepsilon$. إنها $\frac{1}{\pi\varepsilon}\frac{d}{dx}\text{arctg}\frac{x}{\varepsilon}$




الشكل.4

تسمح لنا المساواة التالية

$$y = \int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\text{arctg}\frac{b}{\varepsilon} - \text{arctg}\frac{a}{\varepsilon}\right]$$

أن نرى أن الدالات $f_\varepsilon(x)$ تولد الدالة $\delta$ أي أن

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \delta(x) \qquad (5.3)$$

كما أن

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{1}{\pi}\,\text{Im}\,\frac{1}{x+i\varepsilon}$$

أي أن هذا القسم التخيلي لـ $-\frac{1}{\pi}\frac{1}{x+i\varepsilon}$ يتناهى نحو $\delta$ بالمعنى الذي ستحدده له نظرية التوزيعات.

## 2.5– دالات القاعدة D و S

إن الدالات المنتظة المرتبطة بالدالات الشاذة والتي تسمح لنا بتعيين العلاقة معها هي الدالات $\varphi$ المعرفة على $R^n$ – نفضل إعطاء أعم التعريفات مباشرة – قابلة الاشتقاق إلى ما لا نهاية، أي المنتمية إلى

$C^\infty$، ذات الحامل المتراص في $R^n$ ولنرمز له بـ $G$، أي أنها تساوي الصفر خارج حيز محدود ومغلق من $R^n$، والتي تأخذ قيمها في حقل الأعداد العقدية. نرمز للفضاء المتجهي الذي تشكله هذه الدالات بـ $D(G)$. إنه فضاء منظم نعرف عليه عدداً عدوداً من النظيمات

$$\|\varphi\|_0 = \sup_x|\varphi(x)|, \dots \|\varphi\|_m = \max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in G}|D^\alpha\varphi(x)| \dots \tag{5.4}$$

حيث $D^\alpha$ هو الاشتقاق الجزئي بالنسبة لمختلف المتغيرات $x^1,\dots x^n$ :

$$D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}\dots\partial^{\alpha_n}_{x_m}} \qquad \alpha_1 + .. \alpha_n = |\alpha|$$

والنظيم $\|\cdot\|_m$ هو أخذ أكبر قيمة مطلقة للمشتق تعينها $x$ ثم اختيار القيمة العظمى التي يعينها الاشتقاق $\alpha$.

ونعرف فضاء دالات آخر أعم من الفضاء $D(G)$ هو فضاء الدالات $C^\infty$ المعرفة على $R^n$ وذات القيم العقدية والتي تتناهى إلى الصفر، عندما يسعى $x = (x_1 \dots x_n) \to \infty$ ومعها كل مشتقاتها بأسرع من تناهي أي قوة من $\|x\|^{-1}$؛ $\|x\|^{-k} = \frac{1}{(x_1^2 + \dots x_n^2)^{\frac{1}{2}}}$. نرمز لهذا الفضاء المتجهي بـ $S(R^n)$ ونقول عنه اختصاراً إنه فضاء الدالات المتناقصة بسرعة. وهو أيضاً فضاء منظم نعرف عليه عدداً عدوداً من النظيمات هو

$$\|\varphi\|_0 = \sup_x\|\varphi(x), \dots\|\varphi\|_m = \max_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le m}} \sup_{x\in R^n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)| \tag{5.5}$$

حيث $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ و $D^\beta$ كما أعلاه.

إن أي دالة تنتمي إلى $D$ – المساوية للصفر خارج $G$ المحدود والمغلق – تنتمي إلى $S$ أي أن

$$D \subset S \tag{5.6}$$

## 3.5– التوزيعات $D'$ والتوزيعات المعتدلة $S'$ (Tempered)

نسمي توزيعة الشكل الخطي المتصل للدالة $\varphi \in D$، أي للتطبيق الخطي لـ $\varphi$ في حقل الأعداد العقدية.

نرمز للتوزيعة بـ $T$ ونكتب العدد العقدي $T(\varphi)$ على شكل جداء داخلي

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle \tag{5.7}$$

نرمز للفضاء الثنوي الذي تشكله الأشكال الخطية على الفضاء $D$، كالمعتاد، بالرمز $D'$. إنه فضاء التوزيعات على $D$.

نرمز كذلك للفضاء الثنوي الذي تشكله الأشكال الخطية على الفضاء $S$ بالرمز $S'$ ونسميه فضاء التوزيعات المعتدلة. ولما كانت كل دالة من $S$ دالة من $D$ فإن كل تطبيق خطي لـ $\varphi \in S$ هو تطبيق

خطي لهذه الدالة بصفتها تنتمي إلى $D$ وبالتالي فإن فضاء التوزيعات المعتدلة محتوى في فضاء التوزيعات $D'$ : $S' \subset D'$ (5.6)'

**أمثلة :**

1- يمكننا أن نأخذ كمثل على التوزيعة التوزيعة التابعة لدالة ما $f(x)$، تكامل جداء دالة ما $f(x)$ بالدالة $\varphi$ ونكتب

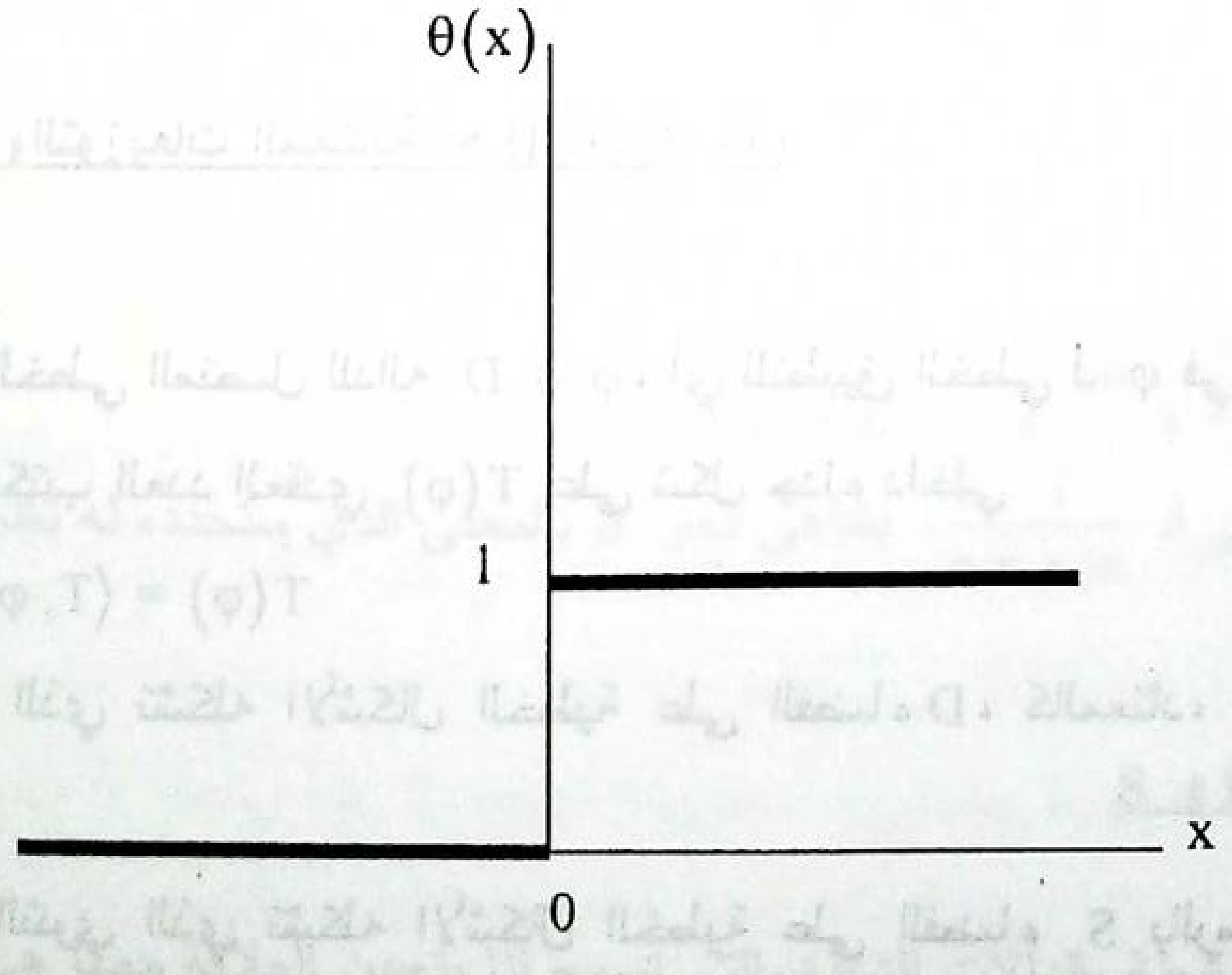
$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \underbrace{\int \dots \int}_{n} \overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx \qquad (5.8)$$

إن تكامل الطرف الأيمن معرف تماماً إذا كانت الدالة $f$ جموعة محلياً، أي أن تكاملها معرف على كل مجموعة محدودة من $R^n$. وبالتالي فإن التكامل ليس على $R^n$ وإنما على الحامل المحدود لـ $\varphi$ حيث $f$ جموعة و $\varphi$ متصل. كما أن لتكامل الطرف الأيمن معنى إذا كانت الدالة $f$ بطيئة التزايد أي أنها محدودة على الشكل التالي : عندما تتناهى $x$ إلى اللانهائية $\|x\| \to \infty$ $|f(x)| \le A\|x\|^k$ بحيث يصبح جداؤها بالدالة $\varphi(x) \ni S$ المتناقصة بسرعة $|\varphi(x)| < \frac{B}{\|x\|^{k+2}}$، $|f(x)\varphi(x)| \le \frac{AB}{\|x\|^2}$، والجداء $f(x)\varphi(x)$ جموع.

وهكذا نكون قد عرفنا توزيعتين على شكل دالتية خطية Linear Functional – تكامل معرف على الفضاء المتجهي $D$ أو $S$ –؛ نطابق كما كتبنا في (5.8) $T \equiv f$ ونقول إن الدالات الجموعة محلياً تنتمي إلى $D'$ والدالات بطيئة التزايد – التي لا تصل إلى اللانهاية بأسرع من كثير الحدود – تنتمي إلى $S'$.

إن ما يجعلنا نطابق $T_f$ مع $f$ في هذه العلاقة هو أن دالتين $f$ و $g$ لا تختلفان عن بعضهما إلا في مجموعة قياسها يساوي الصفر – دالتين متساويتين حيثما كان تقريباً $(p \cdot p)$ تعرفان نفس التوزيعة.

2- لنأخذ كمثل ثان دالة القفزة $\theta$ (دالة هيفيسايد Heaviside) المعرفة على $R$ على النحو التالي، الشكل.5




الشكل.5

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \text{ من أجل } \\ 1 & x>0 \text{ من أجل } \end{cases}$$

يمكننا كتابة هذه الدالة كتوزيعة تنتمي إلى $D'$.

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx \qquad (5.9)$$

للتكامل معنى لأن حامل $\varphi(x)$ محدود.

## 4.5- اشتقاق التوزيعات

نستوحي مشتق التوزيعة من تطابق التوزيعة مع الدالتية الخطية (5.8). إنه في حالة (5.8) (سننظر إلى حالة $R$ فقط و $f(x) \in R$ كي لا نعقد الكتابة)

$$< \frac{\partial f}{\partial x}, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \varphi(x)\, dx$$

نكامل بالتجزئة

$$= \left[ f(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} dx$$

إن الحد الأول في الطرف الأيمن يساوي الصفر طبعاً ومنه

$$< \frac{\partial f}{\partial x}, \varphi > = - < f, \frac{\partial \varphi}{\partial x} > \qquad (5.10)$$

سنكتب تعريفاً إذاً من أجل رتبة اشتقاق $p$، ومؤثر الاشتقاق $D^p$

$$\langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p \varphi \rangle \qquad (5.11)$$

أي أن التوزيعات قابلة للاشتقاق قدر ما نشاء.

لنأخذ مشتق التوزيعة $\theta$ – دالة القفزة – المعرفة بـ (5.9)

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \int \delta(x)\, \varphi(x) dx$$

$$= \langle \delta, \varphi \rangle$$

حيث كتبنا العلاقة $'(5.2)$ (غير المعرفة وإن كنا سنبقى على استعمال هذا الرمز نظراً لشيوعه) على الشكل $\langle \delta, \varphi \rangle$ ومنه

$$\theta' = \delta \qquad (5.12)$$

عندما نضرب توزيعة $T$ بدالة $a(x)$ و $C^{\infty}$ فإن قاعدة اشتقاق الجداء التقليدية (قاعدة لايبنيز) تبقى سارية المفعول

$$(a(x)T)' = a'(x)T + a(x)T' \qquad (5.13)$$

ذلك أننا نعرف الجداء $aT$ بالعلاقة

$$\langle a(x)T, \varphi \rangle = \langle T, \bar{a}(x)\varphi \rangle \tag{5.14}$$

($a = \bar{a}$ في حالة الدالات الحقيقية، وهو ما سنفرضه في ما يلي لتسهيل الكتابة).

لدينا بتطبيق هذه العلاقة و (5.11) :

$$\langle (a(x)T)', \varphi \rangle = -\langle a(x)T, \varphi' \rangle = -\langle T, a(x)\varphi' \rangle$$

لكن، $a(x)\varphi' = (a\varphi)' - a'\varphi$، ثم خطية $T$ تعطينا

$$= -\langle T, (a\varphi)' \rangle + \langle T, a'\varphi \rangle$$

$$= \langle T', a\varphi \rangle + \langle a'T, \varphi \rangle$$

$$= \langle aT', \varphi \rangle + \langle a'T, \varphi \rangle \tag{5.13)'$$

ومنه (5.13).

لنطبق أولاً (5.14) على التوزيعة $\delta$ :

$$\langle a(x)\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a(x)\varphi(x) \rangle = a(0)\varphi(0)$$

$$= a(0)\langle \delta, \varphi \rangle$$

أي أن

$$a\delta = a(0)\delta \tag{5.15}$$

وفي حالة الدالة $a(x) = x$ فإن $a(0) = 0$ و

$$x\delta = 0 \tag{5.15)'$$

وعلى العكس فإن (5.14) تبين أنه إذا كان $xT = 0$ فإن $T = c\delta$ حيث $c$ ثابتة :

$$0 = \langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi(x) \rangle = x\varphi(x)\big|_{x=0}$$

أما تطبيق محاكمة العلاقة '(5.13) فتبين أن

$$\langle a(x)\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', a(x)\varphi \rangle = -\langle \delta, (a(x)\varphi)' \rangle$$

$$= -\langle \delta, a'(x)\varphi \rangle - \langle \delta, a(x)\varphi' \rangle$$

$$= -a'(0)\varphi(0) - a(0)\varphi'(0)$$

$$= -a'(0)\langle \delta, \varphi \rangle + a(0)\langle \delta', \varphi \rangle$$

ومنه

$$a(x)\delta' = -a'(0)\delta + a(0)\delta' \tag{5.16}$$

وبشكل خاص، من أجل $a(x) = x$ فإن $a(0) = 0$ و

$$x\delta' = -\delta \tag{5.16)'$$

**تطبيقات :**

1- لنأخذ كتوزيعة مشتق $\text{Log}|x|$ : إنها دالة شاذة نعرفها بتكامل متباعد هو $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ وننظمه كتوزيعة، لدينا حسب (5.11)

$$<\frac{d\,\text{Log}|x|}{dx},\varphi(x)> = -\langle \text{Log}|x|,\ \varphi'(x)\rangle$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\text{Log}|x|\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\text{Log}|x|\varphi'(x)\,dx$$

ونكامل بالتجزئة حتى نبقى مع الدالة $\varphi$ :

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\text{Log}|x|\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \text{Log}|x|\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty}\right\} + \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

الحدان المكاملان معدومان.

نسمي النهاية التي نصل إليها القيمة الرئيسية لكوشي والتوزيعة المقابلة لمشتق $\text{Log}|x|$ هي $\frac{1}{x}$ وتساوي الدالة $\frac{1}{x}$ من أجل $x \neq 0$.

2- لنأخذ مشتق $\text{Log}(x+i0)$ المعرف على النحو التالي

$$\text{Log}(x+i0) = \lim_{y\to 0}\text{Log}(x+iy)$$

لنكتب $x+iy = \rho\, e^{i\alpha}$ حيث $\rho = |x+iy|$ و $\alpha$ هي عمدة Argument العدد العقدي. عندما تتناهى $y$ نحو الصفر، تتناهى $\alpha$ نحو الصفر من أجل $x>0$ ونحو $\pi$ من أجل $x<0$ ويتناهى بالتالي $\text{Log}|x+iy| = \text{Log}\rho + i\alpha$ إلى

$$\text{Log}|x| + i\pi\,\theta(-x) = \text{Log}(x+i0) \qquad (5.17)$$

حيث $\theta(-x)$ "دالة" هيفيسايد المساوية للصفر من أجل $x>0$ و 1 من أجل $x<0$ (لنلاحظ أن $\theta(x)+\theta(-x) = 1$ وبالتالي $\theta'(x) = -\theta'(-x)$). لدينا بأخذ مشتق طرفي (5.17)

$$\frac{d}{dx}\text{Log}(x+i0) = \frac{d}{dx}\text{Log}|x| + i\pi\frac{d\theta(-x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{Log}(x+i0) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \qquad (5.17)'$$

أي أن

$$\delta(x) = -\frac{1}{\pi}\,\text{Im}\,\frac{1}{x+i0}$$

أو

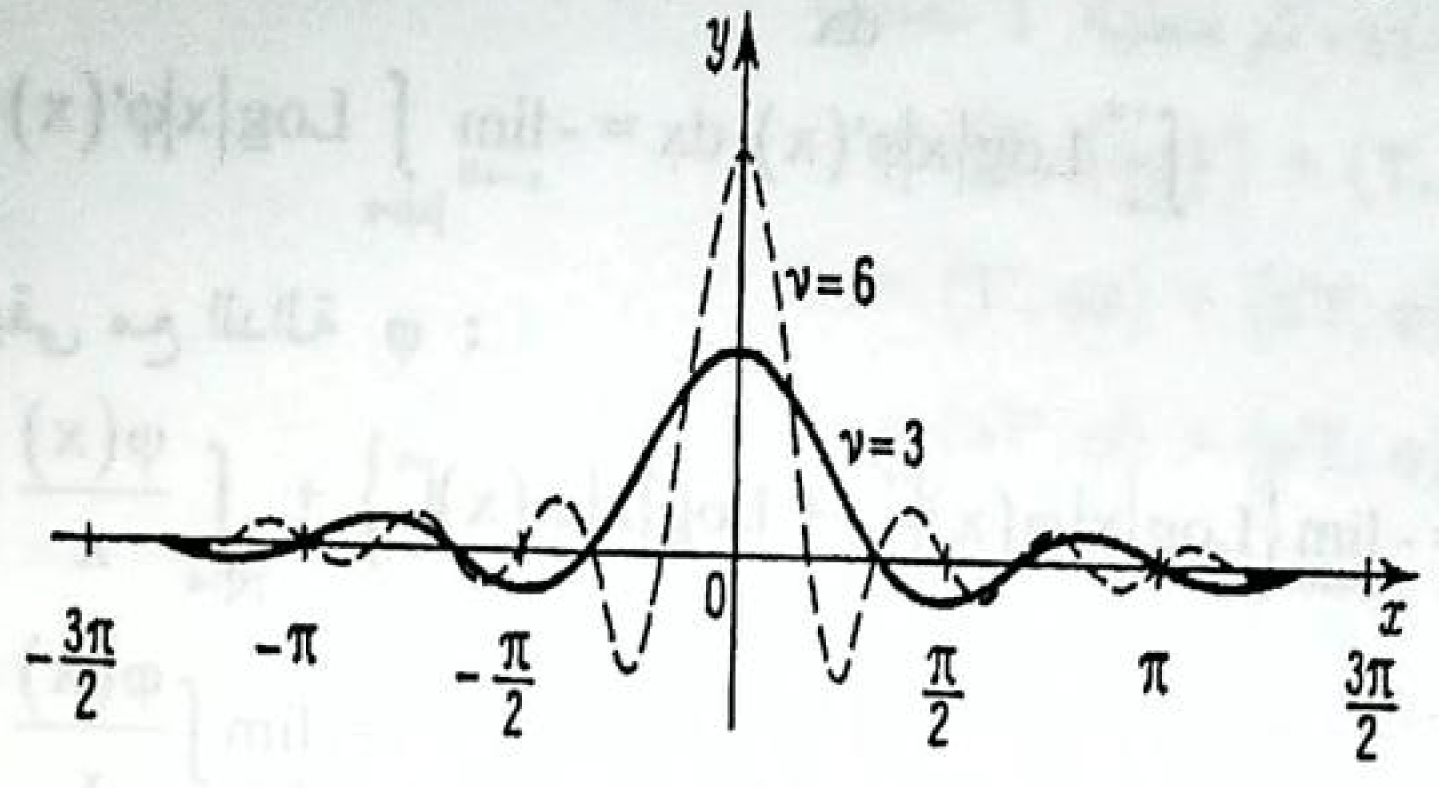
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\text{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

وهو ما رأيناه في التقريب الذي أعطيناه في (5.3) "للدالات" المولدة لـ $\delta$.

3- يمكننا أن نبرهن أن الدالة

$$f_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-x^2/4t} \qquad (t>0) \qquad (5.18)_1$$

تتناهى عندما تتناهى $t$ نحو الصفر إلى $\delta(x)$، ولدينا كذلك، الشكل.6




الشكل.6

$$\lim_{\upsilon\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin \upsilon x}{x} = \delta(x) \qquad (5.18)_2$$

ذلك أن $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\upsilon x}{x}\,dx = 1$، كما يتناهى التكامل $\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b} \frac{\sin\upsilon x}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a\upsilon}^{b\upsilon} \frac{\sin y}{y}\,dy \leftarrow 0$ من أجل $b > a > 0$ و $\upsilon \to \infty$ ونحصل على نفس النتيجة من أجل $a < b < 0$.

نبرهن بنفس الطريقة أن

$$\frac{1}{\pi}\lim_{t\to\infty} \frac{\sin^2 xt}{x^2 t} = \delta(x) \qquad (5.18)_3$$

ومن جهة أخرى فإن الدالة $\frac{\sin\upsilon x}{\pi x}$ هي نتيجة تكامل $\frac{1}{2\pi}\int_{-\upsilon}^{+\upsilon} e^{i\xi x}\,d\xi$ وبالتالي فإن لدينا التوزيعة التي يتناهى إليها التكامل

$$\lim_{\upsilon\to\infty}\int_{-\upsilon}^{+\upsilon} e^{i\xi x}\,d\xi = 2\pi\delta(x) \qquad (5.18)_3$$

## 5.5- تحويل فوريي للتوزيعات

نعرف تحويل فوريي لتوزيعة $T$ ونرمز له بـ $F$ على الشكل التالي

$$\langle FT, \varphi\rangle = \langle T, F\varphi\rangle \qquad (5.19)$$

أي أن تحويل فوريي للتوزيعة هو في الواقع أخذ تحويل فوريي لدالة القاعدة $\varphi$. وهكذا فلكي يكون لهذا التعريف معنى، يجب أن يقع $F\varphi$ في $D$، أن يكون له نفس خواص دالات القاعدة. وهذا غير محقق في

حالة القاعدة $D$ : إن $F\varphi \notin D$ [5] ولهذا لا يمكن تعريف تحويلات فوريي للتوزيعات $T \in D'$؛ ولكنه محقق إذا كانت $\varphi \in S$ إذ إن $F\varphi \in S$ وبالتالي فإن للتعريف (5.19) معنى من أجل التوزيعات المعتدلة $T \in S'$. لنرمز بـ $\chi(p)$ إلى محول فوريي لـ $\varphi(x)$ و $S$

$$\chi(p) = F\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \varphi(x)\, e^{-ipx} d^n x$$

و $\chi(p)$ $\left(px = \sum_{j=1}^{n} p_j x^j\right)$ معرف تماماً. لنبرهن أنه ينتمي إلى $S$ وذلك بأن نثبت أن $D^\alpha \chi \in S$ وبالتالي فإن $\chi(p)$ ينتمي إلى $S$.

$$\varphi(x) = F^{-1}\chi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \chi(p)\, e^{ipx} d^n p$$

تبين هاتان العلاقتان أن محول فوريي لـ $(D^\alpha \chi(p))$، $(-ix)^\alpha \varphi(x)$ معرف تماماً وينتمي إلى $S$ حسب (5.5)

$$D^\alpha \chi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (-ix)^\alpha \varphi(x) e^{-ipx} d^n x$$

كما أن محول فوريي لـ $D^\beta \varphi(x)$ معرف لأن $\varphi \in S$ قابل للاشتقاق إلى اللانهاية

$$FD^\beta \varphi(x) = (ip)^\beta \chi(p)$$

لنسم المقدار $(-ix)^\alpha \varphi(x) = \phi(x)$ ومحول فوريي المقابل $D^\alpha \chi(p) = \xi(p)$ ولنطبق العلاقة السابقة على $\phi(x)$ :

$$FD^\beta\left((-ix)^\alpha \varphi(x)\right) = FD^\beta \phi(x) = (ip)^\beta \xi(p)$$
$$= (ip)^\beta D^\alpha \chi(p)$$

إن المقدار في الطرف الأيمن $p^\beta D^\alpha \chi(p)$، مقيد بعدد أكبر منه و $D^\alpha \chi \in S$ وبالتالي فإن $\chi(p)$ ينتمي إلى $S$.

إن $F$ و $F^{-1}$ مؤثران متقايسان في $S$ وبالتالي في $S'$؛ ولدينا في $L^2_x$ و $L^2_p$ على سبيل المثال من أجل $f, g \in L^2_x$ : $\langle f, g\rangle_{L^2_x} = \langle Ff, Fg\rangle_{L^2_p}$ وبالتالي فإن تحويل فوريي مؤثر خطي واحدي $F^{-1} = F^\dagger$؛ ولدينا على وجه الخصوص

$$\int |f(x)|^2 d^n x = \int |\chi(p)|^2 d^n p \qquad (5.20)$$

المعروفة باسم صيغة بلانشريل Plancherel.

لنلاحظ أنه عندما تكون التوزيعة $T$ مقابلة لدالة $f$، دالتية بـ $f(x)$، كما في (5.8) (سنأخذ الحالة الحقيقية) فإن

---

[5] إنه معرف دوماً وينتمي إلى فضاء الدالات التحليلية الصحيحة (التي تنشر على شكل سلسلة لامنتهية بالمتغير العقدي z).

$$\langle FT_f, \varphi\rangle_p = \langle Ff, \varphi\rangle_p = \langle f, F\varphi\rangle_x = \int_{R^n} \varphi(p)\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f(x) e^{-ipx} dx\right\} dp$$

$$= \int_{R^n} f(x)\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{-ipx} \varphi(p)\, dp\right\} dx \qquad (5.19)'$$

لأن تغيير ترتيب التكامل بالنسبة للمتغيرين $dx$ و $dp$ ممكن دوماً (مبرهنة فوبيني Fubini).

لنحسب الآن محول فوريي التوزيعة $\delta$ (ببعد واحد) لدينا، حسب (5.19)

$$\langle F\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, F\varphi\rangle = \langle \delta, \chi(p)\rangle = \chi(p=0)$$

إنه إذاً يساوي

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \varphi(x)\, dx = <\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, \varphi>$$

أي أن محول فوريي لـ $\delta$ هو التوزيعة $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$

$$F\delta = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$$

لنحسب الآن $F^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$ مستعملين العلاقة '(5.19) حيث $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$

$$<F^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, \varphi>_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} dx\right\} dp$$

وحسب $(5.18)_3$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p)\, \delta(p) dp = \varphi(0)$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن

$$<F^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, \varphi> = <\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, F^{-1}\varphi> = <F\delta, F^{-1}\varphi> = <F^{-1}F\delta, \varphi>$$

وبالتالي

$$F^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} = F^{-1}F\delta = \delta$$

إن هذه العلاقة الأخيرة تبرر اعتبار الدالة $\delta(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} dp$ حتى وإن لم نكن قد وجدناها في $(5.18)_3$.

## 6.5- الثلاثية الهيلبرتية

إن الفضاء الذي يتضمن الفضاء الهيلبرتي $L_2 = \mathscr{H}$ والذي يسمح لنا دراسة الطيف المتصل واستعمال دالة ديراك $\delta$ هو تحديداً فضاء التوزيعات المعتدلة $S'$ ولدينا

$$S \subset L_2 \subset S' \qquad (5.21)$$

نقول بصورة عامة إننا عرفنا ثلاثية Triade هيلبرتية عندما نعطي فضائين $\Omega$ وثنويه $\Omega'$ والفضاء الهيلبرتي $(\mathscr{H} = \mathscr{H}')$ بحيث يكون الفضاءان $\Omega$ و $\Omega'$ منظمين بعدد عدود من النظيمات، وهذا ما فعلناه (في 5.5 مثلاً) ويتمتعان بخواص أخرى، لن نتعرض لها هنا، ويحققان علاقة التضمين التالية

$$\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega' \qquad (5.21)'$$

نقول أيضاً إن الفضاء الهيلبرتي مُشَرّع Rigged، يستطيع ركوب البحر !

ونعرف المتجهة الخاصة المعممة للمؤثر $A$، ذي الطيف المتصل، المقابلة للقيمة الخاصة $\lambda$ بأنها التوزيعة المعتدلة، $T \in S'$، المحققة للعلاقة

$$\langle T, A\varphi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle \qquad (5.22)$$

يبرهن أن لكل مؤثر ذاتي الترافق نظمة تامة من المتجهات الخاصة المعممة تقابلها قيم خاصة حقيقية، وأن لكل مؤثر واحدي نظمة تامة من المتجهات الخاصة المعممة تقابلها قيم خاصة عقدية طويلتها تساوي الواحد.

<u>مثال 1</u> : مؤثر الوضع $Q$

لنفتش عن التوزيعة $T$ التي تحقق معادلة القيم الخاصة $Q\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$ انطلاقاً من (5.22)

$$\langle T, Q\varphi(q)\rangle = \lambda\langle T, \varphi(q)\rangle = \lambda\varphi(\lambda)$$

إنها التوزيعة $T = \delta(q - \lambda)$ لأن

$$\lambda\langle \delta(q - \lambda), \varphi(q)\rangle = \lambda\int \delta(q - \lambda)\, \varphi(q)dq = \lambda\varphi(\lambda) \qquad (5.23)$$

حيث كتبنا التوزيعة $\delta$ على شكل الدالة الرمزي '(5.2)

هذا من جهة، لدينا من جهة أخرى حسب (3.20)

$$I = \int |q\rangle\, dq\, \langle q| \qquad (3.20)$$

ومن أجل $\varphi(q) \ni L^2$

$$I|\varphi\rangle = \int |q\rangle\, dq\, \langle q|\varphi\rangle \qquad (5.24)$$

لنلاحظ أن $\langle q|\varphi\rangle$، ولنرمز له بـ $\varphi(q)$، ليس جداءاً سلمياً للمتجهة $|\varphi\rangle$ المنتمية لـ $L_2$ بالمتجهة $\langle q|$ التي لا تنتمي إلى $L_2$ وإنما إلى $S'$ : إنها توزيعة معتدلة ولدينا

## 6.5- الثلاثية الهيلبرتية

إن الفضاء الذي يتضمن الفضاء الهيلبرتي $L_2 = \mathscr{H}$ والذي يسمح لنا دراسة الطيف المتصل واستعمال دالة ديراك $\delta$ هو تحديداً فضاء التوزيعات المعتدلة $S'$ ولدينا

$$S \subset L_2 \subset S' \tag{5.21}$$

نقول بصورة عامة إننا عرفنا ثلاثية Triade هيلبرتية عندما نعطي فضائين $\Omega$ وثنويه $\Omega'$ والفضاء الهيلبرتي $(\mathscr{H} = \mathscr{H}')$ بحيث يكون الفضاءان $\Omega$ و $\Omega'$ منظمين بعدد عدود من النظيمات، وهذا ما فعلناه (في 5.5 مثلاًَ) ويتمتعان بخواص أخرى، لن نتعرض لها هنا، ويحققان علاقة التضمين التالية

$$\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega' \tag{5.21'}$$

نقول أيضاً إن الفضاء الهيلبرتي مُشَرّع Rigged، يستطيع ركوب البحر !

ونعرف المتجهة الخاصة المعممة للمؤثر $A$، ذي الطيف المتصل، المقابلة للقيمة الخاصة $\lambda$ بأنها التوزيعة المعتدلة، $T \in S'$، المحققة للعلاقة

$$\langle T, A\varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle \tag{5.22}$$

يبرهن أن لكل مؤثر ذاتي الترافق نظمة تامة من المتجهات الخاصة المعممة تقابلها قيم خاصة حقيقية، وأن لكل مؤثر واحدي نظمة تامة من المتجهات الخاصة المعممة تقابلها قيم خاصة عقدية طويلتها تساوي الواحد.

**مثال 1** : مؤثر الوضع $Q$

لنفتش عن التوزيعة $T$ التي تحقق معادلة القيم الخاصة $Q\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$ انطلاقاً من (5.22)

$$\langle T, Q\varphi(q) \rangle = \lambda \langle T, \varphi(q) \rangle = \lambda\varphi(\lambda)$$

إنها التوزيعة $T = \delta(q - \lambda)$ لأن

$$\lambda \langle \delta(q-\lambda), \varphi(q) \rangle = \lambda \int \delta(q-\lambda)\, \varphi(q) dq = \lambda\varphi(\lambda) \tag{5.23}$$

حيث كتبنا التوزيعة $\delta$ على شكل الدالة الرمزي '(5.2)

هذا من جهة، لدينا من جهة أخرى حسب (3.20)

$$I = \int |q\rangle\, dq\, \langle q| \tag{3.20}$$

ومن أجل $\varphi(q) \ni L^2$

$$I|\varphi\rangle = \int |q\rangle\, dq\, \langle q|\varphi\rangle \tag{5.24}$$

لنلاحظ أن $\langle q|\varphi\rangle$، ولنرمز له بـ $\varphi(q)$، ليس جداءاً سلمياً للمتجهة $|\varphi\rangle$ المنتمية لـ $L_2$ بالمتجهة $\langle q|$ التي لا تنتمي إلى $L_2$ وإنما إلى $S'$ : إنها توزيعة معتدلة ولدينا

$$\varphi(\lambda) = \langle\lambda|\varphi\rangle = \int\langle\lambda|q\rangle\, dq\, \varphi(q) \tag{5.25}$$

ومنه

$$\delta(q-\lambda) = \langle\lambda|q\rangle = \begin{cases} 0 & q \neq \lambda \quad \text{من أجل} \\ \infty & q = \lambda \quad \text{من أجل} \end{cases} \tag{5.25'}$$

تعمم هذه العلاقة علاقة التعامد النظامي للمتجهات الخاصة للطيف المنفصل (النقطي) والتي تنتمي إلى $\mathscr{H} = \mathscr{H}$

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} = \int\overline{\psi}_m(x)\, \psi_n(x)\, dx$$

$$= \begin{cases} 1 & m = n \quad \text{من أجل} \\ 0 & m \neq n \quad \text{من أجل} \end{cases}$$

لنكتب الدالة الرمزية (5.2) على الشكل

$$\langle\delta_\lambda, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(q-\lambda)\,\varphi(q)\, dq = \varphi(\lambda) \tag{5.26}$$

$$\langle\delta_\lambda, 1\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(q-\lambda)\, dq = 1 \tag{5.26'}$$

وهكذا نرى أن $\delta_\lambda$ تمثل الكثافة (واحدة الكتلة أو الشحنة) في النقطة $\lambda$ من $R$ أو من $R^n$ بصورة أعم، تماماً كما تمثل التوزيعة $T = f(x)$، حيث $f(x)$ هي كثافة الكتلة، الكتلة الكلية في كل الحجم

$$\langle T, 1\rangle = \int_{R^n} f(x)\, dx$$

كذلك تمثل التوزيعة $T = f(x)r^2$ عزم العطالة الكلي بالنسبة لنقطة المبدأ

$$\langle T, 1\rangle = \int_{R^n} f(x)\, r^2 dx$$

بينما تمثل $\delta_\lambda$ عزم عطالة النقطة $\lambda$ بالنسبة لنقطة المبدأ

$$\langle\delta_a, 1\rangle = \int_{R^n}\delta(x-\lambda)\, r^2 dx = \lambda^2$$

لذا تسمى $\delta_\lambda$ قياس ديراك.

**<u>مثال 2</u> :**

لنكتب محول فوريي لـ $\varphi(q)$

$$\varphi(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int e^{ipq}\chi(p)\, dp \tag{5.27}$$

لدينا في الفضاء $S'$ المتجهات الخاصة $\left|e^{ipq}\right\rangle$ بحيث نكتب كما في (3.20) و '(5.25)

$$I = \int\left|e^{ipq}\right\rangle dp \left\langle e^{ipq}\right|$$

وكما في '(5.25)

$$\langle e^{ipq} | e^{ip'q} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int e^{iq(p'-p)} dp = \delta(p'-p) \qquad (5.27)'$$

$$I\varphi(q) = \int |e^{ipq}\rangle \, dp \, \langle e^{ipq} | \varphi \rangle$$

تبين مقارنة العلاقتين (5.27) و '(5.27) أن

$$\langle e^{ipq} | \varphi(q) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \chi(p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ipq'} \varphi(q') \, dq' \qquad (5.28)$$

لنطبق الآن مؤثر الانسحاب $\mathscr{C}_a$ على $\varphi(q)$ المعطاة بـ (5.27). إنه تعريفاً

$$\mathscr{C}_a \varphi(q) = \varphi(q-a)$$

رمزنا لهذا المؤثر بـ $\mathscr{C}_a$ هنا لتمييزه عن التوزيعات

$$\mathscr{C}_a \varphi(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{ip(q-a)} \chi(p) \, dp$$

وحسب '(5.27)

$$\mathscr{C}_a \varphi(q) = \int e^{-ipa} |e^{ipq}\rangle \, \langle e^{ipq} | \varphi \rangle \, dp \qquad (5.29)$$

إن $e^{-ipa}$ هي القيمة الخاصة المقابلة للمتجهة الخاصة $\langle e^{ipq}|$ المنتمية إلى 'S و $\langle e^{ipq}|\varphi\rangle$ هو، إن صح التعبير، كما في (5.25)، مسقط $\varphi$ و $L_2$ على التوزيعة $e^{ipq}$ و 'S. تعمم العلاقة (5.29) ما نعرفه في كتابه تطبيق المؤثر المتراص A على المتجهة $\varphi$ (طيف منفصل).

$$A\varphi = \sum_i \lambda^i |e_i\rangle \langle e_i | \varphi \rangle \qquad (5.29)'$$

حيث $\langle e_i|$ المتجهات الخاصة المقابلة للقيم الخاصة $\lambda_i$.

إن نظمة المتجهات الخاصة $\langle \delta_\lambda|$ و $\langle e^{ipq}|$ المنتمية إلى 'S في المثالين السابقين نظمة تامة لأن $\varphi(\lambda)$ المعطاة بـ (5.26) لا تساوي الصفر إلا إذا كانت المتجهات الخاصة لـ Q، $\varphi(q)$ تساوي الصفر. وكذلك فإن $\varphi(q)$ في '(5.27) لا تساوي الصفر إلا إذا كان كل $\chi(p) = (2\pi)^{1/2} \langle e^{ipq} | \varphi(q) \rangle$ مساوياً للصفر نظراً لصيغة بلانشريل.

$$\int |\varphi(q)|^2 dq = \int |\chi(p)|^2 dp$$

# الفصل السادس

## الجسيمات المتطابقة والتكميم الثاني

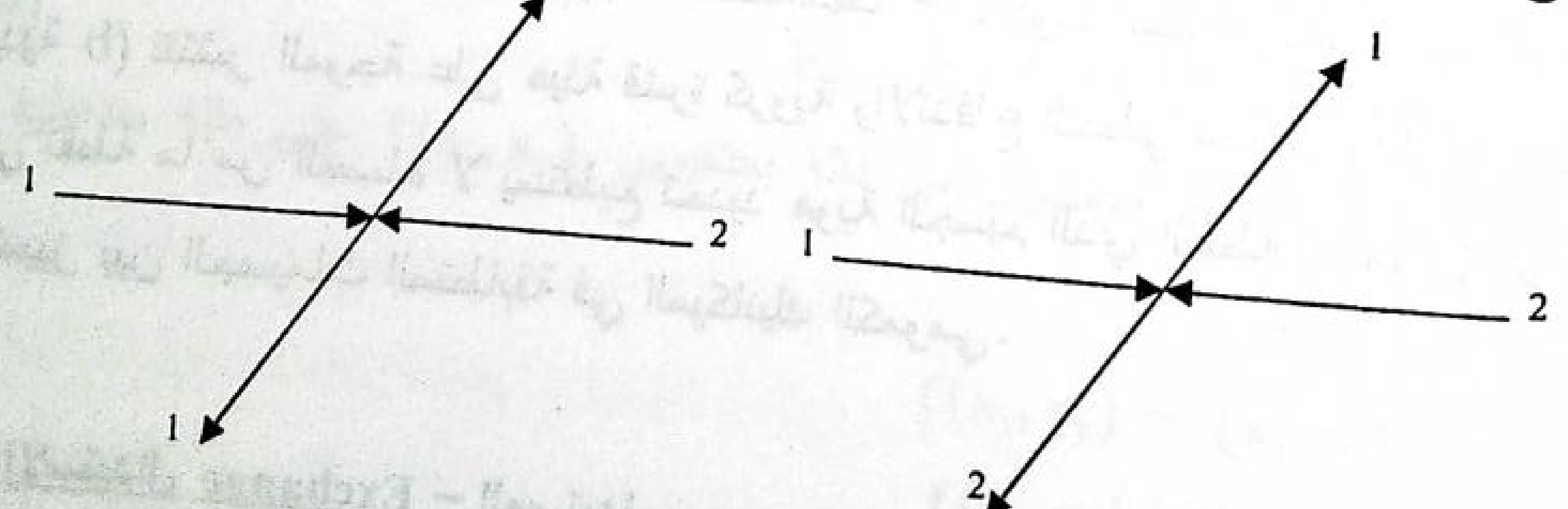
1- الجسيمات المتطابقة ........................ 285
2- التكميم الثاني ........................ 303
3- المؤثرات في الفضاءات ........................ 312

# الفصل السادس: الجسيمات المتطابقة والتكميم الثاني

## 1. الجسيمات المتطابقة

### 1.1- مبدأ عدم التمييز

نقصد بالأجسام المتطابقة الأجسام التي تتمتع بذات الخواص الفيزيائية من كتلة وشحنة وعزم زاوٍ صميمي وبكل الصفات الأخرى، كالحجم مثلاً إذا كانت الأجسام جهرية، التي تجعل التفريق بينها مستحيلاً. إلا أن الجسيمات المتطابقة التي تخضع للميكانيك الكمومي تختلف اختلافاً جوهرياً عن الأجسام المتطابقة الجهرية يعود إلى الواقعة التي انطلقنا منها في مطلع هذا الكتاب لوضع لبنات النظرية الكمومية. إنها استحالة وجود مسارات في الميكانيك الكمومي على خلاف ما هو عليه الحال في الأجسام الجهرية. إن تحرك هذه الأجسام على مسارات يتيح للراصد تتبع حركة كل جسم من الأجسام المتطابقة على حده وبالتالي تمييزه في كل لحظة عن الأجسام الأخرى المتمتعة بنفس الخواص بإعطائه رقماً أو لوناً، الخ. يمكن للراصد في حال تصادم جسمين متطابقين على سبيل المثال إعطاء الرقم 1 للجسيم الآتي من اليسار والرقم 2 للجسيم الآتي من اليمين وتتبع حركة كل من الجسيمين قبل الاصطدام وبعده وحساب الانعطاف في الاصطدام المرن في مقرن مركز الكتلة أو مقرن المختبر كما رأينا(I.4§4.3) يمكن أن ينتج عن الاصطدام أحد الشكلين التاليين الرصودين اللذين يحققان العلاقة $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$ حيث رمزنا بـ $\vec{P}$ إلى الاندفاع الخطي قبل الاصطدام وبـ $\vec{P}'$ إلى قيمته بعد الاصطدام، الشكل.1

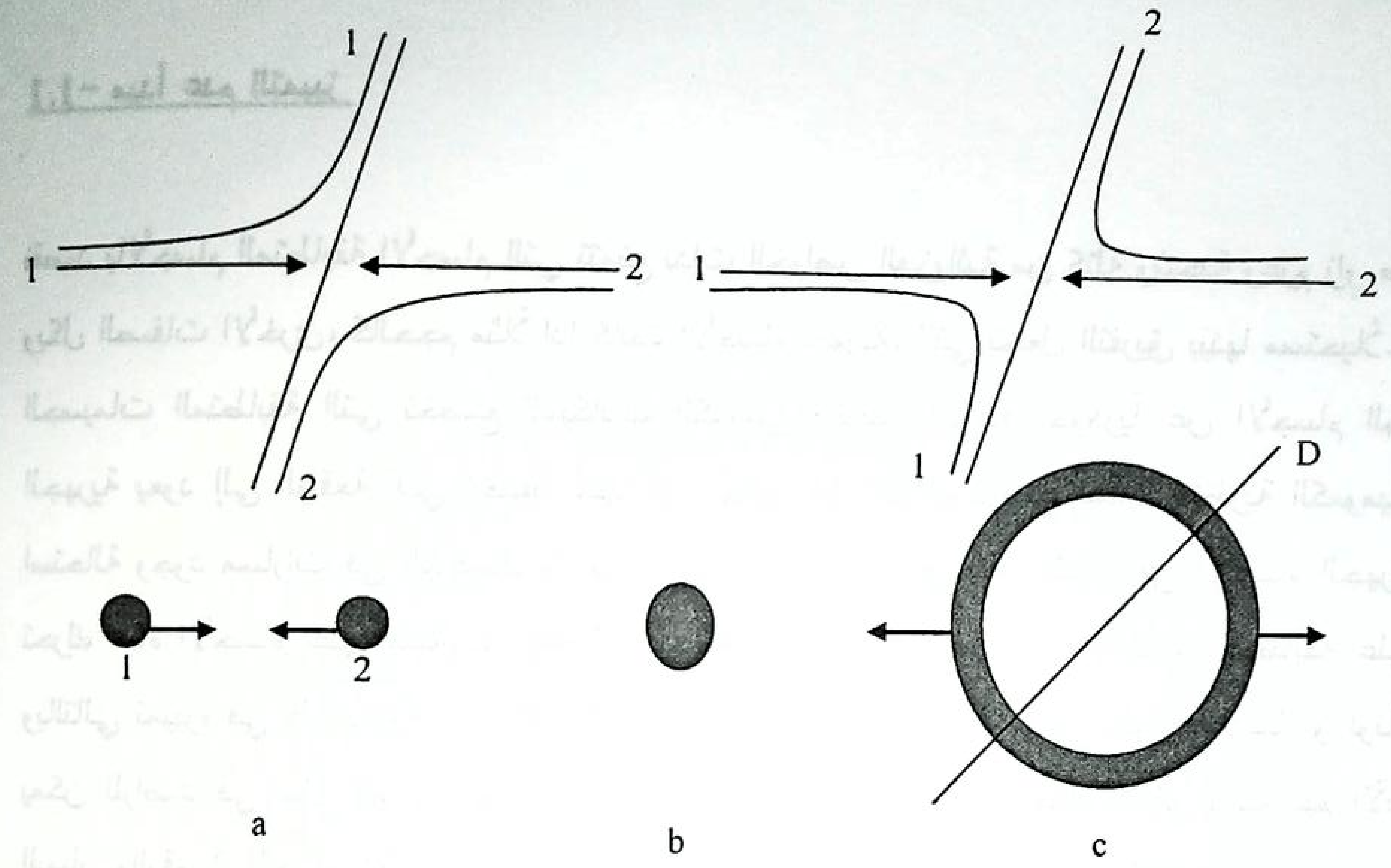


الشكل.1

لم يفقد الجسمان نتيجة اصطداهما هويتهما – الرقم أو اللون الذي يميزهما –، يستطيع كل لاعب كُلة جمع كلاته بسهولة في نهاية اللعبة رغم تطابق الكلات.

إنهما رصودان لأننا نستطيع فعلاً تتبع حركة كل من الجسيمين لحظة بلحظة :

أما الجسيمان المتصادمان في الميكانيك الكمومي – حيث عبرنا، بمبدأ اللاتحديد، عن استحالة وجود المسار، عن استحالة وجود شروط بدائية، وعن إعطاء الجسيم طابعاً موجياً – فهما في واقع الأمر باقتا موجة يمكن ترقيمهما كما في حال الأجسام الجهرية لكنهما لا تلبثا أن تتراكبا أثناء الاصطدام لتشكلا دالة موجية على هيئة قشرة كروية تتسع مع الزمن، الشكل.2 .




الشكل.2

تتجه باقتا الجسيمين المتطابقين الواحدة نحو الأخرى في مقرن الكتلة وهما معينتان بالرقمين 1 و 2 كما في الحالة التقليدية a) ولكنهما تتراكبان نتيجة اصطدامهما – لا توجد نقطة تحدد موقع الاصطدام خلافاً للحالة التقليدية b) تنتشر الموجة على هيئة قشرة كروية والاندفاع الخطي منحفظ ولكن المكشاف D c) الموضوع في نقطة ما من الفضاء لا يستطيع تحديد هوية الجسيم الذي التقطه : أهو 1 أم 2. وهذا هو مبدأ عدم التمييز بين الجسيمات المتطابقة في الميكانيك الكمومي.

## <u>2.1– مؤثر الاستبدال Exchange – المستبدل</u>

لنرمز، كي لا نعقد الكتابة إلى العناصر التي تعين حالة الجسيم بالرمز $\xi$ الذي يتضمن على سبيل المثال وضعه ومسقط سبينه على محور ما وإلى دالة الموجة لجسيمين (وهي في الواقع الجداء التانسوري لمتجهتي حالة) بالرمز $\psi(\xi_1, \xi_2)$ أي أن

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = |\psi_1(\xi_1)\rangle|\psi(\xi_2)\rangle \tag{1.1}$$

نرمز أخيراً للمؤثر الذي يبادل متجهتي الحالة، أي الذي يتيح للجسيمين المتطابقين تبادل هويتهما (الوضع والسبين هنا) بالرمز $P_{12}$ ونسميه مؤثر الاستبدال أو المستبدل :

$$P_{12}\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1) = |\psi_1(\xi_2)\rangle|\psi_2(\xi_1)\rangle \tag{1.2}$$

تظهر علاقة التعريف هذه أن تطبيق المؤثر مرتين يعيد إلى الحالة البدائية أي أن

$$P_{12}^2 = I \tag{1.3}$$

أو

$$P_{12}^{-1} = P_{12} \tag{1.3)'$$

لنفترض من جهة أخرى أن دالات الموجة $\psi(\xi_1, \xi_2)$ منظمة للواحد أي أن

$$\left(\langle\psi_1(\xi_1)|\langle\psi_2(\xi_2)|\right)|\psi_1(\xi_1)\rangle|\psi_2(\xi_2)\rangle = 1$$

وبالتالي فإن

$$\left(\langle\psi_1(\xi_1)|\langle\psi_2(\xi_2)|P_{12}\right)P_{12}|\psi_1(\xi_1)\rangle|\psi_2(\xi_2)\rangle = 1$$

ومنه

$$P_{12}^{\dagger}P_{12} = 1 \tag{1.3)''$$

أي أن $P_{12}^{\dagger} = P_{12}^{-1}$ و $P_{12}$ واحدي، وذاتي الترافق. قيمه الخاصة أعداد قيمتها المطلقة تساوي 1 أي أنها من الشكل $e^{i\alpha}$ : إن مبادلة الهوية بين جسيمين متطابقين هو ضرب دالة الموجة للجسيمين بعامل طور $e^{i\alpha}$.

$$\psi(\xi_2, \xi_1) = e^{i\alpha}\psi(\xi_1, \xi_2)$$

فإذا كان الطور $e^{i\alpha}$ يساوي 1 فإن

$$\psi(\xi_2, \xi_1) = \psi(\xi_1, \xi_2)$$

ونقول عندئذ إن المتجهة الخاصة $\psi(\xi_1, \xi_2)$ لـ $P_{12}$ متجهة متناظرة ونرمز لها بـ $\psi_S$ أما إذا كان الطور $e^{i\alpha}$ يساوي 1- فإننا نقول عن المتجهة الخاصة إنها مضادة التناظر ونرمز لها بـ $\psi_A$

$$P_{12}\psi_S(\xi_1, \xi_2) = \psi_S(\xi_2, \xi_1)$$

$$P_{12}\psi_A(\xi_1, \xi_2) = -\psi_A(\xi_2, \xi_1) \tag{1.4}$$

ذكرنا في الفصل الرابع بكيفية الحصول من دالة بمتغيرين $f(x_1, x_2)$ على دالة متناظرة أو مضادة التناظر نكتبهما على الشكل

$$f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)$$

أو على الشكل

$$f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1)$$

سنفعل الشيء نفسه مع المؤثر $P_{12}$ بأن نأخذ مؤثرين، نطلق عليهما بالترتيب اسم مُنظِّر Symmetrizer ومنظر مضاد ونرمز لهما بـ S و A. معرفين على النحو التالي

$$S = \frac{1}{2}(I + P_{12}) \tag{1.5)_S$$

$$A = \frac{1}{2}(I - P_{12}) \tag{1.5)_A$$

يفعل هذان المؤثران في فضاءات هيلبرت التانسورية من الرتبة الثانية $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ التي ينتمي لها الجداء التانسوري $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$.

**ملاحظة :**
افترضنا أن فضائي هيلبرت $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ اللذين يعينان الجداء التانسوري متطابقان لأننا نهتم بشكل خاص بالجسيمات المتطابقة ولكن المحاكمة تنطبق على فضاءات مختلفة تعين جسيمات مختلفة و $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$.

**<u>قضية 1</u> :**
إن المؤثرين S و A مؤثرا إسقاط متعامدان على الفضاء $\mathcal{H}^{\otimes 2}$

لدينا في الواقع نظراً لـ (1.3)

$$S^2 = \frac{1}{4}\left(I + P_{12} + P_{12} + P_{12}^2\right) = \frac{1}{2}\left(I + P_{12}\right) = S$$

وكذلك

$$A^2 = A$$

ومن جهة ثانية فإنهما ذاتيي الترافق لأن $P_{12}$ ذاتي الترافق كما رأينا، فهما إذاً مسقِطان حسب a) من القضية 13 في الفصل الخامس وهما متعامدان حسب c) من ذات القضية لأن

$$AS = SA = 0$$

وبالتالي فإن مجموعهما مسقِط حسب c) أيضاً

$$S + A = I \qquad (1.6)$$

ومنه

**<u>لازمة</u> :**
إن الجداء التانسوري من الرتبة الثانية لفضائين هيلبرتيين هو مجموع مباشر لمتجهات متناظرة ومتجهات مضادة التناظر.

أو بعبارة أخرى لا يمكن لدالة موجة لجسيمين إلا أن تكون متناظرة أو مضادة التناظر؛ هذا يعني أن دالات موجة الجسيمات الكمومية والأولية منها بشكل خاص لا يمكن أن تنتمي إلا إلى أحد هذين النوعين من الدالات المتناظرة أو مضادة التناظر : إن انتماء زوج منها إلى أحد النوعين يعني انتماء كل الأزواج إلى ذات النوع، وهكذا فإن الفضاء الذي ينتمي إليه n جسيماً هو فضاء جزئي من $\mathcal{H}^{\otimes n}$، الجداء التانسوري لـ n فضاء هيلبرتياً، مسقط مؤثر التناظر الذي سنعرفه في هذا الفضاء ونرمز له بـ S، أو مسقط مؤثر التناظر المضاد الذي سنرمز له بـ A. مع الإشارة منذ الآن أن مجموع المسقِطين S + A في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ لا يساوي المؤثر الواحدي وبالتالي أن لازمة القضية 1 غير محققة في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ : توجد في هذا الفضاء دالات ليست بالمتناظرة وليست بمضادة التناظر ولا تمثل والحال هذه جسيمات كمومية.

## 3.1- البوزونات والفيرميونات

يطلق على الجسيمات المتطابقة التي تنتمي دالاتها إلى $S\mathcal{H}^{\otimes 2}$ (وبصورة أعم إلى $S\mathcal{H}^{\otimes n}$) اسم بوزونات، وعلى تلك التي تنتمي دالاتها إلى $A\mathcal{H}^{\otimes 2}$ (وبصورة أعم إلى $A\mathcal{H}^{\otimes n}$) اسم فيرميونات. منشأ هذه التسمية الإحصاء الكمومي الذي سندرسه في الكتاب الخامس، لأنه من الممكن وجود بوزونين في نفس الحالة الكمومية $\xi_1 = \xi_2$ بينما يستحيل ذلك من أجل فيرميونين لأن $\psi_A(\xi_1, \xi_2) = -\psi_A(\xi_2, \xi_1)$ حسب (1.4) وبالتالي فإن دالة الموجة لفيرميونين متمتعين بنفس الهوية، وبنفس الحالة الكمومية : $\xi_1 = \xi_2$، منعدمة

$$\psi_A(\xi_1, \xi_2) = -\psi_A(\xi_2, \xi_1) = 0 \qquad (1.7)$$

تعبر العلاقة (1.7) التي استنبطناها من كون دالة الموجة لفيرميونين مضادة التناظر عما يعرف باسم مبدأ الاستبعاد Exclusion لباولي : يستحيل وجود فيرميونين متطابقين في نفس الحالة الكمومية – في نفس المكان ونفس مسقط السبين على اتجاه ما على سبيل المثال.

وهكذا فإنه من الممكن إحصائياً وجود أي عدد نريد من البوزونات في نفس الحالة الكمومية. يعرف هذا الإحصاء باسم إحصاء بوز – آنشتاين الذي اقترحه بوز للدراسة الإحصائية للفوتونات والذي عممه آنشتاين إلى جسيمات أخرى (1924). بينما لا يمكن إحصائياً وضع سوى فيرميونين في موضع واحد شريطة أن يكون مسقط سبينهما مختلفاً : إن العدد 2 هو أكبر عدد ممكن لوجود الفيرميونات في حالة معينة – ذات الوضع ومسقط سبين مختلف. يعرف هذا الإحصاء باسم إحصاء فيرمي–ديراك الذي اقترحه فيرمي للدراسة الإحصائية للإلكترونات والذي فسره ديراك في نفس الوقت تقريباً (1926).

يبرهن الميكانيك الكمومي النسبوي على الصلة الوثيقة بين الإحصاء، بين التناظر وتضاد التناظر، وبين السبين : إن سبين البوزون عدد صحيح في حين سبين الفيرميون عدد نصف صحيح. وهكذا تنقسم المادة إلى نوعين مختلفين تماماً هما النوع البوزوني والنوع الفيرميوني، ولم تستطع الفيزياء، حتى الآن إرجاع هذين النوعين إلى منشأ واحد. هذا على مستوى الجسيمات الأولية المؤلفة من فيرميونات، هي الكواركات والليبتونات وسبينها يساوي $\frac{1}{2}$، ومن بوزونات، هي الفوتون، وسيط التفاعل الكهرطيسي و $Z$ و $W^{\pm}$ وسطاء التفاعل الضعيف والكلوونات الثمانية وسطاء التفاعل القوي وأخيراً الغرافيتون وسيط التفاعل التثاقلي (الجاذبية الكونية) سبين كل هذه البوزونات يساوي 1 ماعدا سبين الغرافيتون الذي يساوي 2، إن وُجد. ويتحدد النوع البوزوني أو الفيرميوني للجسيمات المركبة، النويات والذرات والجزيئات بعدد الفيرميونات المكونة لها فهي بوزونات إذا كان هذا العدد زوجياً وفيرميونات إذا كان فردياً والسبين الكلي عدد نصف صحيح في هذه الحالة. وهكذا فإن نويات الذرات ذات الوزن الذري الفردي – المؤلفة من عدد فردي من البروتونات والنوترونات (وهي فيرميونات)

هي فيرميونات وتلك ذات الوزن الذري الزوجي هي بوزونات. ويصح الأمر ذاته على الذرات حيث يجب إضافة العدد الذري، عدد الإلكترونات، إلى الوزن الذري لتحديد نوع الذرة.

## 4.1- مبدأ الاستبعاد وجدول العناصر الدوري

سنهمل في تقريب أولي التفاعل الكهربائي الراكد لإلكترونات الذرة فيما بينها وتفاعل عزومها المغنطيسية مع العزم المغنطيسي للنواة ومع العزوم المغنطيسية المدارية، آخذين بعين الاعتبار تفاعلها مع النواة ذات الشحنة Z وحده. تتحدد مستويات الطاقة كما في ذرة الهدروجين بالعدد الكمومي الرئيسي $n$ : 1، 2، ... وهي مستويات متدنية يتعين تدنيها بالعدد الكلي المداري $\ell$، الذي يأخذ من أجل $n$ معين كل القيم بين الصفر و $n-1$، أضف إلى ذلك التدني بالنسبة للعدد الكمومي المغنطيسي المداري $m_\ell$ : $2\ell+1$ مرة وهكذا فإن نتيجة هذا التدني المزدوج هو، كما رأينا في ((3.14).3)

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1)=n^2$$

يجب أن نضيف إلى التدني المزدوج تدني السبين : إلكترونين على الأكثر حسب مبدأ الاستبعاد مختلفي المسقط على محور معين $\pm\frac{\hbar}{2}$؛ وعدد مستويات الطاقة الممكنة من أجل $n$ معين هو $2n^2$.

أشرنا إلى قيم $\ell$ 0، 1، 2، ... بالحروف s، p، d، f، g ... ووضعنا مستوى الطاقة على يسارها: 2p تعني أن $n$ تساوي 2 و $\ell$ تساوي 1؛ توجد ثلاثة مستويات لها نفس الطاقة ومسقط العزم الزاوي المداري على محور ما فيها هو 1+ و 0 و 1- وبالتالي فإن عدد الإلكترونات الذي يملأ المستوى 2p (أو الطبقة 2p) هو 6. عدد إلكترونات الطبقة $n=3$ هو 18 إلكتروناً موزعة بين 3d $(\ell=-2,-1,0,+1,+2)$ و 3p $(\ell=-1,0,+1)$ و 3s $(\ell=0)$ : $18=2(1+3+5)$، وهكذا.

إن طاقة القاع (السالبة) لذرة الهدروجين هي 1s، قيمتها المطلقة 13.6ev هي طاقة تأيين ذرة الهدروجين. يقع الإلكترون أقرب ما يمكن من النواة نتيجة التفاعل الكهربائي الجاذب بينهما. أما طاقة تأيين ذرة الهليوم 24.6ev فهي ضعف طاقة تأيين ذرة الهدروجين تقريباً لأن جذب الإلكترون هو ضعف الجذب في ذرة الهدروجين $(Z=2)$ ويقع إلكترونا الهليوم أقرب ما يمكن من النواة في الحالة 1s. وهي حالة لا تستوعب سوى هذين الإلكترونين. عندما يزداد العدد الذري، $Z=3$ من أجل الليتيوم فمن اللازم أن يبتعد الإلكترون الثالث عن الطبقة 1s الممتلئة بالإلكترونين ليحتل المستوى 2s الذي يبعده عن النواة بحيث يصبح تأيينه أسهل من طرد إلكترون الهدروجين أو إلكترون الهليوم : طاقة التأيين هي 5,4ev. احتل الإلكترون المستوى 2s $(\ell=0)$ وليس المستوى 2p $(\ell=1)$ لأننا رأينا في (3.(2.10) أن الحل القطري من أجل $r$ صغيرة متناسب مع $r^\ell$ وأن احتمال وجود الجسيم في المجال $[\vec{r},\vec{r}+d\vec{r}]$ متناسب مع $r^{2(\ell+1)}$ (من أجل $r$ صغيرة) ويتناهى بسرعة نحو الصفر كلما كان $\ell$ كبيراً : وهكذا فاحتمال الوجود

هي فيرميونات وتلك ذات الوزن الذري الزوجي هي بوزونات. ويصح الأمر ذاته على الذرات حيث يجب إضافة العدد الذري، عدد الإلكترونات، إلى الوزن الذري لتحديد نوع الذرة.

## 4.1- مبدأ الاستبعاد وجدول العناصر الدوري

سنهمل في تقريب أولي التفاعل الكهربائي الراكد لإلكترونات الذرة فيما بينها وتفاعل عزومها المغنطيسية مع العزم المغنطيسي للنواة ومع العزوم المغنطيسية المدارية، آخذين بعين الاعتبار تفاعلها مع النواة ذات الشحنة Z وحده. تتحدد مستويات الطاقة كما في ذرة الهدروجين بالعدد الكمومي الرئيسي $n$ : 1، 2، ... وهي مستويات متدنية يتعين تدنيها بالعدد الكلي المداري $\ell$، الذي يأخذ من أجل $n$ معين كل القيم بين الصفر و $n-1$، أضف إلى ذلك التدني بالنسبة للعدد الكمومي المغنطيسي المداري $m_\ell$ : $2\ell+1$ مرة وهكذا فإن نتيجة هذا التدني المزدوج هو، كما رأينا في ((3.14).3)

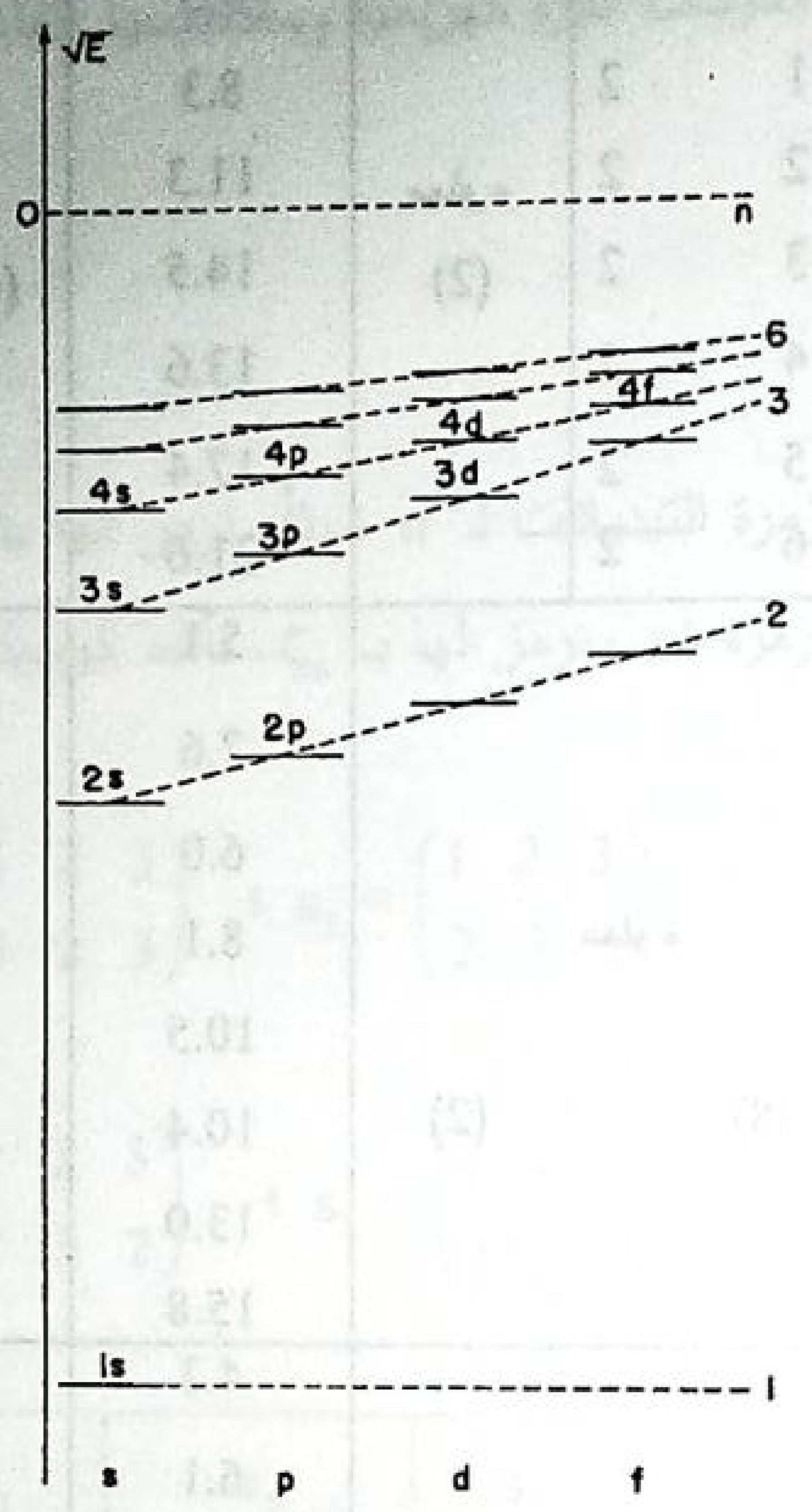
$$\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1)=n^2$$

يجب أن نضيف إلى التدني المزدوج تدني السبين : إلكترونين على الأكثر حسب مبدأ الاستبعاد مختلفي المسقط على محور معين $\pm\frac{\hbar}{2}$؛ وعدد مستويات الطاقة الممكنة من أجل $n$ معين هو $2n^2$.

أشرنا إلى قيم $\ell$ 0، 1، 2، ... بالحروف s، p، d، f، g ... ووضعنا مستوى الطاقة على يسارها: 2p تعني أن $n$ تساوي 2 و $\ell$ تساوي 1؛ توجد ثلاثة مستويات لها نفس الطاقة ومسقط العزم الزاوي المداري على محور ما فيها هو +1 و 0 و -1 وبالتالي فإن عدد الإلكترونات الذي يملأ المستوى 2p (أو الطبقة 2p) هو 6. عدد إلكترونات الطبقة $n=3$ هو 18 إلكتروناً موزعة بين 3d $(\ell=-2,-1,0,+1,+2)$ و 3p $(\ell=-1,0,+1)$ و 3s $(\ell=0)$ : $18=2(1+3+5)$، وهكذا.

إن طاقة القاع (السالبة) لذرة الهدروجين هي 1s، قيمتها المطلقة 13.6ev هي طاقة تأيين ذرة الهدروجين. يقع الإلكترون أقرب ما يمكن من النواة نتيجة التفاعل الكهربائي الجاذب بينهما. أما طاقة تأيين ذرة الهليوم 24.6ev فهي ضعف طاقة تأيين ذرة الهدروجين تقريباً لأن جذب الإلكترون هو ضعف الجذب في ذرة الهدروجين $(Z=2)$ ويقع إلكترونا الهليوم أقرب ما يمكن من النواة في الحالة 1s. وهي حالة لا تستوعب سوى هذين الإلكترونين. عندما يزداد العدد الذري، $Z=3$ من أجل الليثيوم فمن اللازم أن يبتعد الإلكترون الثالث عن الطبقة 1s الممتلئة بإلكترونين ليحتل المستوى 2s الذي يبعده عن النواة بحيث يصبح تأيينه أسهل من طرد إلكترون الهدروجين أو إلكترون الهليوم : طاقة التأيين هي 5,4ev. احتل الإلكترون المستوى 2s $(\ell=0)$ وليس المستوى 2p $(\ell=1)$ لأننا رأينا في (3.(2.10) أن الحل القطري من أجل r صغيرة متناسب مع $r^\ell$ وأن احتمال وجود الجسيم في المجال $[\bar{r},\bar{r}+d\bar{r}]$ متناسب مع $r^{2(\ell+1)}$ (من أجل r صغيرة) ويتناهى بسرعة نحو الصفر كلما كان $\ell$ كبيراً : وهكذا فاحتمال الوجود

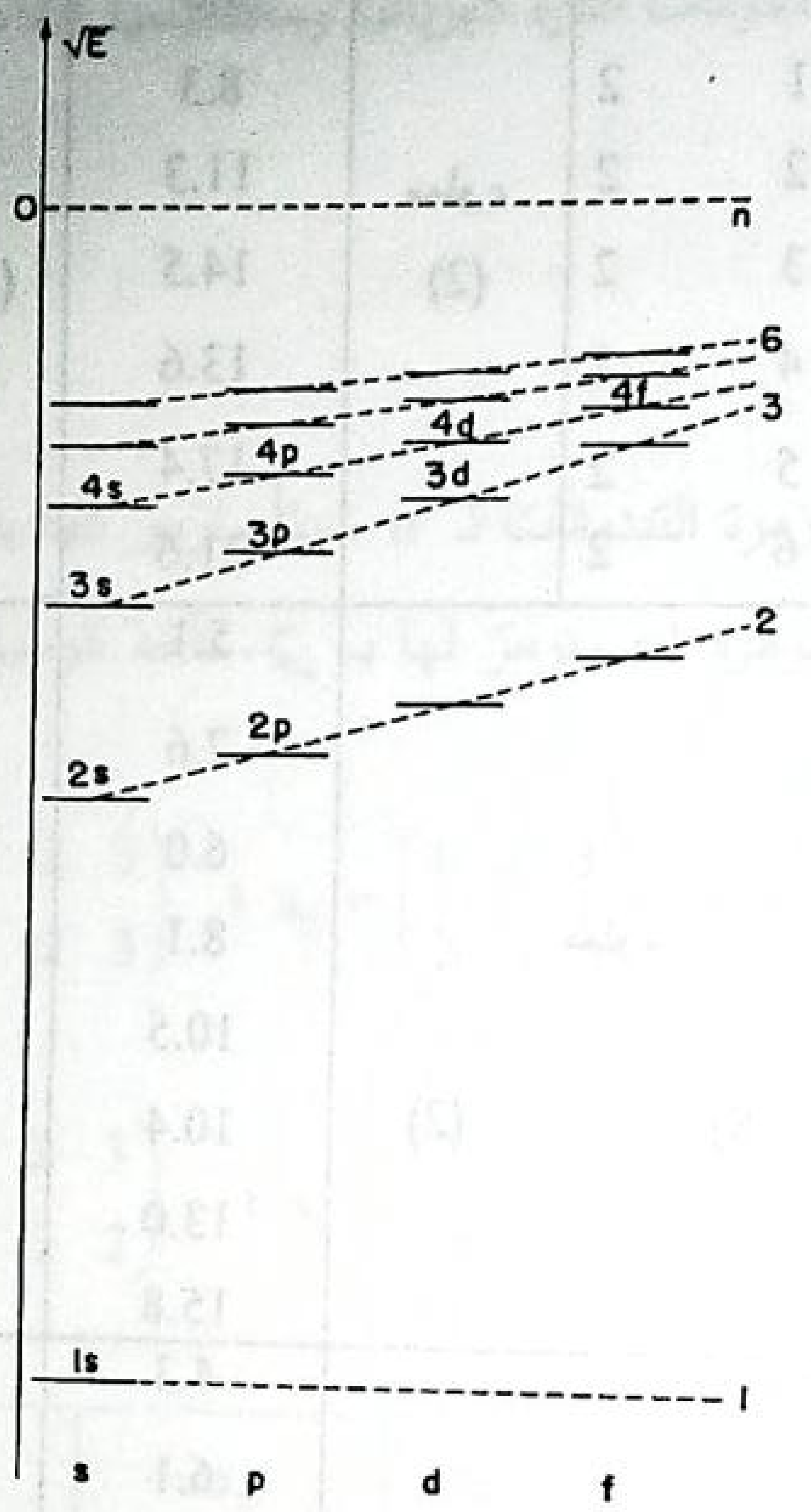
في 2s أكبر من احتمال الوجود في 2p. هذا يعني أيضاً أن الإلكترون في المستوى 2s أقرب إلى النواة منه في المستوى 2p وطاقة تأيينه، حيث يتأثر بشحنة النواة $3e^{+}$، أكبر من طاقة تأيين المستوى 2p، حيث لا يتأثر الإلكترون البعيد نسبياً عن النواة إلا بشحنة متناسبة مع (3e - 2e). تنطبق هذه المحاكمةعلى كل مستويات الطاقة، الشكل.3.




الشكل.3

وضعنا في الجدول التالي العناصر الستة والثلاثين الأولى مع تبيان طاقة التأيين للإلكترونات الأقل ارتباطاً بالنواة مع عدد الإلكترونات في كل طبقة (أي من أجل كل n) المساوي لـ $2n^2$. ترتفع طاقة التأيين مع ارتفاع العدد الذري Z وهكذا يصعب تأيين النيون على سبيل المثال، 21,6ev، ولذا نقول عنه إنه خامل كيمياوياً. أما الصوديوم الذي يأتي بعده فإن الإلكترون الحادي عشر يقع في $n = 3$ بعد أن امتلأ $n = 1$ و $n = 2$ : $2(1^2 + 2^2)$ ويحتل الوضع 3s سهل التأيين (مستوى الطاقة السالب أعلى بكثير من المستويات 2s, 2p, 2d... : 2) والصوديوم نشيط كيمياوياً. لنلاحظ أنه ليس من الضروري أن تحتل الإلكترونات على وجه التحديد الأوضاع التي تبدو طبيعية أي أن تملأ الطبقات طبقة فطبقة قبل أن تنتقل إلى الطبقات التالية. إن ما يحدد وضع الإلكترون هو طاقة تأيينه، قرب مستوى طاقته من الطاقة 0. يحدث كما في حالة البوتاسيوم والكالسيوم أن تكون طاقة التأيين في 4s أكبر من الطاقة 3d، انظر الشكل.3. وهكذا يحتل الإلكترون التاسع عشر للبوتاسيوم والإلكترونان التاسع عشر والعشرون للكالسيوم الطبقة 4s عوضاً عن البدء بإملاء الطبقة 3d التي تتسع لعشر إلكترونات كما رأينا والتي لا تمتلأ إلا عند النحاس.

في 2s أكبر من احتمال الوجود في 2p. هذا يعني أيضاً أن الإلكترون في المستوى 2s أقرب إلى النواة منه في المستوى 2p وطاقة تأيينه، حيث يتأثر بشحنة النواة $3e^+$، أكبر من طاقة تأيين المستوى 2p، حيث لا يتأثر الإلكترون البعيد نسبياً عن النواة إلا بشحنة متناسبة مع $(3e-2e)$. تنطبق هذه المحاكمةعلى كل مستويات الطاقة، الشكل.3.




الشكل.3

وضعنا في الجدول التالي العناصر الستة والثلاثين الأولى مع تبيان طاقة التأيين للإلكترونات الأقل ارتباطاً بالنواة مع عدد الإلكترونات في كل طبقة (أي من أجل كل n) المساوي لـ $2n^2$. ترتفع طاقة التأيين مع ارتفاع العدد الذري Z وهكذا يصعب تأيين النيون على سبيل المثال، 21,6ev، ولذا نقول عنه إنه خامل كيميائياً. أما الصوديوم الذي يأتي بعده فإن الإلكترون الحادي عشر يقع في $n=3$ بعد أن امتلأ $n=1$ و $n=2$ : $2(1^2+2^2)$ ويحتل الوضع 3s سهل التأيين (مستوى الطاقة السالب أعلى بكثير من المستويات 2 : (2s, 2p, 2d...) والصوديوم نشيط كيميائياً. لنلاحظ أنه ليس من الضروري أن تحتل الإلكترونات على وجه التحديد الأوضاع التي تبدو طبيعية أي أن تملأ الطبقات طبقة فطبقة قبل أن تنتقل إلى الطبقات التالية. إن ما يحدد وضع الإلكترون هو طاقة تأيينه، قرب مستوى طاقته من الطاقة 0. يحدث كما في حالة البوتاسيوم والكالسيوم أن تكون طاقة التأيين في 4s أكبر من الطاقة 3d، انظر الشكل.3. وهكذا يحتل الإلكترون التاسع عشر للبوتاسيوم والإلكترونان التاسع عشر والعشرون للكالسيوم الطبقة 4s عوضاً عن البدء بإملاء الطبقة 3d التي تتسع لعشر إلكترونات كما رأينا والتي لا تمتلأ إلا عند النحاس.

| Z | العنصر | طاقة التأين | 1s | 2s | 2p | 3s | 3p | 3d | 4s | 4p | 4d | 4f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | H هدروجين | 13.6 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | He هليوم | 24.6 | 2 | | | | | | | | | |
| 3 | Li ليتيوم | 5.4 | | 1 | | | | | | | | |
| 4 | Be بيرليوم | 9.3 | | 2 | | | | | | | | |
| 5 | B بورون | 8.3 | | 2 | 1 | | | | | | | |
| 6 | C كربون | 11.3 | مملوء | 2 | 2 | عدد الإلكترونات في كل حالة | | | | | | |
| 7 | N نيتروجين (أزوت) | 14.5 | (2) | 2 | 3 | | | | | | | |
| 8 | O أوكسجين | 13.6 | | 2 | 4 | | | | | | | |
| 9 | F فلور | 17.4 | | 2 | 5 | | | | | | | |
| 10 | Ne نيون | 21.6 | | 2 | 6 | | | | | | | |
| 11 | Na صوديوم | 5.1 | | | | 1 | | | | | | |
| 12 | Mg مغنزيوم | 7.6 | | | | 2 | | | | | | |
| 13 | Al ألمنيوم | 6.0 | | | | 2 | 1 | | | | | |
| 14 | Si سيليكون | 8.1 | | مملوء | | 2 | 2 | | | | | |
| 15 | P فوسفور | 10.5 | | | | 2 | 3 | | | | | |
| 16 | S كبريت | 10.4 | (2) | (8) | | 2 | 4 | | | | | |
| 17 | Cl كلور | 13.0 | | | | 2 | 5 | | | | | |
| 18 | A أرغون | 15.8 | | | | 2 | 6 | | | | | |
| 19 | K بوتاسيوم | 4.3 | | | | | | | 1 | | | |
| 20 | Ca كالسيوم | 6.1 | | | | | | | 2 | | | |
| 21 | Sc سكانديوم | 6.5 | | | | | | 1 | 2 | | | |
| 22 | Ti تيتانيوم | 6.8 | | | | | | 2 | 2 | | | |
| 23 | V فاناديوم | 6.7 | | | | | | 3 | 2 | | | |
| 24 | Cr كروم | 6.8 | | مملوء | | | | 5 | 1 | | | |
| 25 | Mn منغنيز | 7.4 | (2) | (8) | | (8) | | 5 | 2 | | | |
| 26 | Fe حديد | 7.9 | | | | | | 6 | 2 | | | |
| 27 | Co كوبالت | 7.9 | | | | | | 7 | 2 | | | |
| 28 | Ni نيكل | 7.6 | | | | | | 8 | 2 | | | |
| 29 | Cu نحاس | 7.7 | | | | | | 10 | 1 | | | |
| 30 | Zn زنك | 9.4 | | | | | | 10 | 2 | | | |
| 31 | Ga غاليوم | 6.0 | | | | | | | 2 | 1 | | |
| 32 | Ge جرمانيوم | 7.9 | | مملوء | | | | | 2 | 2 | | |
| 33 | As زرنيخ | 9.8 | | | | | | | 2 | 3 | | |
| 34 | Se سلينيوم | 9.7 | (2) | (8) | | (18) | | | 2 | 4 | | |
| 35 | Br بروم | 11.8 | | | | | | | 2 | 5 | | |
| 36 | Kr كريبتون | 14.0 | | | | | | | 2 | 6 | | |

لنلاحظ أخيراً أن تشكيلة طبقة الإلكترونات الخارجية تحدد سلوك العناصر الكيمياوي : البيريليوم والسيليكون متشابهان كيمياوياً : إلكترونان في 2s و 3s على الترتيب، وكذلك الكلور والفلور: 5إلكترونات في 3p و 2p على الترتيب. أما الكريبتون فهو كغاز الأرغون وغاز النيون خامل كيميائياً : 6 إلكترونات في 4p، 3p، 2p على الترتيب. ولنا عودة إلى الموضوع عندما ننتقل من هذا التقريب الأولي إلى دراسة أعمق لتفاعلات مكونات الذرة كهربائياً ومغنطيسياً (تفاعل العزوم الزاوية).

## 5.1- المنظر والمنظر المضاد

لنبدأ هنا بإلقاء نظرة سريعة على زمرة التبديلات لـ n شيئاً، نرمز لها بالأرقام 1، 2... n أو بالحروف a، b، c... عدد عناصر هذه الزمرة n! ونرمز لها بـ $\zeta_n$. نأخذ كوسيلة إيضاح لها زمرة تبديلات ثلاثة أعداد المؤلفة من ستة عناصر هي

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \; s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; \; s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ; \; s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \; s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

جدول ضرب عناصرها غير التبادلي هو

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_4$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_6$ | $s_4$ | $s_5$ |
| $s_4$ | $s_4$ | $s_6$ | $s_5$ | $s_1$ | $s_3$ | $s_2$ |
| $s_5$ | $s_5$ | $s_4$ | $s_6$ | $s_2$ | $s_1$ | $s_3$ |
| $s_6$ | $s_6$ | $s_5$ | $s_4$ | $s_3$ | $s_2$ | $s_1$ |

حيث نتعارف على ضرب السطر بالعمود، $s_2 s_4 = s_5$ على سبيل المثال.

**تعريف 1 :**
نقول عن عنصرين من زمرة التبديلات $x, y \in \zeta_n$ إنهما مترافقان عندما يوجد في الزمرة عنصر ثالث a يحقق العلاقة

$$x = a\, y\, a^{-1}$$

لنلاحظ أخيراً أن تشكيلة طبقة الإلكترونات الخارجية تحدد سلوك العناصر الكيمياوي : البيريليوم والسيليكون متشابهان كيمياوياً : إلكترونان في 2s و 3s على الترتيب، وكذلك الكلور والفلور: 5إلكترونات في 3p و 2p على الترتيب. أما الكريبتون فهو كغاز الأرغون وغاز النيون خامل كيميائياً : 6 إلكترونات في 4p، 2p،3p على الترتيب. ولنا عودة إلى الموضوع عندما ننتقل من هذا التقريب الأولي إلى دراسة أعمق لتفاعلات مكونات الذرة كهربائياً ومغنطيسياً (تفاعل العزوم الزاوية).

## 5.1- المنظر والمنظر المضاد

لنبدأ هنا بإلقاء نظرة سريعة على زمرة التبديلات لـ n شيئاً، نرمز لها بالأرقام 1، 2... n أو بالحروف a، b، c ... عدد عناصر هذه الزمرة !n ونرمز لها بـ $\zeta_n$. نأخذ كوسيلة إيضاح لها زمرة تبديلات ثلاثة أعداد المؤلفة من ستة عناصر هي

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \; s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; \; s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ; \; s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \; s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

جدول ضرب عناصرها غير التبادلي هو

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_4$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_6$ | $s_4$ | $s_5$ |
| $s_4$ | $s_4$ | $s_6$ | $s_5$ | $s_1$ | $s_3$ | $s_2$ |
| $s_5$ | $s_5$ | $s_4$ | $s_6$ | $s_2$ | $s_1$ | $s_3$ |
| $s_6$ | $s_6$ | $s_5$ | $s_4$ | $s_3$ | $s_2$ | $s_1$ |

حيث نتعارف على ضرب السطر بالعمود، $s_2s_4 = s_5$ على سبيل المثال.

**تعريف 1 :**

نقول عن عنصرين من زمرة التبديلات $x, y \in \zeta_n$ إنهما مترافقان عندما يوجد في الزمرة عنصر ثالث a يحقق العلاقة

$$x = a\, y\, a^{-1}$$

وهي علاقة تكافؤ (انعكاسية $x = e\,x\,e^{-1}$ من أجل أي $x$، حيث $e$ العنصر الحيادي؛ إنه $s_1$ في مثالنا؛ متناظرة $y = a^{-1}\,x\,a$؛ ومتعدية : إذا كان $x = a\,y\,a^{-1}$ و $y = b\,z\,b^{-1}$ فإن $x = a\,b\,z\,b^{-1}\,a^{-1}$؛ أي $x = a\,b\,z(ab)^{-1}$) تشكل العناصر المترافقة (المتكافئة) صفاً نسميه صف الترافق ونرمز له بـ $C$ تتألف الزمرة $\zeta_3$ من ثلاثة صفوف هي $C_1 = \{s_1\}$؛ $C_2 = \{s_2, s_3\}$ و $C_3 = \{s_4, s_5, s_6\}$. لدينا على سبيل المثال

$$s_4 = s_2 s_5 s_2^{-1}$$
$$= s_3 s_6 s_3^{-1}$$

نرى من (1.7) أن

$$s_4(1) = 1 = s_2 \circ s_5 \circ s_2^{-1}(1) = s_2 \circ s_5(3) = s_2(3) = 1$$

**تعريف 2 :**

نقول عن عنصر من $\zeta_n$ إنه دوار cyclic، أو تبديل دائري إذا كان من الشكل

$$a \to b \to c \ldots a$$

ونكتب

$$\begin{pmatrix} a & b & c \ldots m \\ b & c & d \ldots. a \end{pmatrix}$$

نقول عن عدد العناصر $a \to m$ إنها طول الدوار وعن الدوار المؤلف من عنصرين فقط إنه مناقلة transposition. إن $s_2$ المبتدأ بـ 1 والمنتهي بـ 1 دواري.

يمكن كتابة أي عنصر من $\zeta_n$ على شكل جداء دوارات. يتألف التبديل التالي من $\zeta_7$ من دوارين :

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 3\,4\,2\,1\,6\,7\,5 \end{pmatrix} = (1\,3\,2\,4)(5\,6\,7)$$

لنلاحظ أن المناقلة من أجل عنصر ما ينتمي إلى $\tau \in \zeta_n$ تعني إذا ما رقمنا عنصرين متجاورين في سطر المتغيرات ... $a, b$ بـ $i$ و $i+1$، أن

$$\tau(i+1) = i \qquad (1.8)$$
$$\tau(i) = i + 1$$
$$\tau(k) = 0 \quad \text{إذا كان} \quad k \neq i$$

واضح أن المناقلة $\tau$ تساوي المناقلة العكسية $\tau^{-1}$ : $\tau^{-1}(i) = i + 1 = \tau(i)$.

ويمكن البرهان بالتكرار أن كل تبديل هو جداء مناقلات. لدينا على سبيل المثال في $\zeta_3$ :

$s_1 = (1)(2)(3)$ إنه العنصر الحيادي في $\zeta_3$

$s_2 = (23)(13)$ ذلك أننا إذا رمزنا للتبديل (23) بـ $\tau_1$ ولـ (13) بـ $\tau_2$

فإن

$$s_2(1) = (\tau_1 \circ \tau_2)(1) = 2$$

$s_2(2) = \tau_1(\tau_2(2)) = \tau_1(2) = 3$ لأن المناقلة $\tau_2$ تبقي على 2 ثابتاً

$s_2(3) = \tau_1(\tau_2(3)) = \tau_1(1) = 1$ لأن المناقلة $\tau_1$ تبقي على 1 ثابتاً

و

$$s_3 = (13)(23)$$

و

$$s_4 = (23)(1) \quad ، \quad s_5 = (12)(3) \quad ، \quad s_6 = (13)(2)$$

إن لهذه العناصر الثلاثة ذات البنية الدوارية (مناقلة واحدة وعنصر ثابت) بينما يتكون العنصران $s_2$ و $s_3$ من مناقلتين ولهما ذات البنية الدوارية : إن لعناصر صف الترافق ذات البنية الدوارية. واضح أن الدوار، بصفته تبديلاً، مؤلف من جداء مناقلات؛ فالدوار $(1\,3\,2\,4)$ مثلاً هو

$$(1\,3\,2\,4) = (13)(32)(24) = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \qquad (1.9)$$

يمكن تمثيل أي عنصر $\tau \in \zeta_n$ بمصفوفة $n \times n$ نرمز لها بـ $M(\tau)$

$$\begin{pmatrix} \tau(1) \\ \tau(2) \\ \vdots \\ \tau(n) \end{pmatrix} = M(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

ليكن $\tau(i) = j$ $\quad i, j \in [1, n]$. هذا يعني، عندما نكتب $\tau(i)$ على الشكل $\tau(i) = M_{ki}k$، أن كل عناصر العمود $i$ تساوي الصفر ماعدا العنصر الموجود في السطر $j$، $M_{ji}$، المساوي للواحد. وهكذا فإن معين $M$ يساوي لـ $\pm 1$. نسمي هذا العدد توقيع التبديل أو شفعيته (فردية أو زوجية) ونرمز لها بـ $\varepsilon(\tau)$. ولدينا من أجل مناقلة ما $(k\ell)$ مصفوفة كل عناصرها القطرية مساوية للواحد ماعدا العنصرين $M_{kk}$ و $M_{\ell\ell}$ المعدومين أما $M_{k\ell}$ و $M_{\ell k}$ المتناظران بالنسبة للقطر فيساويان الواحد ويعينان بالتالي الإشارة 1- للمعين : إن توقيع المناقلة يساوي 1- وبالتالي فإن توقيع مصفوفة تمثل تبديلاً ما $\tau$ هو $\varepsilon(\tau) = (-1)^r$ حيث $r$ عدد المناقلات التي يتضمنها التبديل $r < n$. لدينا معين الاستبدال $P_{12} = \zeta_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ وتوقيعه 1- بطبيعة الحال ولدينا على سبيل المثال في $\zeta_3$ الصف $(s_2, s_3)$ المؤلف من مناقلتين وبالتالي توقيعه $(-1)^2 = 1$ بينما يتألف الصف $C_3$ من مناقلة واحدة وتوقيعه يساوي لـ 1-. إن مصفوفة $s_4$ على سبيل المثال هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومعينها يساوي 1- كما نرى.

لنأخذ كمثل ثان الدوار (1.9) المؤلف من ثلاث مناقلات، توقيعه يساوي $(-1)^3 = -1$ ونتحقق بسهولة من ذلك عندما نكتب مصفوفته على الشكل

$$\tau(1\,3\,2\,4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 = \tag{1.9'}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**<u>تعريف 3</u> :**

نسمي منظراً في $\zeta_n$ مجموع التبديلات وعددها $n!$ ونكتب

$$S = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in n!} \tau_\alpha \tag{1.10}$$

كما نسمي منظراً مضاداً مجموع التبديلات مضروبة بتوقيعها ونكتب

$$A = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in n!} \varepsilon(\tau_\alpha)\tau_\alpha \tag{1.11}$$

سنقابل هذين المؤثرين في الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H}^{\otimes n}$ بأن نكتب المؤثر المقابل لـ $\tau_\alpha$ ولنسمه $P_\alpha$ على شكل جداء مؤثرات الاستبدال الواحدية وذاتية الترافق $P_{k\ell}$.

**<u>قضية 2</u> :**

إن مؤثر التبديل $P_\alpha$ هو أيضاً واحدي :

نكتبه على شكل جداء مناقلات نرمز لها كما '(1.9) بـ $\sigma_i\ :\ i = 1, \dots r$

$$P_\alpha = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$$

$$P_\alpha^\dagger = (\sigma_1 \dots \sigma_r)^\dagger = \sigma_r^\dagger \dots \sigma_1^\dagger = \sigma_r^{-1} \dots \sigma_1^{-1}$$

$$= (\sigma_1 \dots \sigma_r)^{-1} = P_\alpha^{-1}$$

إلا أن التبديل لا يساوي التبديل العكسي و $P_\alpha$ ليس ذاتي الترافق ولكن $S$ و $A$ ذاتيي الترافق؛ جمع التبديلات أو جمع التبديلات العكسية يعطي طبعاً نفس النتيجة.

نكتب $S$ و $A$ كمؤثرين في الفضاء $\mathscr{H}^{\otimes n}$ على الشكل

لنأخذ كمثل ثان الدوار (1.9) المؤلف من ثلاث مناقلات، توقعيه يساوي $(-1)^3 = -1$ ونتحقق بسهولة من ذلك عندما نكتب مصفوفته على الشكل

$$\tau(1\,3\,2\,4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 = \tag{1.9'}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**تعريف 3 :**

نسمي منظراً في $\zeta_n$ مجموع التبديلات وعددها $n!$ ونكتب

$$S = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in n!}\tau_\alpha \tag{1.10}$$

كما نسمي منظراً مضاداً مجموع التبديلات مضروبة بتوقيعها ونكتب

$$A = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in n!}\varepsilon(\tau_\alpha)\tau_\alpha \tag{1.11}$$

سنقابل هذين المؤثرين في الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H}^{\otimes n}$ بأن نكتب المؤثر المقابل لـ $\tau_\alpha$ ولنسمه $P_\alpha$ على شكل جداء مؤثرات الاستبدال الواحدية وذاتية الترافق $P_{k\ell}$.

**قضية 2 :**

إن مؤثر التبديل $P_\alpha$ هو أيضاً واحدي :

نكتبه على شكل جداء مناقلات نرمز لها كما '(1.9) بـ $\sigma_i$ : $i = 1, \dots r$

$$P_\alpha = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$$

$$P_\alpha^\dagger = (\sigma_1 \dots \sigma_r)^\dagger = \sigma_r^\dagger \dots \sigma_1^\dagger = \sigma_r^{-1} \dots \sigma_1^{-1}$$

$$= (\sigma_1 \dots \sigma_r)^{-1} = P_\alpha^{-1}$$

إلا أن التبديل لا يساوي التبديل العكسي و $P_\alpha$ ليس ذاتي الترافق ولكن $S$ و $A$ ذاتيي الترافق؛ جمع التبديلات أو جمع التبديلات العكسية يعطي طبعاً نفس النتيجة.

نكتب $S$ و $A$ كمؤثرين في الفضاء $\mathscr{H}^{\otimes n}$ على الشكل

$$S = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in n!} P_\alpha \qquad (1.12)_S$$

$$A = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in n!} \varepsilon(\alpha) P_\alpha \qquad (1.12)_A$$

حيث رمزنا بـ $\varepsilon(\alpha)$ لتوقيع التبديل $P_\alpha$.

إن ضرب $S$ على اليمين أو اليسار بمؤثر تبديل $P_\beta$ لا يغير $S$ الذي هو مجموع مؤثرات التبديل (يقابل $P_\beta P_\alpha$ من أجل كل $\alpha$ مؤثر تبديل موجود أصلاً في الجداء ونكون قد غيرنا الترتيب وحده) أما ضرب $A$ بـ $P_\beta$ فهو ضربه بـ $\varepsilon(\beta)$:

$$P_\beta S = S P_\beta = S \qquad (1.13)_S$$

$$P_\beta A = A P_\beta = \varepsilon(\beta) A \qquad (1.13)_A$$

وإذا ضربنا $S$ و $A$ ليس بمؤثر تبديل واحد وإنما بالمجموع المتناظر أو مضاد التناظر فسنجد أن الجداء

$$\left(\frac{1}{n!}\sum_{\beta\in n!} P_\beta\right) S = S^2$$

هو حسب $(1.13)_S$

$$\frac{1}{n!}(n!S) = S$$

وكذلك الجداء

$$\left(\frac{1}{n!}\sum_{\beta\in n!} \varepsilon(\beta) P_\beta\right) A = A^2$$

هو حسب $(1.13)_A$

$$\frac{1}{n!}\left(n!\varepsilon^2(\beta) A\right) = A$$

ومنه

**قضية <u>3</u> :**

إن $S$ و $A$ مسقِطان

$$S = S^2 = S^\dagger$$

$$A = A^2 = A^\dagger$$

ولدينا

$$SA = AS = 0$$

ذلك أن حسب $(1.12)_A$

$$AS = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in n!} \varepsilon(\alpha) P_\alpha S$$

وحسب $(1.13)_S$

$$= \frac{S}{n!}\sum_{\alpha\in n!}\varepsilon(\alpha)$$

ولكن مجموع التواقيع $\varepsilon(\alpha)$ يساوي الصفر لأن عدد التبديلات الزوجية يساوي عدد التبديلات الفردية (يمكن تصنيف التبديلات ذات المناقلة الواحدة ثم مناقلتين الخ).

لنلاحظ أخيراً أن $S + A \neq I$. إنه ضعف مجموع مؤثرات التبديل الزوجية مضروباً بـ $\frac{1}{n!}$ (إنه $\frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)$ من أجل $\zeta_3$) : يوجد في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ متجهات حالة ليست زوجية ولا فردية.

## 6.1- صيغة متجهة حالة لـ n جسيماً متطابقاً

نرمز كما فعلنا في (1.1) إلى متجهات حالة الجسيمات المتطابقة بـ $|\psi_1\rangle$، ... $|\psi_n\rangle$ وإلى العناصر التي تحدد حالة الجسيم، هويته، بـ $\xi_1$، $\xi_2$، ... $\xi_n$. ولنر كيف يمكننا كتابة متجهة الحالة $|\Psi_n\rangle$ بدليل المنظر S والمنظر المضاد A. لنلاحظ قبل كل شيء أننا عبرنا عن المناقلة بمصفوفة $(k\ell)$ كل عناصرها القطرية مساوية للواحد ماعدا العنصرين $(k, k)$ و $(\ell, \ell)$ المعدومين، أما العنصران المتناظران بالنسبة للقطر $M_{k,\ell}$ و $M_{\ell,k}$ فيساويان الواحد. يمكننا إذاً أن نمثل كل المناقلات $(i, j)$، $i, j = 1, 2, \dots n$، على شكل مصفوفة مربعة يمثل قطرها التبديل الحيادي $1 \rightarrow 1$، $2 \rightarrow 2$، ... $n \rightarrow n$

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) \dots & (2,n) \\ \vdots & & \\ (n,1) & (n,2) \dots & (n,n) \end{pmatrix} \qquad (1.14)$$

ولما كان التبديل جداء مناقلات فإننا نحصل على الـ $n!$ تبديلاً ممكناً بضرب عنصر ما في سطر محدد وعمود محدد بـ $n-1$ عنصراً مأخوذة كلاً منها في سطر وعمود محدد مختلف عن سطر وعمود العناصر الأخرى، أو بعبارة أخرى نحصل على كل التبديلات بأخذ معين المصفوفة (1.14) في حالة تطبيق المنظر المضاد A، أو بالقيام بنفس العملية مع إهمال إشارة التناوب عندما ننتقل من سطر إلى سطر مجاور في محال تطبيق المنظر S ونرمز

$$A, S = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) \dots & (1,n) \\ \vdots & & \\ (n,1) & \dots\dots & (n,n) \end{vmatrix}_{\mp} \qquad (1.15)$$

وضعنا إشارة – أمام المعين لنبين أننا حسبناه وفق طريقة حساب المعينات المعروفة وإشارة + لنبين أننا نهمل تناوب الإشارات الذي يتطلبه حساب المعين ونسمي نتيجة الحساب في هذه الحالة المستديم Permanent. لنطابق الآن السطور مع متجهات الحالة $\langle\psi_1|,\ldots,\langle\psi_n|$ والأعمدة مع الهوية $\xi_1,\ldots,\xi_n$ : $\psi_i(\xi_j)$ هو العنصر في السطر i والعمود j من (1.14).

إن أي عنصر من $\mathscr{H}^{\otimes n}$ هو جداء n عنصراً نعينه بأخذنا على سبيل المثال في العمود الأول السطر $i_1$ وفي العمود الثاني السطر $i_2$، الخ

$$|\psi\rangle = |\psi_{i_1}(\xi_1)\rangle|\psi_{i_2}(\xi_2)\rangle\ldots|\psi_{i_n}(\xi_n)\rangle \tag{1.16}$$

بحيث يمكننا كتابة متجهة الحالة المنتمية إلى $S\mathscr{H}^{\otimes n}$ و $A\mathscr{H}^{\otimes n}$ حسب (1.15) على الشكل

$$|\Psi\rangle_{\substack{A\\S}} = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \ldots & \psi_1(\xi_n) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \ldots & \psi_2(\xi_n) \\ \vdots & & & \\ \psi_n(\xi_1) & \psi_n(\xi_2) & \ldots & \psi_n(\xi_n) \end{vmatrix}_{\mp} \tag{1.17}$$

إن المعين أو المستديم الذي نحصل عليه، وهو مجموع !n متجهة حالة بإشارات متناوبة أو ثابتة على الترتيب، يعبر عن حالة موجة لـ n جسمياً متطابقاً مضادة التناظر (فيرميونات) أو متناظرة (بوزونات). لنلاحظ أن المعين يساوي الصفر عند تساوي صفين من صفوفه أي إذا تطابق رقما صفين $\psi_j(\xi_k) = \psi_i(\xi_k)$ من أجل كل k ونكون بذلك قد عبرنا عن مبدأ الاستبعاد لباولي. هذا في حين لا يؤثر تساوي صفين على قيمة المستديم. لنلاحظ أن كل ما فعلناه هو تعميم لما فعلناه في حالة جسيمين $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$

$$\psi_{\substack{f\\b}} = \psi_{\substack{A\\S}} = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) \end{vmatrix}_{\mp}$$

ولدينا $\psi_{\substack{A\\S}} = \psi_1(\xi_1)\Psi_2(\xi_2) \mp \psi_1(\xi_2)\Psi_2(\xi_1)$، (A، f) مضاد التناظر (فيرميون) و(S، b) متناظر (بوزون).

لنلاحظ أن مبادلة السطور بالأعمدة أمر اعتباطي لا يغير من قيمة المعين (المستديم).

لم يبق أمامنا سوى تنظيم متجهة الحالة (1.17) مفترضين أن متجهة حالة الجسيم الواحد $|\psi_i\rangle$ منظمة للواحد وأن هذه المتجهات متعامدة.

إن عدد عناصر (1.17) هو !n (وهذا ما جعلنا نكتب S و A على الشكل $\frac{1}{n!}$) ولكننا نريد هنا أن يكون $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ لذا وجب تقسيم الكيت $|\psi\rangle$ على $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2}$. هذا في حالة الفيرميونات. أما في حالة البوزونات فإنه من الممكن أن نجد أرقام متجهات حالة متساوية $i_1 = i_2 \ldots i_{n_1}$ مثلاً ونحصل بالتالي حسب (1.16) على $n_1!$ متجهة حالة متطابقة تنتمي إلى $\mathscr{H}^{\otimes n}$ بحيث يصبح عدد العناصر المستقلة

وضعنا إشارة – أمام المعين لنبين أننا حسبناه وفق طريقة حساب المعينات المعروفة وإشارة + لنبين أننا نهمل تناوب الإشارات الذي يتطلبه حساب المعين ونسمي نتيجة الحساب في هذه الحالة المستديم Permanent. لنطابق الآن السطور مع متجهات الحالة $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ والأعمدة مع الهوية $\xi_1, \dots, \xi_n$ : $\psi_i(\xi_j)$ هو العنصر في السطر i والعمود j من (1.14).

إن أي عنصر من $\mathscr{H}^{\otimes n}$ هو جداء n عنصراً نعينه بأخذنا على سبيل المثال في العمود الأول السطر $i_1$ وفي العمود الثاني السطر $i_2$، الخ

$$|\psi\rangle = |\psi_{i_1}(\xi_1)\rangle |\psi_{i_2}(\xi_2)\rangle \dots |\psi_{i_n}(\xi_n)\rangle \qquad (1.16)$$

بحيث يمكننا كتابة متجهة الحالة المنتمية إلى $S\mathscr{H}^{\otimes n}$ و $A\mathscr{H}^{\otimes n}$ حسب (1.15) على الشكل

$$|\Psi\rangle_{\substack{A\\S}} = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \dots & \psi_1(\xi_n) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \dots & \psi_2(\xi_n) \\ \vdots & & & \\ \psi_n(\xi_1) & \psi_n(\xi_2) & \dots & \psi_n(\xi_n) \end{vmatrix}_{\mp} \qquad (1.17)$$

إن المعين أو المستديم الذي نحصل عليه، وهو مجموع !n متجهة حالة بإشارات متناوبة أو ثابتة على الترتيب، يعبر عن حالة موجة لـ n جسمياً متطابقاً مضادة التناظر (فيرميونات) أو متناظرة (بوزونات). لنلاحظ أن المعين يساوي الصفر عند تساوي صفين من صفوفه أي إذا تطابق رقما صفين $\psi_j(\xi_k) = \psi_i(\xi_k)$ من أجل كل k ونكون بذلك قد عبرنا عن مبدأ الاستبعاد لباولي. هذا في حين لا يؤثر تساوي صفين على قيمة المستديم. لنلاحظ أن كل ما فعلناه هو تعميم لما فعلناه في حالة جسيمين $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$

$$\psi_{\substack{f\\b}} = \psi_{\substack{A\\S}} = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) \end{vmatrix}_{\mp}$$

ولدينا $\psi_{\substack{A\\S}} = \psi_1(\xi_1)\Psi_2(\xi_2) \mp \psi_1(\xi_2)\Psi_2(\xi_1)$، (A ، f) مضاد التناظر (فيرميون) و(S ، b) متناظر (بوزون).

لنلاحظ أن مبادلة السطور بالأعمدة أمر اعتباطي لا يغير من قيمة المعين (المستديم).

لم يبق أمامنا سوى تنظيم متجهة الحالة (1.17) مفترضين أن متجهة حالة الجسيم الواحد $|\psi_i\rangle$ منظمة للواحد وأن هذه المتجهات متعامدة.

إن عدد عناصر (1.17) هو !n (وهذا ما جعلنا نكتب S و A على الشكل $\frac{1}{n!}$) ولكننا نريد هنا أن يكون $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ لذا وجب تقسيم الكيت $|\psi\rangle$ على $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2}$. هذا في حالة الفيرميونات. أما في حالة البوزونات فإنه من الممكن أن نجد أرقام متجهات حالة متساوية $i_1 = i_2 \dots i_{n_1}$ مثلاً ونحصل بالتالي حسب (1.16) على $n_1!$ متجهة حالة متطابقة تنتمي إلى $\mathscr{H}^{\otimes n}$ بحيث يصبح عدد العناصر المستقلة

$\frac{n!}{n_1!}$ وإذا وجدت أرقام أخرى $j_1 = j_2 \dots j_{n_2}$ فعدد العناصر المستقلة الكلي هو $\frac{n!}{n_1! n_2!}$ وهكذا ! يجب علينا والحالة هذه تنظيم "المستمر" بضربه، ليس بـ $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2}$ كما في حالة المعين وإنما بـ $\left(\frac{n_1! n_2! \dots}{n!}\right)^{1/2}$.

نكتب إذاً (1.17) بشقيها على الشكل :

$$|\psi_A\rangle = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2} \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \dots & \psi_n(\xi_1) \\ \vdots & & \\ \psi_1(\xi_n) & \dots & \psi_n(\xi_n) \end{vmatrix}_- \qquad (1.18)_f$$

و

$$|\psi_S\rangle = \left(\frac{n_1! n_2! \dots}{n!}\right)^{1/2} \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \dots & \psi_n(\xi_1) \\ \vdots & & \\ \psi_1(\xi_n) & \dots & \psi_n(\xi_n) \end{vmatrix}_+ \qquad (1.18)_b$$

## 7.1– جبر المتجهات في الفضاء $\mathscr{H}^{\otimes n}$

نعرف المتجهة $|\psi\rangle$ في $\mathscr{H}^{\otimes n}$ كجداء n متجهة $|\psi_i\rangle$ $i = 1, 2 \dots n$ وكذلك $|\phi\rangle$ جداء n متجهة $|\varphi_i\rangle$ ونكتب

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \dots |\psi_n\rangle \quad ، \quad |\phi\rangle = |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \dots |\varphi_n\rangle \qquad (1.19)$$

ونعرف الجداء السلمي (الداخلي) بين المتجهتين $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ في هذا الفضاء بالعلاقة

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\varphi_1|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\psi_2\rangle \dots \langle\varphi_n|\psi_n\rangle \qquad (1.20)$$

لنفرض الآن أن المتجهات $|\varphi_i\rangle$ هي متجهات قاعدة متعامدة ومنظمة في $\mathscr{H}_i$، نرمز لها في تمثيل الوضع بـ $|q_i\rangle$. إن

$$|q| = |q_1\rangle|q_2\rangle \dots |q_n\rangle \qquad (1.19)'$$

هي إحدى متجهات القاعدة في $\mathscr{H}^{\otimes n}$. ونستطيع كتابة مسقط $|\psi\rangle$ على متجهة القاعدة هذه على الشكل

$$\langle q|\psi\rangle = \langle q_1|\psi_1\rangle \dots \langle q_n|\psi_n\rangle \qquad (1.21)$$

أو

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_n) = \psi_1(q_1) \dots \psi_n(q_n)$$

ونكتب المسقِط على $\mathscr{H}^{\otimes n}$ على شكل تعميم العلاقة ((5.(3.20)، علاقة الإغلاق :

$$I = \int dq_1 \dots dq_n \left(|q_1\rangle|q_2\rangle \dots\right)\left(\langle q_1| \dots \langle q_n|\right) \qquad (1.22)$$

كما نعمم علاقة التعامد بين متجهتي قاعدة $|q_i\rangle$ و $|q_j\rangle$، $\delta(q_j - q_i) = 0$، إلى متجهات القاعدة (1.19)' بأن نكتب

$$\langle q'|q\rangle = \langle q_1'|q_1\rangle \dots \langle q_n'|q_n\rangle = \delta(q_1' - q_1)\dots\delta(q_n' - q_n) \tag{1.23}$$

عندما تمثل القاعدة الوضع والسبين $\left(\frac{1}{2}\right)$ مثلاً فإن كل حد في (1.23) هو جداء دالة ديراك بدالة كرونكر.

رأينا أن ما يهمنا في $\mathscr{H}^{\otimes n}$ ليس الجداءات (1.20) وإنما $n!$ من هذه الجداءات. نحصل عليها بتطبيق مؤثر المنظر أو المنظر المضاد ونرمز للمجموع بـ $|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle$ :

$$|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha \in n!} \varepsilon(\alpha) |\psi_{\alpha(1)}\rangle \dots |\psi_{\alpha(n)}\rangle \tag{1.24}$$

حيث $\varepsilon(\alpha) = 1$ من أجل البوزونات وهو توقيع التبديل $\alpha$ : $\pm 1$ من أجل الفيرميونات.

إن الجداء $\langle q_1, q_2, \dots, q_n | \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle$ هو المعين أو المستديم (1.17) الذي نكتبه بعد تبديل الأسطر بالأعمدة على الشكل

$$\langle q_1, q_2, \dots, q_n | \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle q_1|\psi_1\rangle & \dots & \langle q_1|\psi_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle q_n|\psi_1\rangle & \dots & \langle q_n|\psi_n\rangle \end{vmatrix}_{\mp} \tag{1.25}$$

ونكتب جداء متجهتين لا على التعيين معرفتين بـ (1.24) منتميتين إلى $S\mathscr{H}^{\otimes n}$ أو $A\mathscr{H}^{\otimes n}$ على نفس الشكل

$$\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n | \psi_1, \dots, \psi_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle \varphi_1|\psi_1\rangle & \dots & \langle \varphi_n|\psi_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_n|\psi_1\rangle & \dots & \langle \varphi_n|\psi_n\rangle \end{vmatrix}_{\mp} \tag{1.26}$$

لنلاحظ أنه من الممكن الحصول على هذه العلاقة، وعلى سابقتها، مباشرة من تطبيق علاقة التعريف (1.24) بأن نكتب الجداء بالاستعانة بتعريف المنظر أو المنظر المضاد (1.12) وبالقضية 2؛ بأن نكتب، من أجل $S$ مثلاً،

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n | \psi_1, \dots, \psi_n\rangle &= \langle \sqrt{n!} S\phi | \sqrt{n!} S\psi\rangle \\ & n! \langle \phi | S^{\dagger} S\psi\rangle \\ & n! \langle \phi | S\psi\rangle \end{aligned}$$

لأن $S = S^{\dagger}$ و $S^2 = S$؛ أي أن الجداء هو جداء $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\dots\langle\varphi_n|$ بـ الـ $n!$ حداً في التعريف (1.24) مع العامل $\frac{1}{n!}$ من تعريف $S$. وهذا ما يعطينا تعريف المستمر، أو المعين إذا تعلق الأمر بالفيرميونات.

نرى من (1.24) في $\mathscr{H}^{n\otimes}$ على سبيل المثال أن

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \pm |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle$$

$$\langle q'|q\rangle = \langle q_1'|q_1\rangle \ldots \langle q_n'|q_n\rangle$$
$$= \delta(q_1' - q_1)\ldots\delta(q_n' - q_n) \qquad (1.23)$$

عندما تمثل القاعدة الوضع والسبين $\left(\frac{1}{2}\right)$ مثلاً فإن كل حد في (1.23) هو جداء دالة ديراك بدالة كرونكر.

رأينا أن ما يهمنا في $\mathscr{H}^{\otimes n}$ ليس الجداءات (1.20) وإنما $n!$ من هذه الجداءات. نحصل عليها بتطبيق مؤثر المنظر أو المنظر المضاد ونرمز للمجموع بـ $|\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle$ :

$$|\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha \in n!} \varepsilon(\alpha) |\psi_{\alpha(1)}\rangle \ldots |\psi_{\alpha(n)}\rangle \qquad (1.24)$$

حيث $\varepsilon(\alpha) = 1$ من أجل البوزونات وهو توقيع التبديل $\alpha$ : $\pm 1$ من أجل الفيرميونات.

إن الجداء $\langle q_1, q_2, \ldots, q_n | \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle$ هو المعين أو المستديم (1.17) الذي نكتبه بعد تبديل الأسطر بالأعمدة على الشكل

$$\langle q_1, q_2, \ldots, q_n | \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle q_1|\psi_1\rangle & \ldots & \langle q_1|\psi_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle q_n|\psi_1\rangle & \ldots & \langle q_n|\psi_n\rangle \end{vmatrix}_{\mp} \qquad (1.25)$$

ونكتب جداء متجهتين لا على التعيين معرفتين بـ (1.24) منتميتين إلى $S\mathscr{H}^{\otimes n}$ أو $A\mathscr{H}^{\otimes n}$ على نفس الشكل

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n | \psi_1, \ldots, \psi_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle \varphi_1|\psi_1\rangle & \ldots & \langle \varphi_n|\psi_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_n|\psi_1\rangle & \ldots & \langle \varphi_n|\psi_n\rangle \end{vmatrix}_{\mp} \qquad (1.26)$$

لنلاحظ أنه من الممكن الحصول على هذه العلاقة، وعلى سابقتها، مباشرة من تطبيق علاقة التعريف (1.24) بأن نكتب الجداء بالاستعانة بتعريف المنظر أو المنظر المضاد (1.12) وبالقضية 2؛ بأن نكتب، من أجل $S$ مثلاً،

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n | \psi_1, \ldots, \psi_n\rangle = \langle \sqrt{n!}S\phi | \sqrt{n!}S\psi\rangle$$
$$n!\langle \phi | S^{\dagger}S\psi\rangle$$
$$n!\langle \phi | S\psi\rangle$$

لأن $S = S^{\dagger}$ و $S^2 = S$؛ أي أن الجداء هو جداء $\langle \varphi_1|\langle\varphi_2|\ldots\langle\varphi_n|$ بـ الـ $n!$ حداً في التعريف (1.24) مع العامل $\frac{1}{n!}$ من تعريف $S$. وهذا ما يعطينا تعريف المستمر، أو المعين إذا تعلق الأمر بالفيرميونات.

نرى من (1.24) في $\mathscr{H}^{n\otimes}$ على سبيل المثال أن

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \pm |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle$$

وأنه يساوي الصفر في حال تساوي المتجهتين الفيرميونيتين $\langle \psi_1, \psi_1 | = 0$.

لتكن المتجهات $\langle 1|$، $\langle 2|$... قاعدة متعامدة ومنظمة لـ $\mathscr{H}$

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \qquad (1.27)$$

$$I = \sum_i |i\rangle\langle i| \qquad (1.27)'$$

ننشئ انطلاقاً منها قاعدة لـ $A\mathscr{H}^{\otimes n}$ و $S\mathscr{H}^{\otimes n}$. نرتب هذه المتجهات من أجل الفيرميونات على الشكل $i_1 < i_2 ... < i_n$، فهي مختلفة كلها الواحدة عن الأخرى؛ وهكذا تشكل المتجهات $\langle i_1, i_2, ..., i_n|$ قاعدة متعامدة ومنظمة لـ $A\mathscr{H}^{\otimes n}$؛ لدينا في الواقع حسب (1.26)

$$i_1 < i_2 < ... < i_n \qquad \langle i_1, i_2, ..., i_n | i_1, i_2, ..., i_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle i_1|i_1\rangle & ... & \langle i_1|i_n\rangle \\ \langle i_2|i_1\rangle\langle i_2|i_2\rangle & ... & \langle i_2|i_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle i_n|i_1\rangle & ... & \langle i_n|i_n\rangle \end{vmatrix} \qquad (1.28)$$

إن كل عناصر المعين تساوي الصفر حسب (1.27) ماعدا عناصر القطر المساوية للواحد ومنه

$$\langle \ | \ \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (1.28)'$$

أما في $S\mathscr{H}^{\otimes n}$ فترتب المتجهات على الشكل $i_1 \le i_2 \le ... \le i_n$، لنفرض أن عدد المتجهات المساوية لـ $i_1$ هي $n_1$ ولـ $i_2$ هي $n_2$ الخ. ولهذا فإن 1 سيظهر $n_1$ مرة في السطر الأول و $n_2$ مرة في السطر الثاني، الخ. أي أن قيمة المستمر هي على التوالي $n_1!$ صغيراً $(n-1)\times(n-1)$ و $n_1!n_2!$ صغيراً $(n-2)\times(n-2)$ أي أن قيمة الجداء هو

$$i_1 \le i_2 \le ... \le i_n \qquad \langle i_1, i_2, ..., i_n | i_1, i_2, ..., i_n\rangle = n_1!\, n_2! ... n_n! \qquad (1.29)$$

ومنه متجهة القاعدة المتعامدة مع متجهات القاعدة الأخرى والمنظمة للواحد

$$\frac{|i_1, i_2, ..., i_n\rangle}{(n_1!, n_2!, ..., n_n!)^{1/2}} \qquad (1.29)'$$

ولدينا في كلتا الحالتين علاقة الإغلاق – المسقط الوحدة على $S\mathscr{H}^{\otimes n}$ أو $A\mathscr{H}^{\otimes n}$، أي على $\mathscr{H}^{\otimes n}$، التي تعمم العلاقة ("5.(3.15)) والتي تقابل (1.22) من أجل الطيف المتصل

$$\frac{1}{n!}\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} |i_1, i_2, ..., i_n\rangle\langle i_1, i_2, ..., i_n| = I \qquad (1.30)$$

يكفي للتحقق من هذه العلاقة تطبيقها على المتجهة $\langle j_1, j_2, ..., j_n|$، لدينا في الجداء في $A\mathscr{H}^{\otimes n}$ $\langle i_1, i_2, ..., i_n | j_1, j_2, ..., j_n\rangle$ $n!$ حداً من الشكل $\delta_{i_1 j_1} ... \delta_{i_n j_n}$ ويتحول الجمع $\sum_{i_1, i_2 ...}$ في (1.30) حيث لا

يوجد إلا حد واحد في كل $\sum_{i}$ إلى $\langle j_1 ... j_n | n! \frac{1}{n!}$ مما يثبت أن الطرف الأيسر هو المؤثر الوحدة. أما في $S\mathcal{H}^{\otimes n}$ فالجداء هو $\frac{n!}{n_1!...n_n!}$ حداً من نفس الشكل $\delta_{i_1 j_1} ... \delta_{i_n j_n}$، لدينا في الجمع $n_1!$ حداً في $\sum_{i_1}$ و $n_2!$ في $\sum_{i_2}$ والنتيجة هنا أيضاً هي $\langle j_1, j_2, ..., j_n |$.

## 2. التكميم الثاني

### 1.2 – عدد الجسيمات كمقدار فيزيائي

لتكن لدينا جملة معزولة مؤلفة من $n$ جسيماً متطابقاً تتفاعل فيما بينها. إن انحفاظ الطاقة الكلية والاندفاع الخطي الكلي للمجموع لا يعني انحفاظ طاقة أو اندفاع الجسيمات المنفردة وبالتالي فإن عدد الجسيمات $n_i$ ذات الطاقة $E_i$ على سبيل المثال ليس منحفظاً. والهدف من هذه الفقرة إيجاد طريقة لتعيين هذا المقدار الفيزيائي أو بتعبير آخر إيجاد مؤثر قيمه الخاصة أعداد صحيحة يقابل هذا المقدار الفيزيائي. وبصورة أعم لا ينحفظ عدد الجسيمات في النظرية الكمومية النسبية التي تقبل بتحول جسيم إلى جسيمات أخرى، الإشعاع $\beta$ على سبيل المثال : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ أو بفناء الجسيمات وخلق جسيمات من نوع آخر، يتفاعل الإلكترون مع البوزيترون لخلق فوتونين $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ وعلى العكس يمكن لفناء الفوتونات خلق زوجين $e^-$ و $e^+$.

لجأنا إلى إحدى طرق التكميم الثاني في دراستنا للهزاز التوافقي حيث وجدنا مؤثرين يضيف أحدهما وحدة طاقة إلى الطاقة الموجودة، فهو مؤثر إحداث (خلق) ويحذف الآخر وحدة طاقة فهو مؤثر إفناء. رمزنا بـ $a^\dagger$ و $a$ لهذين المؤثرين على الترتيب وأعطينا في ('(3.6).2) علاقة المبادلة بينهما.

$$\left[a^\dagger, a\right] = -I \qquad (2.1)$$

يمكننا إنشاء طريقة التكميم الثاني انطلاقاً من جبر مؤثرات الخلق والفناء أو انطلاقاً من مصادرة نعتبر فيها دالة الموجة لـ $n$ جسيماً متطابقاً، $\langle \psi |$ المعرفة بـ $(1.18)_{f,b}$ مؤثراً يشكل جداؤه بالمؤثر المرافق مؤثر عدد الجسيمات المتطابقة في حيز من الفضاء على غرار المصادرة التي نظرنا فيها إلى جداء دالة الموجة بمرافقها العقدي كتعبير عن احتمال وجود الجسيم في حيز من الفضاء. نقابل إذاً في هذه المصادرة كثافة الاحتمال لجسيم واحد بكثافة عدد الجسيمات.

**تعريف 4 :**

نطلق اسم التكميم الثاني على هذا الانتقال من دالة الموجة المنتمية إلى الفضاء الهيلبرتي، المعرفة في كل نقطة من نقاط الفضاء، والتي هي حل لمعادلة شرودينغر، معادلة الميكانيك الكمومي، إلى مؤثر يفعل في الفضاء الهيلبرتي $S\mathscr{H}^{\otimes n}$ أو $A\mathscr{H}^{\otimes n}$.

نقوم بنفس العملية عندما نقابل أي مقدار فيزيائي، الطاقة الكهرطيسية على سبيل المثال، بمؤثر يفعل في فضاء هيلبرتي. نعبر عن الطاقة الكهرطيسية بدليل الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ أو بدليل الكمون المتجه رباعي الأبعاد $A$ الخاضع لمعادلة الموجة (((I.(7.(4.10)

$$\Box^2 A = \mu_o J \qquad (2.2)$$

ونقول عندما ننتقل من الحقل الكهرطيسي $A(t, \vec{r})$ كدالة إلى $A$ كمؤثر إننا كممنا الحقل الكهرطيسي. وهذا هو موضوع الإلكتروديناميك الكمومي ونظرية الحقول المكممة بصورة عامة. يطلق في كثير من الأحيان على عملية التكميم هذه اسم التكميم الثاني لتشابه الانتقال من دالة الموجة $\psi$ في معادلة شرودينغر أو معادلة ديراك النسبية التي سندرسها في الفصل التاسع، من الحقل $\psi$ إلى المؤثر $\psi$ مع الانتقال من الحقل $A$ إلى المؤثر $A$. إلا أن هذه التسمية مدعاة للبس لأن الانتقال الأخير لم يقع انطلاقاً من معادلة كمومية – لا وجود لـ $\hbar$ في المعادلة (2.2). إنه تكميم للحقل ليس إلا.

## 2.2– تكميم حقل شرودينغر

وضعنا "كوصفة " أملاها علينا مبدأ التقابل القائل بمقابلة كل مقدار فيزيائي بمؤثر، مقابلة لامتي بواسون مضروبة بـ $\frac{\hbar}{i}$ بالمبادل بين المؤثرين المقابلين (I. §3.1). درسنا من جهة أخرى لامات بواسون من أجل الحقول، من أجل عدد لامنته من درجات الحرية (I.6.§4) ووجدنا لامتي بواسون بين الحقل $\psi$ وعزمه المرافق $\pi$ ((I.(6.(4.20)

$$\{\psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\} = -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \qquad (2.3)$$

لنذكر أن الهيكلة من أجل الحقول لا تختلف عن الهيكلة من أجل عدد منته من درجات الحرية إلا بوضع كثافة اللاغرانجي والهاميلتوني في المعادلات، مع أننا ننصح القارئ بالعودة إلى الفقرة الرابعة المشار إليها ودراستها بدقة.

لدينا $\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi'}$ حيث $\mathscr{L}$ كثافة اللاغرانجي و $\psi'$ مشتق الحقل بالنسبة للزمن. كما أن معادلة الحركة هي ((I.(6.(4.7) التي نكتبها بالفصل بين الأبعاد الزمانية والمكانية على الشكل

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} = 0 \qquad (2.4)$$

أي

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\vec{\nabla} \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} = 0 \qquad (2.4)'$$

نحصل على معادلة شرودينغر بـ $\psi$ أو بـ $\bar{\psi}$ (المرافق العقدي) انطلاقاً من كثافة لاغرانجية هي

$$\mathcal{L} = i\hbar \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla} \bar{\psi} \bar{\nabla} \psi - U \bar{\psi} \psi \qquad (2.5)$$

(حيث $U$ هي الطاقة الكامنة).

التي تعطينا بالاشتقاق بالنسبة لـ $\bar{\psi}$ في '(2.4) معادلة شرودينغر

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi - U\psi = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi$$

لكن $\bar{\psi}'$ غير موجودة في (2.5) وبالتالي فإن العزم المرافق لـ $\bar{\psi}$ ولنرمز له بـ $\bar{\pi}$ يساوي الصفر في حين أن $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} = i\hbar \bar{\psi}$ أي أن $i\hbar \bar{\psi}$ هو تعريفاً العزم المرافق لـ $\psi$ :

$$\pi = i\hbar \bar{\psi}$$

لدينا إذاً التكميم (2.3)

$$[\pi, \psi] = \frac{\hbar}{i} \delta(\bar{x} - \bar{y})$$

إلا إنه من الأفضل عندما نقابل دالة $\psi$ بمؤثر أن نقابل مرافقها العقدي $\bar{\psi}$ بالمؤثر المرافق ونرمز له بـ $\psi^\dagger$ وكتابة المبادل بين $\psi$ و $\psi^\dagger = \frac{1}{i\hbar} \pi$ على الشكل

$$\left[ \psi^\dagger(\bar{r}, t), \psi(\bar{r}, t) \right] = \frac{1}{i\hbar} \frac{\hbar}{i} \delta(\bar{r} - \bar{r}') = -\delta(\bar{r} - \bar{r}') \qquad (2.6)$$

سنقابل إذاً المقدار $\bar{\psi}\psi$ الذي يعبر عن كثافة الاحتمال بالمؤثر $\psi^\dagger \psi$ الذي يعبر عن كثافة المؤثر – عدد الجسيمات ونكتب مؤثر عدد الجسيمات الكلي

$$N = \int_\Omega \psi^\dagger(\bar{r}, t) \psi(\bar{r}, t) d\bar{r} \qquad (2.7)$$

حيث $\Omega$ هو الحجم الذي تحتله الجسيمات.

## 3.2- مؤثرات الخلق والفناء

لننشر المؤثرين $\psi$ و $\psi^\dagger$ – المستقرين، $E$ ثابتة – كتكاملين فوريي

$$\psi_E(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \qquad (2.8)$$

$$\psi_E^{\dagger}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int a^{\dagger}(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \qquad (2.8)^{\dagger}$$

(لا ننسى التقابل بين $\overline{\psi}$ و $\psi^{\dagger}$، إشارة – في الموجة) ولنفتش عن المبادل بين $a$ و $a^{\dagger}$. لدينا من (2.6)

$$\left[\psi^{\dagger}(\vec{r}, t), \psi(\vec{r}', t)\right] = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int \left[a^{\dagger}(k'), a(k)\right] e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r} + i\vec{k}\cdot\vec{r}'} d\vec{k} \cdot d\vec{k}'$$

لا تتحقق المساواة بين الطرفين الأخيرين إلا إذا كان

$$\left[a^{\dagger}(\vec{k}'), a(\vec{k})\right] = -\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \qquad (2.9)$$

ولدينا بطبيعة الحال نظراً لكون المبادلات المقابلة للامات بواسون المعدومة معدومة

$$[\psi, \psi] = \left[\psi^{\dagger}, \psi^{\dagger}\right] = 0$$

$$\left[a^{\dagger}(\vec{k}'), a^{\dagger}(\vec{k})\right] = \left[a(\vec{k}'), a(\vec{k})\right] = 0 \qquad (2.10)$$

لنكتب $N$ بالاستعانة بـ (2.8) و $(2.8)^{\dagger}$ على الشكل

$$N = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}\, d\vec{k}\, d\vec{k}'\, a^{\dagger}(\vec{k})\, a(\vec{k}')\, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}$$

يعطينا التكامل على $\vec{r}$ دالة ديراك $\delta(\vec{k} - \vec{k}')$ ومنه بعد التكامل على $\vec{k}'$

$$N = \int a^{\dagger}(\vec{k})\, a(\vec{k})\, d\vec{k} \qquad (2.7)'$$

نرمز للمؤثر $a^{\dagger}(\vec{k})a(\vec{k})$ بـ $\rho(\vec{k})$، إنه مؤثر كثافة الجسيمات في فضاء الاندفاع

$$\rho(\vec{k}) = a^{\dagger}(\vec{k})\, a(\vec{k}) \qquad (2.7)''$$

يمكننا في حالة الطيف المنفصل نشر المؤثرين $\psi$ و $\psi^{\dagger}$ كسلستي فوريي لدالتين دوريتين تنطبقان على $\psi$ و $\psi^{\dagger}$ داخل المكعب ذي الضلع $L$ على الشكل التالي

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\vec{k}_n\cdot\vec{r}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n u_n \qquad (2.8)'$$

$$\psi^{\dagger}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{\dagger} e^{-i\vec{k}_n\cdot\vec{r}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{\dagger} \overline{u}_n \qquad (2.8)^{\dagger\prime}$$

حيث $u$ الموجة– المستقرة و $\overline{u}$ مرافقها العقدي.

ونحصل باتباع المحاكمة السابقة على

$$-\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{L^3} \sum_{n,n'} \left[a_{n'}^{\dagger}, a_n\right] e^{-i\vec{k}_{n'}\cdot\vec{r} + i\vec{k}_n\cdot\vec{r}'}$$

لا تأخذ $k_n$ في حالة البعد الواحد سوى القيم المنفصلة $\frac{2\pi}{L}n$ لكي تتحقق الدورية المفترضة للدالة وفي حالة الأبعاد الثلاثة تأخذ $\vec{k}_n$ القيم $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}$. يجب لتحقيق المساواة أعلاه أخذ

$$\left[a_{n'}^{\dagger}, a_n\right] = -\delta_{n'n} \tag{2.11}$$

ليأخذ الطرف الثاني حينئذ الشكل

$$-\frac{1}{L^3}\sum_n e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}(\vec{r}'-\vec{r})} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{2.12}$$

يكفي للتحقق من هذه العلاقة تحويل الجمع على كل قيم $n$ إلى تكامل ثلاثي[1]

$$\frac{1}{L^3}\int d^3n e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}(\vec{r}'-\vec{r})}$$

والعودة إلى المتغير $\vec{k}_n$؛ $d^3n = \frac{L^3}{(2\pi)^3}d^3k$ و $\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}'-\vec{r})}d\vec{k}$ ونكون قد قابلنا على هذا النحو

$$\frac{1}{L^3}\delta_{n'n} \rightarrow \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{2.13}$$

نكتب علاقة المبادلة (2.11) بدليل قيم $k_n$ المنفصلة على الشكل

$$\left[a_{k'}^{\dagger}, a_k\right] = -\delta_{k'k} \tag{2.11'}$$

لدينا أيضاً

$$\left[a_{k'}^{\dagger}, a_k^{\dagger}\right] = \left[a_{k'}, a_k\right] = 0 \tag{2.11''}$$

ومؤثر عدد الجسيمات الكلي، كما في '(2.7) هو

$$N = \sum_k a_k^{\dagger} a_k = \sum_k N_k \tag{2.14}$$

حيث $N_k$ مؤثر عدد الجسيمات ذات الاندفاع (المنفصل) $\vec{k}$، الذي يحل محل مؤثر كثافة الجسيمات.

نرى بسهولة أن

$$\left[N_k, N_\ell\right] = 0 \tag{2.15}$$

إن القيم الخاصة للمؤثر $N_k$ أعداد صحيحة بطبيعة الحال 0، 1، 2... ولذا فإنه من الممكن كتابة مؤثري الخلق والإفناء على شكل مصفوفة على النحو التالي

---

[1] أي الانتقال من سلسلة فوريي إلى تحويل فوريي. أشرنا منذ الفصل الأول إلى إمكانية الانتقال من الطيف المنفصل إلى المتصل بوضع النظمة في صندوق $L^3$ بحيث تحدد شروط الدورية على الحدود (انعكاس الموجة) قيماً منفصلة للطيف ثم جعل أبعاد الصندوق تتناهى إلى اللانهاية للحصول على الطيف المتصل. وهذا ما يحققه الانتقال من سلسلة فوريي إلى تكامل فوريي.

لا تأخذ $k_n$ في حالة البعد الواحد سوى القيم المنفصلة $\frac{2\pi}{L}n$ لكي تتحقق الدورية المفترضة للدالة وفي حالة الأبعاد الثلاثة تأخذ $\vec{k}_n$ القيم $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}$. يجب لتحقيق المساواة أعلاه أخذ

$$\left[a^{\dagger}_{n'}, a_n\right] = -\delta_{n'n} \tag{2.11}$$

ليأخذ الطرف الثاني حينئذ الشكل

$$-\frac{1}{L^3}\sum_n e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}(\vec{r}-\vec{r}')} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{2.12}$$

يكفي للتحقق من هذه العلاقة تحويل الجمع على كل قيم $n$ إلى تكامل ثلاثي[1]

$$\frac{1}{L^3}\int d^3n e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}(\vec{r}'-\vec{r})}$$

والعودة إلى المتغير $\vec{k}_n$؛ $d^3n = \frac{L^3}{(2\pi)^3}d^3k$ و $\delta(\vec{r}-\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}'-\vec{r})}d\vec{k}$ ونكون قد قابلنا على هذا النحو

$$\frac{1}{L^3}\delta_{n'n} \rightarrow \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{2.13}$$

نكتب علاقة المبادلة (2.11) بدليل قيم $k_n$ المنفصلة على الشكل

$$\left[a^{\dagger}_{k'}, a_k\right] = -\delta_{k'k} \tag{2.11'}$$

لدينا أيضاً

$$\left[a^{\dagger}_{k'}, a^{\dagger}_k\right] = \left[a_{k'}, a_k\right] = 0 \tag{2.11''}$$

ومؤثر عدد الجسيمات الكلي، كما في '(2.7) هو

$$N = \sum_k a^{\dagger}_k a_k = \sum_k N_k \tag{2.14}$$

حيث $N_k$ مؤثر عدد الجسيمات ذات الاندفاع (المنفصل) $\vec{k}$، الذي يحل محل مؤثر كثافة الجسيمات.

نرى بسهولة أن

$$\left[N_k, N_\ell\right] = 0 \tag{2.15}$$

إن القيم الخاصة للمؤثر $N_k$ أعداد صحيحة بطبيعة الحال 0، 1، 2... ولذا فإنه من الممكن كتابة مؤثري الخلق والإفناء على شكل مصفوفة على النحو التالي

---

[1] أي الانتقال من سلسلة فوريي إلى تحويل فوريي. أشرنا منذ الفصل الأول إلى إمكانية الانتقال من الطيف المنفصل إلى المتصل بوضع النظمة في صندوق $L^3$ بحيث تحدد شروط الدورية على الحدود (انعكاس الموجة) قيماً منفصلة للطيف ثم جعل أبعاد الصندوق تتناهى إلى اللانهاية للحصول على الطيف المتصل. وهذا ما يحققه الانتقال من سلسلة فوريي إلى تكامل فوريي.

لا تأخذ $k_n$ في حالة البعد الواحد سوى القيم المنفصلة $\frac{2\pi}{L}n$ لكي تتحقق الدورية المفترضة للدالة وفي حالة الأبعاد الثلاثة تأخذ $\vec{k}_n$ القيم $\vec{n}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$. يجب لتحقيق المساواة أعلاه أخذ

$$\left[a^{\dagger}_{n'}, a_n\right] = -\delta_{n'n} \tag{2.11}$$

ليأخذ الطرف الثاني حينئذ الشكل

$$-\frac{1}{L^3}\sum_n e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}(\vec{r}-\vec{r}')} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{2.12}$$

يكفي للتحقق من هذه العلاقة تحويل الجمع على كل قيم n إلى تكامل ثلاثي [1]

$$\frac{1}{L^3}\int d^3n\, e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \vec{n}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

والعودة إلى المتغير $\vec{k}_n$؛ $d^3n = \frac{L^3}{(2\pi)^3}d^3k$ و $\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}d\vec{k}$ ونكون قد قابلنا على هذا النحو

$$\frac{1}{L^3}\delta_{n'n} \rightarrow \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{2.13}$$

نكتب علاقة المبادلة (2.11) بدليل قيم $k_n$ المنفصلة على الشكل

$$\left[a^{\dagger}_{k'}, a_k\right] = -\delta_{k'k} \tag{2.11'}$$

لدينا أيضاً

$$\left[a^{\dagger}_{k'}, a^{\dagger}_k\right] = \left[a_{k'}, a_k\right] = 0 \tag{2.11''}$$

ومؤثر عدد الجسيمات الكلي، كما في '(2.7) هو

$$N = \sum_k a^{\dagger}_k a_k = \sum_k N_k \tag{2.14}$$

حيث $N_k$ مؤثر عدد الجسيمات ذات الاندفاع (المنفصل) $\vec{k}$، الذي يحل محل مؤثر كثافة الجسيمات.

نرى بسهولة أن

$$\left[N_k, N_\ell\right] = 0 \tag{2.15}$$

إن القيم الخاصة للمؤثر $N_k$ أعداد صحيحة بطبيعة الحال 0، 1، 2... ولذا فإنه من الممكن كتابة مؤثري الخلق والإفناء على شكل مصفوفة على النحو التالي

---

[1] أي الانتقال من سلسلة فوريي إلى تحويل فوريي. أشرنا منذ الفصل الأول إلى إمكانية الانتقال من الطيف المنفصل إلى المتصل بوضع النظمة في صندوق $L^3$ بحيث تحدد شروط الدورية على الحدود (انعكاس الموجة) قيماً منفصلة للطيف ثم جعل أبعاد الصندوق تتناهى إلى اللانهاية للحصول على الطيف المتصل. وهذا ما يحققه الانتقال من سلسلة فوريي إلى تكامل فوريي.

$$a_k^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

و

$$a_k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

أي عل شكل مصفوفتين عناصر الأولى تحت قطرية وتساوي جذور الأعداد الصحيحة والثانية فوق قطرية وتأخذ عناصرها ذات القيم والجداء $a_k^\dagger a_k$ قطري وقيمه الخاصة هي الأعداد الصحيحة المطلوبة.

## 4.2- الفضاء متعدد الجسيمات، تكميم البوزونات

يفعل مؤثر الخلق على متجهة الحالة في الفضاء $\mathcal{H}^{\otimes n}$ على سبيل المثال، فضاء الـ n جسيماً لينقلها إلى الفضاء $\mathcal{H}^{\otimes n+1}$ بـ $n+1$ جسيماً، وعلى العكس ينقل مؤثر الفناء متجهة الحالة من الفضاء $\mathcal{H}^{\otimes n}$ إلى $\mathcal{H}^{\otimes n-1}$. يجب علينا العمل والحال هذه في مجموع التانسورات من الرتب 0، 1، 2، ... n، وكتابة متجهة الحالة بصورة عامة على الشكل

$$|\psi\rangle = |\psi^{(0)}\rangle + |\psi^{(1)}\rangle + \dots + |\psi^{(n)}\rangle + \dots \qquad (2.16)$$

المنتمية إلى الفضاء

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 + \mathcal{H}^1 + \dots \mathcal{H}^{\otimes n} + \dots$$

يشير الفضاء $\mathcal{H}^1$ إلى فضاء هيلبرت الاعتيادي الممثل لجسيم واحد و $\mathcal{H}^{\otimes n}$ إلى التانسور من الرتبة n، فضاء الـ n جسيماً أما $\mathcal{H}^0$ فيمثل عدم وجود أي جسيم، الفضاء الخاوي ونمثله بحقل الأعداد العقدية. وهي فضاءات متعامدة أي أن الجداء السلمي لمتجهتي حالة من الشكل (2.16) هو

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi^{(0)}|\psi^{(0)}\rangle + \langle\phi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle + \dots$$

إن متجهات القاعدة '(1.29) في $S\mathcal{H}^{\otimes n}$ هي متجهات خاصة للمؤثر N تقابل القيم الخاصة n. نرمز لهذه المتجهات بـ $|\phi_n\rangle$ ونكتب

$$N|\phi_n\rangle = N\frac{|n_1, n_2, \dots, n_k \dots\rangle}{(n_1!n_2! \dots n_k! \dots)^{1/2}} = n|\phi_n\rangle \qquad (2.17)$$

حيث $n = n_1 + n_2 + \dots n_k$.

نتحقق مستعينين بـ (2.14) أن $n$ عدد موجب :

$$n = \langle \phi_n | N\phi_n \rangle = \sum_k \langle \phi_n | a_k^{\dagger} a_k \phi_n \rangle = \sum_k \langle a_k \phi_n | a_k \phi_n \rangle$$
$$= \sum_k \| a_k \phi_n \|^2 > 0$$

لتعيين المتجهتين $a_k^{\dagger}|\phi_n\rangle$ و $a_k|\phi_n\rangle$ المنتميتين على الترتيب إلى $\mathscr{H}^{\otimes n+1}$ و $\mathscr{H}^{\otimes n-1}$، يجب أن تكون $a_k^{\dagger}|\phi_n\rangle$ متجهة خاصة لـ $N$ بالقيمة الخاصة $n+1$ و $a_k|\phi_n\rangle$ متجهة خاصة لـ $N$ بالقيمة الخاصة $n-1$. نتحقق من ذلك بأن تكتب من أجل الحالة الأولى على سبيل المثال :

$$Na_k^{\dagger}|\phi_n\rangle = \sum_j a_j^{\dagger} a_j a_k^{\dagger} |\phi_n\rangle$$

ونظراً للمبادلات '(2.11)، "(2.11)

$$= \sum_j \left( a_j^{\dagger} a_k^{\dagger} a_j + \delta_{jk} \right) |\phi_n\rangle$$
$$= a_k^{\dagger} \left( \sum_j a_j^{\dagger} a_j + 1 \right) |\phi_n\rangle \qquad (2.18)_+$$
$$= (n+1) a_k^{\dagger} |\phi_n\rangle$$

وعلى نفس النحو

$$Na_k|\phi_n\rangle = (n-1) a_k |\phi_n\rangle \qquad (2.18)_-$$

نصل بالتطبيق المتوالي لمؤثر الفناء على $\langle\phi_n|$ إلى حالة الخواء

$$|\phi_o\rangle = |0, 0, ..., 0\rangle \equiv |0\rangle$$

التي ننظمها للواحد

$$\langle 0, 0, ..., 0 | 0, 0, ..., 0 \rangle = 1$$

أو

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

و

$$a_k|0\rangle = 0$$

لأنه يستحيل أن يكون $n$ (القيمة الخاصة) عدداً سالباً كما رأينا.

كما نصل انطلاقاً من حالة الخواء إلى متجهة حالة الـ $n$ جسيماً بتطبيق مؤثرات الخلق لمختلف أنواع الحالات

$$|\phi_n\rangle = \frac{|n_1, ..., n_k, ...\rangle}{(n_1! ... n_n!)^{1/2}} \equiv \frac{\left(a_1^{\dagger}\right)^{n_1} ... \left(a_k^{\dagger}\right)^{n_k} ... |0\rangle}{(n_1! ... n_n!)^{1/2}}$$

لنلاحظ أن متجهات القاعدة منظمة للواحد ولكن $a_k^{\dagger}|\phi_n\rangle$ لا تتطبق على $\langle\phi_{n+1}|$، يتبادل $a_k^{\dagger}$ مع كل $a_j^{\dagger}$، $j \neq k$، ولا يتغير شيء في المخرج. لذا وجب ضرب الصورة والمخرج بـ $(n_k + 1)$

$$a_k^{\dagger}|\phi_n\rangle = \frac{\left(a_1^{\dagger}\right)^{n_1} ... \left(a_l^{\dagger}\right)^{n_k+1} ... |0\rangle}{(n_1! ... n_k! ....)^{1/2}} = \sqrt{n_k + 1}\,|\phi_{n+1}\rangle \qquad (2.19)_+$$

وكذلك لا ينطبق $a_k|\phi_n\rangle$ على $|\phi_{n-1}\rangle$، يتبادل $a_k$ مع كل $a_j^\dagger$ $j<k$ ولكن

$$a_k\left(a_k^\dagger\right)^{n_k} = n_k\left(a_k^\dagger\right)^{n_k-1} + \left(a_k^\dagger\right)^{n_k} a_k$$

وذلك بتطبيق العلاقة ((3.17).1). إن تطبيق الحد الثاني على $|0\rangle$ هو $\langle 0|$، ولدينا إذاً بحذف الحد $n_k^{1/2}$ في المخرج

$$a_k|\phi_n\rangle = \frac{n_k\left(a_1^\dagger\right)^{n_1}\ldots\left(a_k^\dagger\right)^{n_k-1}\ldots|0\rangle}{\left(n_1!\ldots n_k!\ldots\right)^{1/2}} = \sqrt{n_k}\,|\phi_{n-1}\rangle \qquad (2.19)$$

لنلاحظ أخيراً أن كثافة الهاميلتوني

$$\mathscr{H} = \pi\psi' - \mathscr{L}\left(\psi, \vec{\nabla}\psi, \psi', t\right)$$

التي تكتب نظراً لتعريف الكثافة اللاغرانجية (2.5) وتعريف $\pi = \frac{1}{i\hbar}\bar{\psi}$ لحقل شرودينغر على الشكل التالي في حالة الأمواج المستقرة (الطيف– المنفصل '(2.8))

$$\mathscr{H}' = \sum_{k,\ell} a_k^\dagger a_\ell \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\bar{u}_k\nabla u_\ell + U\bar{u}_k u_\ell$$

والهاميلتوني الكلي هو

$$H = \int \mathscr{H} d\vec{r} = \sum_{k,\ell} a_k^\dagger a_\ell \int_V \left(\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\bar{u}_k\vec{\nabla}u_\ell + U\bar{u}_k u_\ell\right) d\vec{r}$$

حيث $V = L^3$. نكامل بالتجزئة، ينعدم الحد المكامل $\left[\vec{\nabla}u_\ell \cdot \bar{u}_k\right]_V$ لأن الموجة منعدمة على الحدود ويبقى

$$H = \sum_{k,\ell} a_k^\dagger a_\ell \int d\vec{r}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)u_\ell \cdot \bar{u}_k$$

يأخذ الهاميلتوني المطبق على الموجة المستقرة $u_\ell$ القيمة الخاصة $E_\ell$، أي أن

$$H = \sum_{k,\ell} a_k^\dagger a_\ell \int E_\ell u_\ell \bar{u}_k \, d\vec{r} = \sum_{k,\ell} a_k^\dagger a_\ell E_\ell \delta_{k\ell}$$

$$H = \sum_\ell a_\ell^\dagger a_\ell E_\ell = \sum_\ell N_\ell E_\ell \qquad (2.20)$$

تعبر هذه الصيغة للهاميلتوني عن انحفاظ مؤثرات أعداد الجسيمات لحالة معينة، نظراً لـ (2.15) :

$$[H, N_k] = \sum_\ell E_\ell [N_\ell, N_k] = 0 \qquad (2.21)$$

إن المؤثر الكلي N منحفظ طبعاً في الميكانيك الكمومي اللانسبوي حيث لا فناء أو خلق للجسيمات ولكن انحفاظ كل مؤثر $N_k$ على حده لا يتحقق إلا في حالة الأمواج المستقرة التي أوصلتنا إلى الصيغة (2.20) للهاميلتوني.

## 5.2- تكميم الفيرميونات

حصلنا على القيم الخاصة للمؤثر $N_k$، 0، 1، 2... انطلاقاً من (2.11) التي لا تصلح للتطبيق على الفيرميونات، لأنه لا يمكن حسب مبدأ الاستبعاد وجود أكثر من فيرميون واحد في حالة كمومية معينة؛ أي أن القيم الخاصة لـ $N_k$ هي 0 أو 1 فهو بالتالي مؤثر إسقاط $N_k^2 = N_k$. ولذا فإننا سنضع كمبدأ لتكميم متجهات الحالة الفيرميونية أخذ المبادل، المسمى بالمبادل المضاد anticommutator[2]، مع إشارة + عوضاً عن (2.11):

$$[A, B]_+ = AB + BA \qquad (2.22)$$

ونكتب المبادل بين مؤثر الخلق ومؤثر الفناء الفيرميونيين على الشكل المقابل لـ '(2.11)، "(2.11)

$$\left[a_k^\dagger, a_{k'}\right]_+ = \left[a_{k'}, a_k^\dagger\right]_+ = \delta_{kk'} \qquad (2.23)$$

$$\left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\right]_+ = \left[a_k, a_{k'}\right]_+ = 0 \qquad (2.23)'$$

ونكتب المبادل المضاد في حالة الطيف المتصل على الشكل المقابل لـ (2.9) و (2.10) على الشكل

$$\left[a^\dagger\left(\vec{k}'\right), a\left(\vec{k}\right)\right]_+ = \delta\left(\vec{k}' - \vec{k}\right) \qquad (2.24)$$

$$\left[a^\dagger\left(\vec{k}'\right), a^\dagger\left(\vec{k}\right)\right]_+ = \left[a\left(\vec{k}'\right), a\left(\vec{k}\right)\right] = 0 \qquad (2.24)'$$

يعطينا نشر $\psi$ و $\psi^\dagger$ بتكامل فوريي (2.8) و $(2.8)^\dagger$ مع العلاقة (2.24) المبادل المضاد بين $\psi$ ومرافقتها $\psi^\dagger$ :

$$\left[\psi^\dagger(\vec{r}, t), \psi(\vec{r}', t)\right]_+ = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \qquad (2.25)$$

لنلاحظ أن المساواة بين $[A, B]_+$ و $[B, A]_+$ تجعلنا نتخلى عن إشارة – في تعريفنا للمبادل المضاد؛ لنلاحظ كذلك أن التكميم حسب العلاقتين (2.23) و '(2.23) يستجيب للمتطلب $N_k^2 = N_k$ :

$$N_k^2 = a_k^\dagger a_k a_k^\dagger a_k = a_k^\dagger a_k \left(1 - a_k a_k^\dagger\right)$$

$$= a_k^\dagger a_k - a_k^\dagger a_k a_k a_k^\dagger$$

إن الحد الثاني في الطرف الأيمن يساوي الصفر لأن $a_k a_k = -a_k a_k$، ومنه

$$N_k^2 = N_k$$

لنكتب متجهات القاعدة المتعامدة والمنظمة في $A\mathcal{H}^{\otimes n}$، المعرفة في (1.28) حيث نرقم الحالات المحتلة (بفيرميون واحد) على الشكل

$$|\phi_n\rangle = |1, \ldots, 1_k, \ldots 1\rangle = a_1^\dagger \ldots a_k^\dagger \ldots |0\rangle \qquad (2.26)$$

لتكن الحالة k غير محتلة في $|\phi_n\rangle$. تطبيق مؤثر حالة غير محتلة في $|\phi_n\rangle$ إلى $|\phi_{n+1}\rangle$ يجب لكي ننتقل من $|\phi_n\rangle$ إلى $|\phi_{n+1}\rangle$ تطبيق مؤثر حالة غير محتلة، أي أن

[2] يبرهن في نظرية الحقول المكممة أن التكميم بالمبادل المضاد شرط ضروري لكي تكون طاقة الفيرميون موجبة.

$$|\phi_n\rangle = a_1^\dagger \dots a_{k-1}^\dagger a_{k+1}^\dagger \dots |0\rangle$$

وعليه فإن

$$a_k^\dagger|\phi_n\rangle = a_k^\dagger a_1^\dagger \dots a_{k-1}^\dagger a_{k+1}^\dagger \dots |0\rangle$$

ننقل $a_k^\dagger$ إلى وضعه الطبيعي في الترقيم مما يدخل إشارة – كل مرة نبادله مع مؤثر خلق آخر فنحصل على :

$$a_k^\dagger|\phi_n\rangle = (-1)^{k-1} a_1^\dagger \dots a_k^\dagger \dots |0\rangle$$

$$= (-1)^{k-1}|\phi_{n+1}\rangle \qquad (2.27)_+$$

ومن الواضح أن $a_k^\dagger|\phi_n\rangle = 0$ إذا كانت الحالة k محتلة لأن $a_k^\dagger a_k^\dagger = 0$. نرمز للقيمة الخاصة للحالة k بـ $n_k$ وهي تساوي 1 أو صفر ونكتب $(2.27)_+$ في الحالة العامة على الشكل[3]

$$a_k^\dagger|\phi_n\rangle = (-1)^{k-1}\sqrt{1-n_k}\,|\phi_{n+1}\rangle \qquad (2.27)'_+$$

نحصل بنفس الطريقة على $a_n|\phi_n\rangle$ : $(-1)^{k-1}$ في المبادلات للوصول إلى $a_k a_k^\dagger$ المساوي لـ $1 + a_k^\dagger a_k$- إن مبادلة $a_k$ مع مؤثرات الخلق الآتية بعده $a_{k+1}^\dagger$، الخ. يوصل إلى $a_k|0\rangle = 0$ ولا يبقى إلا 1 الذي حذف $a_k^\dagger$ :

$$a_k|\phi_n\rangle = (-1)^{k-1} a_1^\dagger \dots \check{a}_k^\dagger \dots |0\rangle = (-1)^{k-1}|\phi_{n-1}\rangle \qquad (2.27)_-$$

أما إذا كان $a_k^\dagger$ غير موجود أصلاً أي إذا كانت القيمة الخاصة $n_k = 0$ فإن مبادلة $a_k$ مع كل مؤثرات الخلق يوصله إلى $a_k|0\rangle = 0$ ولذا نكتب $(2.27)_-$ على الشكل

$$a_k|\phi_n\rangle = (-1)^{k-1}\sqrt{n_k}\,|\phi_{n-1}\rangle \qquad (2.27)'_-$$

## 3. المؤثرات في الفضاءات $\mathcal{H}^{\otimes n}$

### 1.3– متجهات الحالة في $\mathcal{H}^{\otimes n+1}$ و $\mathcal{H}^{\otimes n-1}$

لنعد الآن إلى متجهات الحالة في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ كما كتبناها في (1.24) ولنعرف خلق أو فناء حقل في هذا الفضاء على النحو التالي

**تعريف 5 :**

ليكن $\varphi$ حقل جسيم (ينتمي إلى $\mathcal{H}$). نعرف خلق هذا الحقل في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ بالعلاقة التالية:

[3] بديهي أن المعنى الوحيد لوضع إشارة الجذر على مقدار قيمته 1 أو 0 هو كتابة هذه العلاقات على نحو مماثل للكتابة البوزونية $(2.19)_+$ و$(2.19)_-$.

$$a^{\dagger}(\varphi)|\psi_1, ..., \psi_n\rangle = |\varphi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\rangle \quad (3.1)$$

وفي $\mathcal{H}^0$ (الفضاء الخاوي)

$$a^{\dagger}|\varphi\rangle|0\rangle = |\varphi\rangle \quad (3.1)'$$

يسمح لنا هذا التعريف بتعيين $a(\varphi)|\psi_1, ..., \psi_n\rangle$ كما يلي : لنحسب جداء متجهة الحالة هذه المنتمية إلى $\mathcal{H}^{\otimes n-1}$ بمتجهة ما $\langle \chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1}|$ معطاة بالعلاقة (1.24) من هذا الفضاء. لدينا، آخذين بعين الاعتبار نصف خطية الجداء $\langle\phi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\varphi\rangle}$ وانتقال المؤثر من a في $\langle\ |$ إلى $a^{\dagger}$ في $|\ \rangle$ :

$$\langle \chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1}|a(\varphi)|\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\rangle \quad (3.2)$$

$$= \langle \psi_1, ..., \psi_n|a^{\dagger}(\varphi)|\chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1}\rangle^*$$ حيث استبدلنا المرافق العقدي بـ — *

وحسب (3.1)

$$= \langle \psi_1, ..., \psi_n|\varphi, \chi_1 ... \chi_{n-1}\rangle^*$$

إنه المعين (العقدي المرافق) حسب (1.26)

$$\begin{vmatrix} \langle\psi_1, \varphi\rangle & \cdots & \langle\psi_1, \chi_{n-1}\rangle \\ \vdots & & \\ \langle\psi_n|\varphi\rangle & \cdots & \langle\psi_n, \chi_{n-1}\rangle \end{vmatrix}^*_{\mp} = |A|^*_{\varepsilon}$$

حيث رمزنا لهذا المعين (المستمر) بـ $|A|^*_{\varepsilon}$، $\varepsilon = \mp 1$. لننشره حسب عناصر العمود الأول

$$|A|^*_{\varepsilon} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k-1} \langle\psi_k|\varphi\rangle |B_k|_{\varepsilon}\right\}^*$$

حيث $|B_k|_{\varepsilon}$ هو الصغير $(n-1)\times(n-1)$ المقابل لـ $\langle\psi_k|\varphi\rangle$ إنه إذاً

$$\langle \psi_1, ..., \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, ..., \psi_n|\chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1}\rangle$$

نأخذ مرافقه العقدي والمرافق العقدي لـ $\langle\psi_k|\varphi\rangle$ لنكتب (3.2) على الشكل

$$\langle \chi_1, ..., \chi_{n-1}|a(\varphi)|\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k-1} \langle\varphi, \psi_k\rangle \langle \chi_1, ..., \chi_{n-1}|\psi_1, ..., \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, ..., \psi_n\rangle$$

وبالتالي فإن

$$a(\varphi)|\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k-1} \langle\varphi|\psi_k\rangle |\psi_1 ... \psi_{k-1}, \psi_{k+1} ... \psi_n\rangle \quad (3.3)$$

يمكننا الآن جمع العلاقتين (3.1) و (3.3) في قضية واحدة.

**قضية 4** :

إن

$$a(\varphi_1)a^{\dagger}(\varphi_2)|\psi_1, \psi_2, ... \psi_n\rangle = a(\varphi_1)|\varphi_2, \psi_1, ... \psi_n\rangle \quad (3.4)$$

$$= \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle|\psi_1, ... \psi_n\rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle\varphi_1|\psi_k\rangle \varepsilon^k |\varphi_2, \psi_1, ... \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, ... \psi_n\rangle$$

و

$$a^{\dagger}(\varphi_2)a(\varphi_1)|\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k-1}\langle\varphi_1|\psi_k\rangle a^{\dagger}(\varphi_2)|\psi_1,\ldots\psi_{k-1},\psi_{k+1},\ldots\psi_n\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k-1}\langle\varphi_1|\psi_k\rangle|\varphi_2,\psi_1,\ldots,\psi_{k-1},\psi_{k+1},\ldots,\psi_n\rangle \quad (3.5)$$

## 2.3- المؤثرات في الفضاء $\mathscr{H}^{\otimes n}$

**تعريف 6 :**

نرمز بـ $A^{(1)}$ لمؤثر في الفضاء $\mathscr{H}$؛ نرمز للمؤثر على المتجهة $|\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n\rangle$ بـ $A$ ونعرفه بالعلاقة التالية

$$A|\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n\rangle = \left(A^{(1)}|\psi_1\rangle,\psi_2,\ldots|\psi_n\rangle + |\psi_1,A^{(1)}|\psi_2\rangle,\ldots,\psi_n\rangle + \ldots|\psi_1,\ldots,A^{(1)}|\psi_n\rangle\rangle\right) \quad (3.6)$$

ولدينا انطلاقاً من هذا التعريف

**قضية 5 :**

لتكن المتجهات $|\psi_i\rangle$ متجهات خاصة للمؤثر $A^{(1)}$ تقابلها القيم الخاصة $a_i$. إن $|\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n\rangle$ متجهة خاصة لـ $A$ تقابلها القيمة الخاصة $\sum_{i=1}^{n}a_i$

$$A|\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{n}a_i|\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle \quad (3.7)$$

ذلك أن تعويض $A^{(1)}|\psi_i\rangle$ بـ $a_i|\psi_i\rangle$ في الحد $|\psi_1,A^{(1)}|\psi_i\rangle\ldots,\psi_n\rangle$ يعني ضرب علاقة التعريف (1.26) بـ $a_i$؛ ومنه (3.7) أعلاه.

وهكذا فإذا كان $A^{(1)}$ هو هاميلتوني الجسيم الواحد فإن هاميلتوني الـ n جسيماً (بوزوناً أو فيرميوناً) هو $A$ وطاقة الـ n جسيماً هي مجموع طاقات الجسيمات المنفردة وغير المتفاعلة فيما بينها. وإذا كان $A^{(1)}$ هو المؤثر الوحدة $A^{(1)}|\psi\rangle = I|\psi\rangle = |\psi\rangle$ فإن $A$ هو مؤثر عدد الجسيمات $A|\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle = n|\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle$ ولكن ما هي صيغة هذا المؤثر؟

**قضية 6 :**

ليكن $A^{(1)}$ من الشكل $|\alpha\rangle\langle\beta|$. إن المؤثر $A$ الفاعل في $\mathscr{H}^{\otimes n}$ هو من الشكل $a^{\dagger}(\alpha)a(\beta)$.

إن تطبيق $|\alpha\rangle\langle\beta|$ على متجهة $|\psi_k\rangle$ هو جداء المتجهة $|\alpha\rangle$ بالعدد $\langle\beta|\psi_k\rangle$ ولدينا بالعودة إلى (3.6)

$$A|\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\rangle = \langle\beta|\psi_1\rangle|\alpha, \psi_2, ..., \psi_n\rangle + ... + \langle\beta|\psi_k\rangle|\psi_1, ..., \psi_{k-1}, |\alpha\rangle, \psi_{k+1}, ..., \psi_n\rangle + ...$$

أي

$$= \sum_{k=1}^{n}\langle\beta|\psi_k\rangle|\psi_1, ..., \alpha, \psi_{k+1}, ...., \psi_n\rangle$$

يمكن مبادلة $\alpha$ مع الـ $k-1$ عنصراً السابقة لها مما يعطينا العامل $\varepsilon^{k-1}$ وبالتالي

$$A|\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k-1}\langle\beta|\psi_k\rangle|\alpha, \psi_1, ..., \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, ..., \psi_n\rangle$$

أي حسب (3.5)

$$= a^\dagger(\alpha)a(\beta)|\psi_1, ..., \psi_n\rangle \tag{3.8}$$

وهو المطلوب برهانه.

يمكننا أن ننظر إلى المتجهات $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$، الخ. كمتجهات قاعدة في $\mathscr{H}$ وكتابة المؤثر $A^{(1)}$ كمصفوفة في هذه القاعدة، تتحدد عناصرها على الشكل التالي

$$A^{(1)} = IA^{(1)}I = \sum_{\alpha,\beta}|\alpha\rangle\langle\alpha|A^{(1)}|\beta\rangle\langle\beta| \tag{3.9}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}A^{(1)}_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta| \tag{3.9'}$$

ولدينا عندئذ بالرجوع إلى (3.8)

$$A = \sum_{\alpha,\beta}A^{(1)}_{\alpha\beta}a^\dagger(\alpha)a(\beta) \tag{3.9''}$$

ومنه

<u>لازمة</u> :

عندما يكون المؤثر $A^{(1)}$ هو المؤثر الوحدة $I = \sum|\alpha\rangle\langle\alpha|$ فإن

$$A = \sum_{\alpha}a^\dagger(\alpha)\,a(\alpha) \tag{3.10}$$

ذلك أن عناصر المصفوفة $A^{(1)}$ هي $\delta_{\alpha\beta}$ في هذه الحالة.

إن (3.10) هو المؤثر عدد الجسيمات الذي حصلنا عليه انطلاقاً من (2.7) التي اعتبرناها مبدأ، قابلنا فيه كثافة الاحتمال في $\mathscr{H}$ بالمؤثر $\psi^\dagger\psi$، كثافة عدد الجسيمات في التكميم الثاني والتي أعطتنا (2.14) في حالة الطيف المنفصل و'(2.7) في حالة الطيف المتصل. نحصل على '(2.7) بأخذ قاعدة متصلة (في التمثيل Q) في $\mathscr{H}$

$$I = \int|q\rangle\, dq\, \langle q|$$

$$A|\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle = \langle\beta|\psi_1\rangle|\alpha, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle + \ldots + \langle\beta|\psi_k\rangle|\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}, |\alpha\rangle, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_n\rangle + \ldots$$

أي

$$= \sum_{k=1}^{n}\langle\beta|\psi_k\rangle|\psi_1, \ldots, \alpha, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_n\rangle$$

يمكن مبادلة $\alpha$ مع الـ $k-1$ عنصراً السابقة لها مما يعطينا العامل $\varepsilon^{k-1}$ وبالتالي

$$A|\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k-1}\langle\beta|\psi_k\rangle|\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_n\rangle$$

أي حسب (3.5)

$$= a^{\dagger}(\alpha)a(\beta)|\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle \tag{3.8}$$

وهو المطلوب برهانه.

يمكننا أن ننظر إلى المتجهات $\langle\alpha|$، $\langle\beta|$، الخ. كمتجهات قاعدة في $\mathscr{H}$ وكتابة المؤثر $A^{(1)}$ كمصفوفة في هذه القاعدة، تتحدد عناصرها على الشكل التالي

$$A^{(1)} = IA^{(1)}I = \sum_{\alpha,\beta}|\alpha\rangle\langle\alpha|A^{(1)}|\beta\rangle\langle\beta| \tag{3.9}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}A^{(1)}_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta| \tag{3.9'}$$

ولدينا عندئذ بالرجوع إلى (3.8)

$$A = \sum_{\alpha,\beta}A^{(1)}_{\alpha\beta}a^{\dagger}(\alpha)a(\beta) \tag{3.9''}$$

ومنه

**<u>لازمة</u> :**

عندما يكون المؤثر $A^{(1)}$ هو المؤثر الوحدة $I = \sum|\alpha\rangle\langle\alpha|$ فإن

$$A = \sum_{\alpha}a^{\dagger}(\alpha)\,a(\alpha) \tag{3.10}$$

ذلك أن عناصر المصفوفة $A^{(1)}$ هي $\delta_{\alpha\beta}$ في هذه الحالة.

إن (3.10) هو المؤثر عدد الجسيمات الذي حصلنا عليه انطلاقاً من (2.7) التي اعتبرناها مبدأ، قابلنا فيه كثافة الاحتمال في $\mathscr{H}$ بالمؤثر $\psi^{\dagger}\psi$، كثافة عدد الجسيمات في التكميم الثاني والتي أعطتنا (2.14) في حالة الطيف المنفصل و'(2.7) في حالة الطيف المتصل. نحصل على '(2.7) بأخذ قاعدة متصلة (في التمثيل Q) في $\mathscr{H}$

$$I = \int|q\rangle\, dq\, \langle q|$$

واتباع محاكمة القضية 6 : يحل تكامل ثنائي على المتغيرين $q$ و $q'$ محل الجمع على قيم $\alpha$ و $\beta$ ويحل $\delta(q-q')$ محل $\delta_{\alpha/\beta}$ من أجل $A^{(1)} = I$ ونحصل على

$$A = \int dq\, a^{\dagger}(q)\, a(q) \tag{3.10'}$$

## 3.3– الهاميلتوني في $\mathcal{H}^{\otimes n}$

لنفترض بصورة عامة أن المؤثر $A^{(1)}$ يفعل في حيز متصل من الفضاء (انظر (5.§5.7)) ولنبدأ بالتمثيل $Q$) نكتب (3.9) على الشكل

$$A^{(1)} = IA^{(1)}I = \int\int |q'\rangle\langle q'|A^{(1)}|q\rangle\langle q|\, dq\, dq' \tag{3.11}$$

ونكتب "(3.9) على الشكل

$$A = \int\int a^{\dagger}(q')\, a(q)\langle q'|A^{(1)}|q\rangle\, dq\, dq' \tag{3.12}$$

عندما يؤثر $A^{(1)}$ مباشرة على متجهات القاعدة : $Q|q\rangle = q|q\rangle$ ؛ $P|p\rangle = p|p\rangle$ على سبيل المثال أي عندما يكون لـ $A^{(1)}$ متجهات خاصة تقابلها "القيم الخاصة" $\lambda$ مثلاً فإن

$$\langle q'|A^{(1)}|q\rangle = \lambda\delta(q'-q) \tag{3.13}$$

بحيث يأخذ المؤثر $A$ في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ الشكل

$$A = \int\int a^{\dagger}(q')\, a(q)\, \lambda\delta(q'-q)\, dq\, dq'$$

$$A = \int \lambda a^{\dagger}(q)\, a(q)\, dq \tag{3.14}$$

إن $A$ من أجل الاندفاع في التمثيل $P$ هو

$$P = \int \bar{p}\, a^{\dagger}(\bar{p})\, a(\bar{p})\, d\bar{p} \tag{3.15}$$

وفي التمثيل $Q$ $(\bar{r})$

$$P = \int a^{\dagger}(\bar{r})\frac{\hbar}{i}\bar{\nabla}_{\bar{r}}\, a(\bar{r})\, d\bar{r} \tag{3.15'}$$

يفعل المؤثر الخطي على يمينه عندما يؤثر على المتجهة $\langle \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n|$.

وعلى نفس النحو فإن الهاميلتوني في فضاء الوضع حيث، حسب (3.13)،

$$\langle \bar{r}|H^{(1)}|\bar{r}\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\bar{r})\right]\delta(\bar{r}-\bar{r}) \tag{3.13'}$$

وحسب (3.14)

$$H = \int a^{\dagger}(\bar{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\bar{r})\right]a(\bar{r})\, d\bar{r} \tag{3.16}$$

أما في فضاء الاندفاعات (في التمثيل $\bar{p}$) حيث $H^{(1)} = \frac{P^2}{2m} + U(\bar{r})$ فإن "القيم الخاصة" لـ $\frac{P^2}{2m}$ هي $\frac{p^2}{2m}$، وهاميلتوني الجسيمات الحرة، ونرمز له بـ $H_{\prime}$، هو حسب (3.15)

$$H_{\prime} = \int \frac{p^2}{2m} a^{\dagger}(\bar{p})\, a(\bar{p})\, d\bar{p} \tag{3.17}$$

وعلينا الآن حساب عنصر "مصفوفة" الكمون $U(\bar{r})$ الذي يخضع له كل جسيم على حدة في هذا التمثيل بالانتقال من $U(\bar{r})$ إلى $U(\bar{p})$. نحصل بإدخال المؤثر الوحدة $I = \int |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|\, d\bar{r}$

$$\langle\bar{p}'|U(r)|\bar{p}\rangle = \int \langle\bar{p}'|\bar{r}\rangle U(\bar{r}) \langle\bar{r}|\bar{p}\rangle d\bar{r}$$

وملاحظة[4] أن $\langle\bar{p}'|\bar{r}\rangle = e^{-i\bar{p}'\cdot\bar{r}}$؛ $\langle\bar{r}|\bar{p}\rangle = e^{+i\bar{r}\cdot\bar{p}}$.

$$= \int e^{-i\bar{p}'\cdot\bar{r}}\, U(r)\, e^{+i\bar{p}\cdot\bar{r}}\, d\bar{r}$$

$$= (2\pi)^{3/2}\, U(\bar{p}' - \bar{p}) = \tilde{U}(\bar{p}' - \bar{p}) \tag{3.12)'$$

حيث $U(\bar{p}' - \bar{p})$ هو محول فوريي بالمتغير $(\bar{p}' - \bar{p})$. نحصل بوضع هذا الحد في (3.12) وإضافة (3.17) إليه على هاميلتوني $n$ جسيماً يخضع كل منها إلى كمون $U(\bar{r})$ ولكنها لا تتفاعل فيما بينها

$$H = \int \frac{p^2}{2m} a^{\dagger}(\bar{p})\, a(\bar{p})\, dp + \iint a^{\dagger}(\bar{p}')\, a(\bar{p})\, \tilde{U}(\bar{p}' - \bar{p})\, d\bar{p}\, d\bar{p}' \tag{3.18}$$

يعبر الحد $a^{\dagger}(\bar{p}')a(\bar{p})\tilde{U}(\bar{p}' - \bar{p})$ عن فناء جسيم اندفاعه $\bar{p}$ وخلق جسيم اندفاعه $\bar{p}'$ بسعة $\tilde{U}(\bar{p}' - \bar{p})$، باحتمال $|\tilde{U}(\bar{p}' - \bar{p})|^2$؛ أو بشكل آخر، نسمي $p' - p = p''$ ونقول إن الكمون "$\bar{p}''$ أفنى جسيماً اندفاعه $\bar{p}$ ليخلق آخر اندفاعه $\bar{p} + \bar{p}''$".

لنفترض أخيراً أن الجسيمات تتفاعل فيما بينها زوجاً زوجاً، بالإضافة إلى الكمون (القوة الخارجية) المشترك الذي تخضع له. لنرمز لهذا الكمون من أجل جسيمين لا على التعيين وضعهما $\bar{r}_i$، $\bar{r}_j$ بـ $U^{(2)}(\bar{r}_i, \bar{r}_j)$. سنتخلى عن الأسهم لتسهيل الكتابة ونرمز لمتجهات القاعدة بـ $|x\rangle$، $|y\rangle$... ونكتبها في $S\mathscr{H}^{\otimes 2}$ أو $A\mathscr{H}^{\otimes 2}$ $|x, y\rangle$. إن المؤثر الوحدة في هذين الفضائين ونرمز له بـ $I^2$ هو، على غرار (1.30) (المنفصل)

$$I^{(2)} = \frac{1}{2}\int dx\, dy\, |x, y\rangle\langle x, y| \tag{3.19}$$

ونكتب

$$U^{(2)} = U^{(2)} I^2 = \frac{1}{2}\int dx\, dy\, |x, y\rangle U^{(2)}(x, y) \langle x|\langle y|$$

---

[4] لا ننسى أننا ننشر في التمثيل $P$ بدليل متجهات القاعدة $e^{-i\bar{p}\cdot\bar{r}}$ التي هي متجهات خاصة لمؤثر الوضع $i\hbar\bar{\nabla}_p$ في هذا التمثيل، وبالمقابل ننشر في التمثيل $Q$ بدليل متجهات القاعدة $e^{i\bar{p}\cdot\bar{r}}$، المتجهات الخاصة لمؤثر الاندفاع $\frac{\hbar}{i}\bar{\nabla}$، في هذا التمثيل (2.§1.5).

نعرف المؤثر V الفاعل في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ على متجهة حالة n جسيماً بـ

$$V|x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} U^{(2)}(x_i, x_j)|x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \quad (3.20)$$

ونبرهن

<u>قضية 7</u> :

يأخذ المؤثر V الفاعل في $\mathcal{H}^{\otimes n}$ والممثل لتفاعلات الـ n جسيماً زوجاً زوجاً الشكل التالي

$$V = \frac{1}{2}\iint dx\, dy\, a^{\dagger}(x)\, a^{\dagger}(y) U^{(2)}(x, y) a(y) a(x) \quad (3.21)$$

لدينا بتطبيق العلاقة (3.3) مرتين

$$a(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k-1}\langle x|x_k\rangle |x_1, \ldots, \check{x}_k, \ldots, x_n\rangle \quad (3.21)'$$

حيث $\check{x}_k$ تشير إلى اختفاء الحد $x_k$ و

$$a(y)a(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k-1}\delta(x - x_k)\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1} \eta_{kj}\delta(y - x_j)|x_1, \ldots, \check{x}_j, \ldots \check{x}_k, x_n\rangle \quad (3.22)$$

حيث

$$\eta_{jk} = \begin{cases} \varepsilon^{j-1} & j < k \text{ عندما يكون} \\ \varepsilon^{j} & j > k \text{ عندما يكون} \end{cases}$$

وبتطبيق العلاقة (3.1) مرتين على العلاقة (3.22)

$$a^{\dagger}(x)a^{\dagger}(y)a(y)a(x) = \sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} \varepsilon^{k-1}\eta_{kj}\delta(x - x_k)\delta(y - x_j)|x, y, x_1, \ldots, \check{x}_j, \ldots \check{x}_k, x_n\rangle$$

نتخلص من العامل $\varepsilon^{k-1}\eta_{jk}$ بإيصال y و x إلى الوضعين الخاويين j و k ونضرب النتيجة بـ $\frac{1}{2}U^2(x, y)$ ونكامل على x و y فنحصل من الطرف الأيسر على (3.21) ومن الطرف الأيمن على

$$\frac{1}{2}\iint \sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} U^2(x, y)\delta(x - x_k)\delta(y - x_j)|x_1, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, x_n\rangle dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} U^2(x_k, x_j)|x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n\rangle$$

وهو تعريفاً (3.20) وينتهي البرهان.

<u>قضية 8</u> :

يأخذ المؤثر V في فضاء الاندفاعات الشكل التالي

$$V = \frac{1}{2}\int\int a^{\dagger}(p+p'')a^{\dagger}(p'-p'')\tilde{V}(p'')a(p')a(p)\,dp\,dp'\,dp'' \quad (3.23)$$

حيث

$$\tilde{V}(p'') = (2\pi)^{3/2}V(p'') = \int U^{(2)}(x-y)e^{ip''(x-y)}dx\,dy \quad (3.24)$$

نحصل على $a^{\dagger}(p)$ و $a(p)$ كمحولات فوريي للمؤثرين $a^{\dagger}(x) = \psi^{\dagger}(x)$ و $a(x) = \psi(x)$ المعرفين في (2.8) :

$$a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int a(p)e^{ipx}dp \;;\; a^{\dagger}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int a^{\dagger}(p)e^{-ipx}dp$$

$$\begin{cases} a^{\dagger}(p) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int a^{\dagger}(x)e^{ipx}dx \\ a(p) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int a(x)e^{-ipx}dx \end{cases} \quad (3.25)$$

ويعطينا التحول من المتغيرين $x$ و $y$ على الدالات (المؤثرات) الخمس في (3.21) خمسة تكاملات إضافية بـ $p$ ، $p'$ ، $p''$ ، $p_1'$ ، $p_1$ مرتبة من اليمين نحو اليسار لنحصل على

$$V = \frac{1}{2}\int\int\int\int\int\int\int dx\,dy\,dp\,dp'\,dp''\,dp_1\,dp_1'\,a^{\dagger}(p_1)e^{ip_1x}a^{\dagger}(p_1')e^{ip_1'y}\tilde{V}(p'')e^{-ip''(x-y)}a(p')e^{-ip'y}a(p)e^{-ipx}$$

يعطينا تكامل الدالاتين الأسيتين $e^{i(p_1-(p+p''))x}$ و $e^{i(p_1'-(p'-p''))y}$ على $x$ و $y$ على الترتيب دالتي ديراك $\delta(p_1-(p+p''))$ و $\delta(p_1'-(p'-p''))$. نكامل على $p_1'$ و $p_2'$ أيضاً بحيث لا يبقى في $V$ إلا ثلاثة تكاملات على $p$ ، $p'$ ، $p''$ وحيث $p_1' = p'-p''$ و $p_1 = p+p''$. ونحصل إذاً على (3.23) إذا ما لاحظنا أن التكامل على دالتي ديراك يضيف $(2\pi)^6$ في الصورة التي تتعادل مع $\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^4$ الآتية من تحويلات فوريي لمؤثرات الخلق والفناء. وهذا ما يبرر تعريفنا لـ $\tilde{V}(p'')$ على الشكل (3.24).

لننظر الآن إلى فعل المؤثر $V$ على حالة جسيمين اندفاعهما $p_1$ و $p_2$. نكتب متجهة الحالة في $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ على الشكل $|p_1, p_2\rangle$ آخذين بعين الاعتبار العلاقتين (3.3) و (3.1) :

$$a(p)|p_1, p_2\rangle = \delta(p-p_1)|p_2\rangle + \varepsilon\delta(p-p_2)|p_1\rangle$$

لنطبق $a(p')$ على الطرفين فنحصل على الحالة الخاوية $|0\rangle$

$$a(p')a(p)|p_1, p_2\rangle = \delta(p-p_1)\delta(p'-p_2)|0\rangle + \varepsilon\delta(p-p_2)\delta(p'-p_1)|0\rangle$$

يحول تطبيق مؤثري الخلق متجهة حالة الخواء إلى $|p+p'', p'-p''\rangle$ ونحصل بالتكامل على مجموع الحدين

$$|p_1+p'', p_2-p''\rangle + \varepsilon|p_2+p'', p_1-p''\rangle \quad (3.26)$$

لنلاحظ أخيراً أن الكمون $U^{(2)}(x-y)$ لا يتوقف، حاله حال كل كمون تفاعل، إلا على الفرق – على المسافة – بين $x$ و $y$ ؛ إنه من الشكل $U^{(2)}(|x-y|)$. هذا يعني أن تبديل $\tilde{V}(p'')$ بـ $\tilde{V}(-p'')$ يعطي

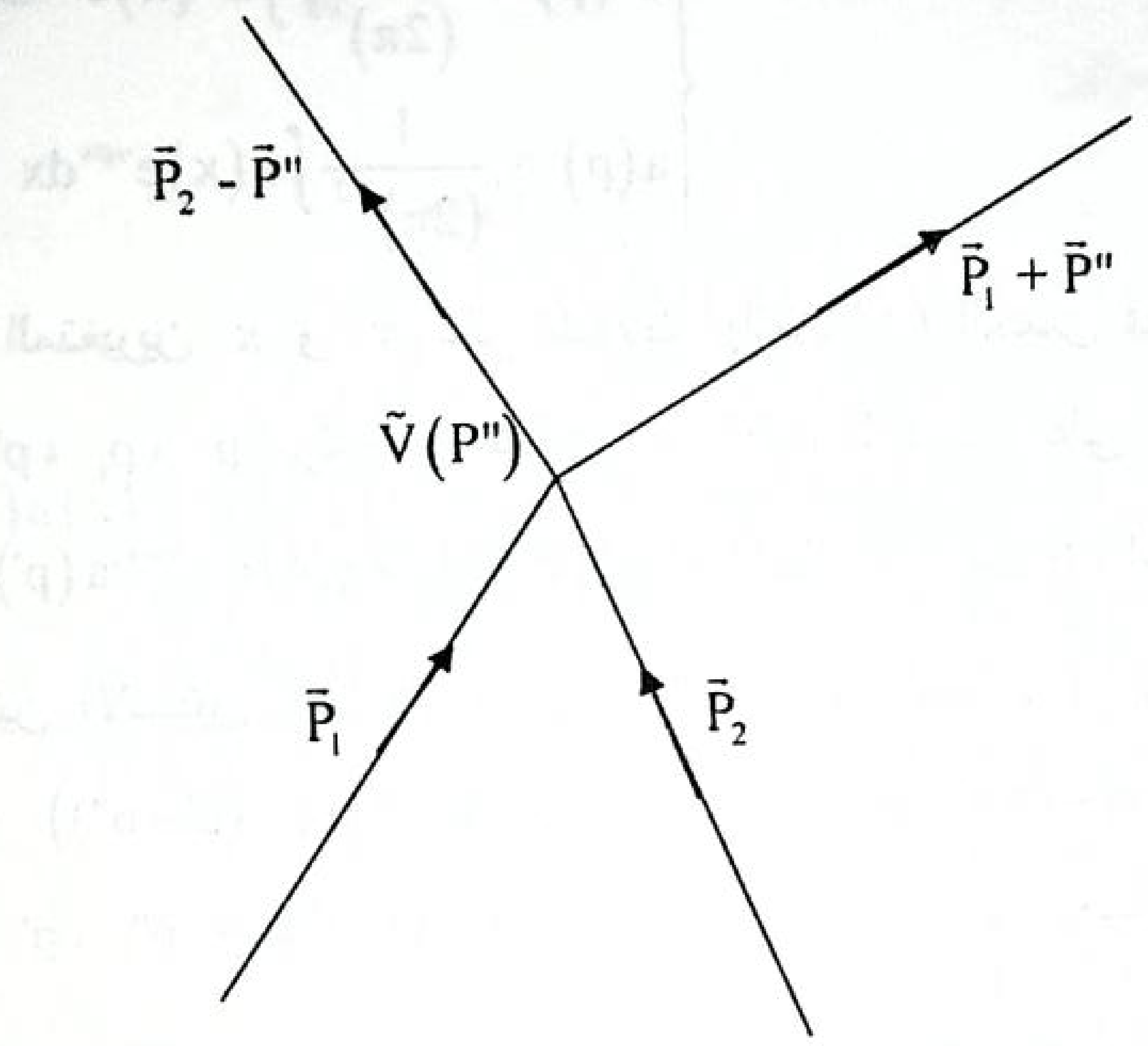
نفس النتيجة الفيزيائية أي أن الحد الثاني في (3.26) $|p_2 + p'', p_1 - p''\rangle = |p_2 - p'', p_1 + p''\rangle$ بحيث يصبح المجموع في (3.26)، نظراً لـ (1.24) الذي يحول ε إلى $\varepsilon^2$، مساوياً لـ

$$2|p_1 + p'', p_2 - p''\rangle$$

وفي النهاية

$$V|p_1, p_2\rangle = \int dp''\tilde{V}(p'')|p_1 + p'', p_2 - p''\rangle \qquad (3.27)$$

الذي يفيد أن الكمون في نقطة ما من الفضاء "p يضيف اندفاعاً "p إلى أحد الجسيمين الواردين ويطرح نفس الاندفاع من الجسيم الآخر بحيث يبقى انحفاظ الاندفاع الكلي قائماً. ونعبر عن هذا التفاعل على شكل مخطط – مخططات فاينمان –، الشكل.4.




الشكل. 4

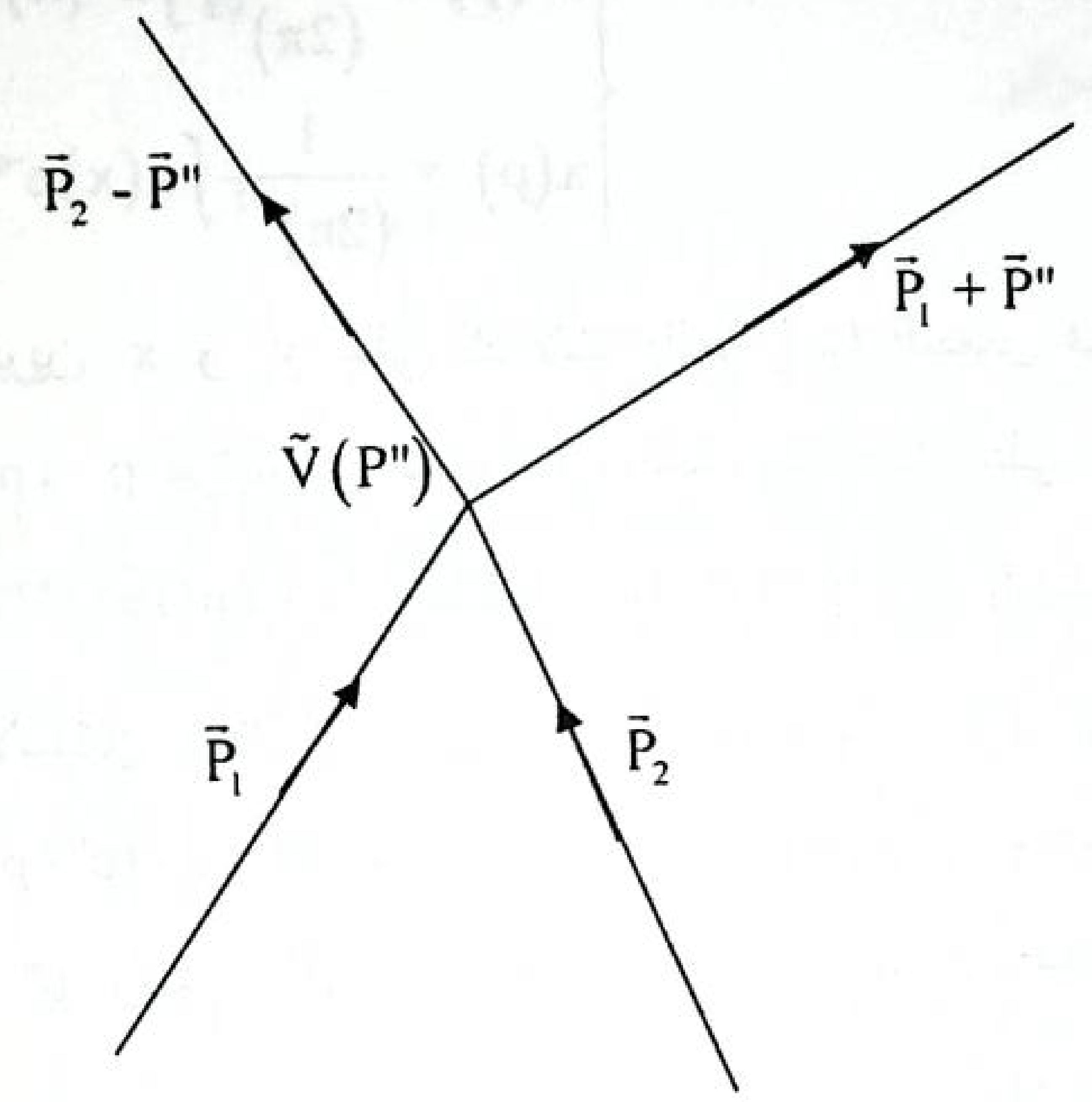
نفس النتيجة الفيزيائية أي أن الحد الثاني في (3.26) $|p_2 + p'', p_1 - p''\rangle = |p_2 - p'', p_1 + p''\rangle$ بحيث يصبح المجموع في (3.26)، نظراً لـ (1.24) الذي يحول ε إلى $\varepsilon^2$، مساوياً لـ

$$2|p_1 + p'', p_2 - p''\rangle$$

وفي النهاية

$$V|p_1, p_2\rangle = \int dp''\tilde{V}(p'')|p_1 + p'', p_2 - p''\rangle \quad (3.27)$$

الذي يفيد أن الكمون في نقطة ما من الفضاء "p يضيف اندفاعاً "p إلى أحد الجسيمين الواردين ويطرح نفس الاندفاع من الجسيم الآخر بحيث يبقى انحفاظ الاندفاع الكلي قائماً. ونعبر عن هذا التفاعل على شكل مخطط – مخططات فاينمان –، الشكل.4.




الشكل. 4

# الفصل السابع

## طرق التقريب

1- التقريب شبه التقليدي .......................... 321

2- طريقة التغيرات Variational Method ..... 334

# الفصل السابع: طرق التقريب

## 1. التقريب شبه التقليدي

### 1.1- التقريب التقليدي للميكانيك الكمومي

تعترضنا في كل دراستنا للفيزياء مشاكل حل المعادلات التفاضلية المعبرة عن الحالات الفيزيائية، عن التفاعلات في إطار نظرية ما، لعل من أشهرها مسألة تفاعل ثلاثة أجسام، الشمس والأرض والقمر في إطار الميكانيك التقليدي. وهنا، في الميكانيك الكمومي أيضاً، لا تعني كتابة معادلة شرودينغر للذرة مثلاً إمكانية حلها تحليلياً : تتجاذب نواة الذرة مع الـ Z إلكتروناً المحيطة بها في حين تتنابذ الإلكترونات فيما بينها. هذا من حيث التفاعل الكهربائي. أضف إلى ذلك أن لمكونات الذرة عزماً زاوياً صميمياً. وبالتالي عزماً مغنطيسياً متناسباً معه يحدث في كل الفضاء المحيط به حقلاً مغنطيسياً يتفاعل مع العزوم الزاوية (المغنطيسية) في نقاط وجودها. وهكذا يتفاعل عزم النواة المغنطيسي مع العزوم المغنطيسية للإلكترونات الناتجة على السواء عن عزمها الزاوي المداري أو عن سبينها، كما تتفاعل سبينات الإلكترونات فيما بينها، الخ. ولا بد لنا والحال هذه من التفتيش عن حلول تقريبية تعبر عن الواقع الفيزيائي للذرة. استطعنا في الفصل السابق في تقريب خشن جداً يستند على مبدأ الاستبعاد البدء في تفسير الجدول الدوري للعناصر. سنعالج في هذا الفصل تقريبات أخرى أقل ابتدائية تفسر كمياً بعض الظواهر. ولكننا سنبدأ بتقريب، شبيه بنشر تايلور للكمون بدليل القوى المتصاعدة للمسافة، ننشر فيه الفعل الكمومي بدليل القوى المتصاعدة لـ $\hbar$، يعيدنا إلى الميكانيك التقليدي من أجل القوى صفر لـ $\hbar$، التي اعتبرناها منذ البداية الحد الفاصل بين هاتين النظريتين : إهمال $\hbar$ أمام الأفعال الأخرى، اعتبارها متناهية نحو الصفر، للعودة إلى الميكانيك التقليدي. ويتيح لنا تفسير بعض الحلول التي تأخذ بعين الاعتبار الثابتة $\hbar$ ولكنها تبقي على مفهوم المسار التقليدي : حلول تجمع بين المفاهيم التقليدية والكمومية، اقترحت قبل نشوء النظرية الكمومية بشكلها الحالي.

حسبنا من جهة أخرى في مطلع الفصل الثاني مؤثر السرعة ومؤثر التسارع في تمثيل هايزنبرغ، وفق العلاقتين ((3.2).1) و ((3.1).1) ووجدنا أن قانون نيوتن صحيح إذا ما نظرنا إليه كتعبير عن القيمة الوسطية للتسارع ((2.1).2) : $m\langle \vec{a}_r \rangle = -\langle \vec{\nabla} U \rangle$ (مبرهنة إرنفست) نعمم هذه العلاقة من أجل أي عدد s من درجات الحرية حيث الهاميلتوني $H = H(q^1 \dots q^s, p_1 \dots p_s)$. لدينا حسب ((3.8).1)، ((3.6).1) و ((3.2).1)

$$[q^i, H] = i\hbar \frac{\partial H}{\partial p_i} = i\hbar \frac{dq^i}{dt} \quad (1.1)_1$$

$$[p_i, H] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = i\hbar \frac{dp_i}{dt} \quad (1.1)_2$$

وبالتالي

$$\left\langle \frac{dq^i}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle \quad (1.2)_1$$

$$\left\langle \frac{dp_i}{dt} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle \quad (1.2)_2$$

تبقى معادلات هاميلتون ((I.6(3.3)) صحيحة في الميكانيك الكمومي على أن تؤخذ كتعبير عن القيم الوسطى للمؤثرات q، p، H.

## 2.1- التقريب شبه التقليدي

حصلنا في (1.(2.11) على معادلة شرودينغر انطلاقاً من متجهة حالة مكتوبة بدليل الفعل S :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}S} \quad (1.3)$$

وقابلنا، للحصول على معادلة شرودينغر، $-\frac{\partial S}{\partial t}$ بالمؤثر H كما في معادلة هاميلتون – جاكوبي التقليدية ((I.6.(3.24)). لدينا إذاً العلاقة بين S و H :

$$-\frac{\partial S}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)|\psi\rangle$$

وباشتقاق $|\psi\rangle$ المعرفة بـ (1.3) ووضع النتيجة في الطرف الأيمن لهذه المعادلة

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}S\right)^2 - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S + U \quad (1.4)$$

ننشر S كسلسلة بقوى $\frac{\hbar}{i}$ :

$$S = S_o + \frac{\hbar}{i}S_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2 + \ldots \quad (1.5)$$

إن $S_o$ هو الفعل التقليدي. نحصل على سلسلة من المعادلات التفاضلية بـ $S_p$، $p = 0, 1, 2, \ldots$ باستبدال S في (1.4) بالنشر (1.5) ومقابلة العناصر التي لها ذات القوة بـ $\hbar$. لدينا من أجل الحدين الأولين $S_o$ و $S_o + \frac{\hbar}{i}S_1$ :

$$-\frac{\partial S_o}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}S_o\right)^2 + U \quad (1.6)_0$$

$$-\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{m}\vec{\nabla}S_o \cdot \vec{\nabla}S_1 + \frac{1}{2m}\nabla^2 S_o \quad (1.6)_1$$

حيث لم نأخذ بعين الاعتبار $\nabla^2 S_1$ ، $(\vec{\nabla} S_1)^2$ لأن قوتهما هي $\hbar^2$. كذلك

$$-\frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{1}{m}\vec{\nabla} S_0 \cdot \vec{\nabla} S_2 + \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} S_1\right)^2 + \frac{1}{2m}\nabla^2 S_1 \qquad (1.6)_2$$

إن المعادلة الأولى هي معادلة هاميلتون-جاكوبي التقليدية حيث $\vec{\nabla} S_0$ هو الاندفاع التقليدي $\vec{p}$

$$-\frac{\partial S_0}{\partial t} = H = \frac{p^2}{2m} + U$$

نكتب المعادلة $(1.6)_1$، مستعملين المتطابقة $\vec{\nabla} \cdot \left(a \cdot \vec{\nabla} b\right) = \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} b + a\nabla^2 b$، على الشكل المكافئ

$$-\frac{\partial}{\partial t} e^{2S_1} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{m} e^{2S_1} \vec{\nabla} S_0\right) \qquad (1.6)'_1$$

ثم إن $S_0$ مقدار حقيقي نظراً لكونه فعلاً تقليدياً؛ ولذا فإن $S_1$ حقيقي أيضاً استناداً إلى المعادلة التفاضلية $(1.6)_1$ التي يحققها : إنه حقيقي في حيز الفضاء الذي تعرف فيه المسارات المحققة لـ $S_0$. وهكذا فإن توقف نشر $S$ في (1.3) عند الحدين الأولين $S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1$ يعطينا

$$\rho = \langle \psi | \psi \rangle = |\psi|^2 = e^{2S_1} \qquad (1.7)$$

بحيث تصبح المعادلة $(1.6)'_1$ معادلة الاتصالية

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

حيث $\vec{J} = \rho \frac{\vec{\nabla} S_0}{m} = \rho \vec{V}_0$.

تعني هذه العلاقة أن كثافة الاحتمال، المتناسبة مع كثافة التيار، تتحرك على المسارات التقليدية بسرعة تساوي سرعة الجسيم التقليدي. وهذا ما عبرنا عنه في (2.§ 1.4) عندما اخترنا كثافة التيار بحيث يكون التدفق مساوياً للواحد $|\vec{J}| = 1$.

يمكننا القول بشكل آخر إن متجهة الحالة توصف سائلاً من الجسيمات التقليدية ذات الكتلة $m$ غير المتفاعلة فيما بينها؛ كثافة هذا السائل هي كثافة احتمال وجود الجسيم $|\psi|^2$ وسرعته هي سرعة الجسيمات المشتركة.

لنلاحظ الآن أن التوقف في النشر (1.6) عند حد ما، $p$ لا على التعيين، يعني إهمال $\nabla^2 S_p$ (حيث $\hbar$ مرفوعة إلى القوة $p+1$) أمام الحدود الأخرى، أي إهمال $-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S$ أمام $\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} S\right)^2$ في (1.4)

$$\left|i\hbar \nabla^2 S\right| << \left|\left(\vec{\nabla} S\right)^2\right| \qquad (1.8)$$

لكن $\vec{\nabla} S = \vec{P}$ و $\nabla^2 S = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} S = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ بحيث تأخذ هذه العلاقة الشكل

$$\left|\hbar \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right| << P^2 \qquad (1.9)$$

لنحسب هذا المقدار في حالة بعد واحد $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{dP}{dx}$ ولنبدل $P$ بـ $\frac{\hbar}{\lambda\!\!\!^{-}}$ حيث $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi}$ طول الموجة، موجة دوبروي، المرتبطة بالجسيم. نجد

$$\left|\hbar\cdot\frac{dP}{dx}\right| = \left|\frac{\hbar^2}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx}\right| << \frac{\hbar^2}{\lambda^2}$$

أو

**قضية 1:**

إن الشرط اللازم والكافي لتحقيق التقريب شبه التقليدي هو

$$\left|\frac{d\lambda}{dx}\right| << 1 \qquad (1.9)'$$

وبشكل آخر

$$\left|\lambda\frac{d\lambda}{dx}\right| << \lambda$$

يجب إذاً ألا يتغير طول الموجة إلا بمقدار ضئيل جداً على مسافات من رتبة هذا الطول؛ يجب أن تكون باقة الأمواج محصورة في حيز ضيق بما فيه الكفاية كي نستطيع تشبيه حركتها بحركة سائل من الجسيمات التقليدية غير المتفاعلة. تعبر مبرهنة إرنفست عن هذه الضرورة عندما نكتب

$$m\langle\vec{a}_r\rangle = -\langle\nabla U\rangle = \langle\vec{F}\rangle = \int\bar{\psi}(\vec{r})\vec{F}(\vec{r})\psi(\vec{r})d\vec{r}$$

يساوي الطرف الأخير على وجه التقريب $\vec{F}$ إذا ما تناهت $\psi(\vec{r})$ بسرعة نحو الصفر عندما نبتعد عن مجال ضيق محيط بالوضع $\vec{r}$، والحركة أقرب ما تكون عندئذ إلى حركة تقليدية :

$$m\langle\vec{a}_r\rangle = \vec{F}$$

ويتحقق ذلك عندما تكون القوة دالة خطية بـ $r$ – الهزاز التوافقي –، $\langle F\rangle = F\langle r\rangle$. كما يتحقق بطبيعة الحال عندما يكون الجسيم حراً. لنلاحظ أخيراً أن $(1.9)'$ : $\left|\frac{dx}{d\lambda}\right| >> 1$ تعبر عن كبر مشتق الطور $\frac{2\pi x}{\lambda}$ من أجل مسافات من رتبة طول الموجة وهو الشرط الذي يتيح الانتقال من الضوء الموجي (الفيزيائي) إلى الضوء الهندسي النيوتوني.

## 3.1- التقريب شبه التقليدي ببعد واحد

ليكن لدينا حل مستقر لمعادلة شرودينغر ببعد واحد. نكتب $\psi(x,t)$ على شكل جداء دالتين إحداهما تابعة لـ $t$ والأخرى لـ $x$ على الشكل (5.7-1)

$$|\psi(x,t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(x)$$

هذا يعني أننا نكتب الفعل على الشكل

$$S = -Et + \sigma \qquad (1.10)$$

$$\left|\hbar \cdot \frac{dP}{dx}\right| = \left|\frac{\hbar^2}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx}\right| << \frac{\hbar^2}{\lambda^2}$$

أو

**قضية 1:**

إن الشرط اللازم والكافي لتحقيق التقريب شبه التقليدي هو

$$\left|\frac{d\lambda}{dx}\right| << 1 \qquad (1.9)'$$

وبشكل آخر

$$\left|\lambda\frac{d\lambda}{dx}\right| << \lambda$$

يجب إذاً ألا يتغير طول الموجة إلا بمقدار ضئيل جداً على مسافات من رتبة هذا الطول؛ يجب أن تكون باقة الأمواج محصورة في حيز ضيق بما فيه الكفاية كي نستطيع تشبيه حركتها بحركة سائل من الجسيمات التقليدية غير المتفاعلة. تعبر مبرهنة إرنفست عن هذه الضرورة عندما نكتب

$$m\langle \vec{a}_r \rangle = -\langle \nabla U \rangle = \langle \vec{F} \rangle = \int \overline{\psi}(\vec{r})\vec{F}(\vec{r})\psi(\vec{r})d\vec{r}$$

يساوي الطرف الأخير على وجه التقريب $\vec{F}$ إذا ما تناهت $\psi(\vec{r})$ بسرعة نحو الصفر عندما نبتعد عن مجال ضيق محيط بالوضع $\vec{r}$، والحركة أقرب ما تكون عندئذ إلى حركة تقليدية :

$$m\langle \vec{a}_r \rangle = \vec{F}$$

ويتحقق ذلك عندما تكون القوة دالة خطية بـ $r$ – الهزاز التوافقي –، $\langle F \rangle = F\langle r \rangle$. كما يتحقق بطبيعة الحال عندما يكون الجسيم حراً. لنلاحظ أخيراً أن $(1.9)'$ : $\left|\frac{dx}{d\lambda}\right| >> 1$ تعبر عن كبر مشتق الطور $\frac{2\pi x}{\lambda}$ من أجل مسافات من رتبة طول الموجة وهو الشرط الذي يتيح الانتقال من الضوء الموجي (الفيزيائي) إلى الضوء الهندسي النيوتوني.

## 3.1- التقريب شبه التقليدي ببعد واحد

ليكن لدينا حل مستقر لمعادلة شرودينغر ببعد واحد. نكتب $\psi(x,t)$ على شكل جداء دالتين إحداهما تابعة لـ $t$ والأخرى لـ $x$ على الشكل (1.(5.7)

$$|\psi(x,t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(x)$$

هذا يعني أننا نكتب الفعل على الشكل

$$S = -Et + \sigma \qquad (1.10)$$

و $\varphi(x)$ على الشكل

$$\varphi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\sigma} \tag{1.11}$$

حيث

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1 + ...$$

تأخذ المعادلة $(1.6)_0$، معادلة التقريب التقليدي الشكل

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{d\sigma_0}{dx}\right)^2 + U(x)$$

الذي يسهل مكاملته

$$\sigma_0 = \pm\int\left[2m(E-U)\right]^{1/2} dx = \pm\int p dx \tag{1.12}$$

ليعطينا الفعل التقليدي في الصيغة الهاميلتونية (ببعد واحد)

$$-Et + \sigma_0 = S_0 = \int p dx - Ht$$

لدينا من أجل التقريب شبه التقليدي $(1.6)_1$

$$0 = \frac{1}{m}\frac{d\sigma_0}{dx}\frac{d\sigma_1}{dx} + \frac{1}{2m}\frac{d^2\sigma_0}{dx^2} \tag{1.13}$$

أي، بتبديل $\frac{d^2\sigma_0}{dx^2}$ بـ $p'$، مشتق $p$ بالنسبة لـ $x$ :

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{p'}{p} = -\frac{1}{2}\frac{dLnp}{dx}$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}Lnp \tag{1.14}$$

(حيث أهملنا ثابتة التكامل).

ومنه $e^{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{p}}$ وبالتالي نظراً لـ (1.12)

$$\varphi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1)} = \frac{c_1}{\sqrt{p}}e^{\frac{i}{\hbar}\int p dx} + \frac{c_2}{\sqrt{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\int p dx} \tag{1.15}$$

يتفق وجود $\frac{1}{\sqrt{p}}$ مع حركة كثافة الاحتمال على المسارات التقليدية، أي مع التدفق $|J| = 1$ والتنظيم $\frac{1}{\sqrt{v}}$ لمتجهة الحالة الذي وجدناه في (2.§1.4).

يصبح الاندفاع (1.12) تخيلياً بحتاً في المناطق المحظورة من وجهة النظر التقليدية $\frac{p^2}{2m} = E - U < 0$

ويصبح الحل فيها على الشكل

$$\varphi(x) = \frac{c_1}{\sqrt{|p|}}e^{-\frac{1}{\hbar}\int|p|dx} + \frac{c_2}{\sqrt{|p|}}e^{\frac{1}{\hbar}\int|p|dx} \tag{1.16}$$

## 4.1- صيغة الوصل في النقاط الحدودية Connection formula

لتكن a نقطة ارتداد تفصل بين منطقتين تأخذ الطاقة الكامنة فيهما قيماً أكبر أو أصغر من الطاقة الكلية. لنفرض أن $U > E$ من أجل $x > a$ وبالتالي فالمنطقة محظورة على الجسيمات التقليدية ولكن احتمال وجود الجسيم في نقطة ما x من هذه المنطقة لا يساوي الصفر كما نعلم ويقابل الحل الأسي المتناقص في (1.16)

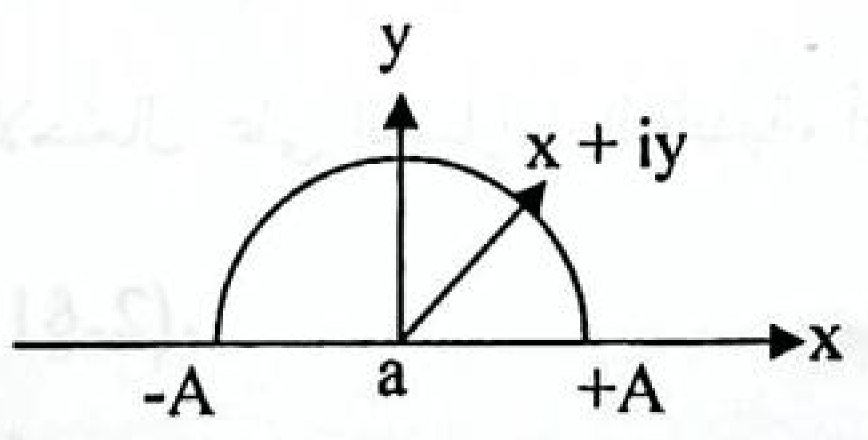
$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^x |p| dx} \qquad x > a \qquad (1.17)$$

أما على يسار a، $x < a$، فالحل هو (1.15) وحدا التكامل فيه هما a و x

$$\varphi(x) = \frac{c_1}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^x p dx} + \frac{c_2}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p dx} \qquad x < a \qquad (1.18)$$

ليس لهذين الحلين معنى في النقطة a التي ينعدم فيها الاندفاع، وتتحول الموجة في (1.18) من واردة إلى منعكسة، أو يصبح تخيلياً بحتاً.

رأينا في الفصل الثاني كيفية حل معادلة شرودينغر عندما يحدث انقطاع في الكمون وعندما يكون الكمون على شكل حاجز نعرف فيه حل المعادلة على يمين ويسار نقطة الانقطاع a ونتطلب اتصال الحلين وكذا اتصال مشتقيهما في هذه النقطة مما يتيح لنا تحديد الثوابت. إلا أن الكمون متصل في النقطة a ولا نتوفر إلا في بعض الحالات الاستثنائية على حل معادلة شرودينغر في هذه النقطة ومقارنته بالحلين (1.17) و (1.18) لتعيين الثوابت. ولذا سنلجأ إلى طريقة لا تشترط على الكمون إلا اتصاله في النقطة a، نتجنب فيها هذه النقطة بالدوران حولها في فضاء المتغيرات العقدية $z = x + iy$، وتعرف باسم الالتفاف. نأخذ في نصف المستوى العقدي العلوي $y > 0$ نصف دائرة مركزها a تقطع المستقيم الحقيقي في النقطتين ±A، الشكل.1.




الشكل.1

ننتقل من النقطة A إلى النقطة A- بالدوران حول النقطة a على نصف قطر الدائرة من اليمين إلى اليسار، من المنطقة المحظورة تقليدياً إلى المنقطة المسموح بها ولننظر إلى الحلين (1.17) و (1.18)

بالمتغير العقدي $z = x + iy$ عندما تتناهى طويلة العدد العقدي $p$ إلى اللانهاية. إن الحل الأسي المتناقص في (1.17) هو الحل الذي يقابل القيمة المطلقة للتكامل $\int_a^x |p| dx$ فهو إذاً

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p dx\right|} \qquad x > a \qquad (1.17)'$$

ويبرهن أن هذا الحل يتناهى عند إتمام الانتقال إلى الحد الثاني في (1.18) الذي يعبر عن الموجة الواردة $\frac{c_2}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^a}$ وهو أمر طبيعي لأنها الموجة التي اجتازت النقطة $a$ آتية من اليسار وأنتجت الحل المتناقص $(1.17)'$.

يعني تناهي $(1.17)'$ إلى الحد الثاني في (1.18) عندما تكون النقطة $x$ "بعيدة" عن $a$ تساوي المقدارين $\frac{c}{\sqrt{|p|}}$ و $\frac{c_2}{\sqrt{p}}$ ولكن $p$ في $(1.17)'$ تخيلية بحتة أي أن $p = i|p| = e^{i\frac{\pi}{2}}|p|$ ومنه

$$c|p|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} = c_2 |p|^{-\frac{1}{2}} \qquad (1.19)_2$$

أما عندما ننتقل من $A$ إلى $-A$ في نصف المستوى السفلي، بالدوران من اليمين إلى اليسار كذلك ويتناهى $(1.17)'$ إلى الحد الأول في (1.18) فإن $p$ التخيلية البحتة هي $p = -i|p| = e^{-i\frac{\pi}{2}}|p|$ ومنه

$$c|p|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} = c_1 |p|^{-\frac{1}{2}} \qquad (1.19)_1$$

وهكذا فالحل على يسار $a$ "بعيداً" عن $a$ هو

$$= \frac{c}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^x pdx + \frac{i\pi}{4}} + \frac{c}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_a^x pdx - \frac{i\pi}{4}} \qquad (1.18)'$$

نكتبه على الشكل

$$\frac{2c}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x pdx + \frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{2c}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x pdx\right| - \frac{\pi}{4}\right) \qquad x < a \qquad (1.18)''$$

ذلك أن $\int_a^x pdx$ سالب وكتابة الحل على هذا الشكل الأخير يجعله مستقلاً عن وضع المنطقة المحظورة، على يمين أو يسار النقطة $a$.

لنلاحظ أولاً أنه عندما تكون المنطقة المسموح بها تقليدياً محدودة بحاجز كمون لامنته في $a$ $(U = \infty)$ فإن $\varphi(a) = 0$. ينعدم الحل $(1.17)'$ ويبقى الحل $(1.18)'$ مقبولاً شريطة أن يساوي الصفر في النقطة $a$ ولما كانت متجهات الحالة معرفة مقاس طور $\varphi \sim e^{i\alpha}\varphi$ فإن ضرب $(1.18)'$ بـ $e^{-\frac{i\pi}{4}}$ يفي بالغرض ويأخذ الحل الشكل

$$\varphi(x) = \frac{2c}{\sqrt{p}} \sin\frac{1}{\hbar}\int_a^x pdx \qquad (1.18)'''$$

لنلاحظ أيضاً أنه في حال وقوع المنطقة المسموح بها تقليدياً على يمين نقطة الارتداد $b$، حيث $E > U(x)$ فإننا نأخذ طريق السير في نصف المستوي العقدي العلوي من اليسار إلى اليمين من $-B$

بالمتغير العقدي $z = x + iy$ عندما تتناهى طويلة العدد العقدي $p$ إلى اللانهاية. إن الحل الأسي المتناقص في (1.17) هو الحل الذي يقابل القيمة المطلقة للتكامل $\int_a^x |p| dx$ فهو إذاً

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p dx\right|} \qquad x > a \qquad (1.17)'$$

ويبرهن أن هذا الحل يتناهى عند إتمام الانتقال إلى الحد الثاني في (1.18) الذي يعبر عن الموجة الواردة $\frac{c_2}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^a}$ وهو أمر طبيعي لأنها الموجة التي اجتازت النقطة $a$ آتية من اليسار وأنتجت الحل المتناقص $(1.17)'$.

يعني تناهي $(1.17)'$ إلى الحد الثاني في (1.18) عندما تكون النقطة $x$ "بعيدة" عن $a$ تساوي المقدارين $\frac{c}{\sqrt{|p|}}$ و $\frac{c_2}{\sqrt{p}}$ ولكن $p$ في $(1.17)'$ تخيلية بحتة أي أن $p = i|p| = e^{i\frac{\pi}{2}}|p|$ ومنه

$$c|p|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} = c_2 |p|^{-\frac{1}{2}} \qquad (1.19)_2$$

أما عندما ننتقل من $A$ إلى $-A$ في نصف المستوى السفلي، بالدوران من اليمين إلى اليسار كذلك ويتناهى $(1.17)'$ إلى الحد الأول في (1.18) فإن $p$ التخيلية البحتة هي $p = -i|p| = e^{-i\frac{\pi}{2}}|p|$ ومنه

$$c|p|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} = c_1 |p|^{-\frac{1}{2}} \qquad (1.19)_1$$

وهكذا فالحل على يسار $a$ "بعيداً" عن $a$ هو

$$= \frac{c}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^x p dx + \frac{i\pi}{4}} + \frac{c}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p dx - \frac{i\pi}{4}} \qquad (1.18)'$$

نكتبه على الشكل

$$\frac{2c}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{2c}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p dx\right| - \frac{\pi}{4}\right) \qquad x < a \qquad (1.18)''$$

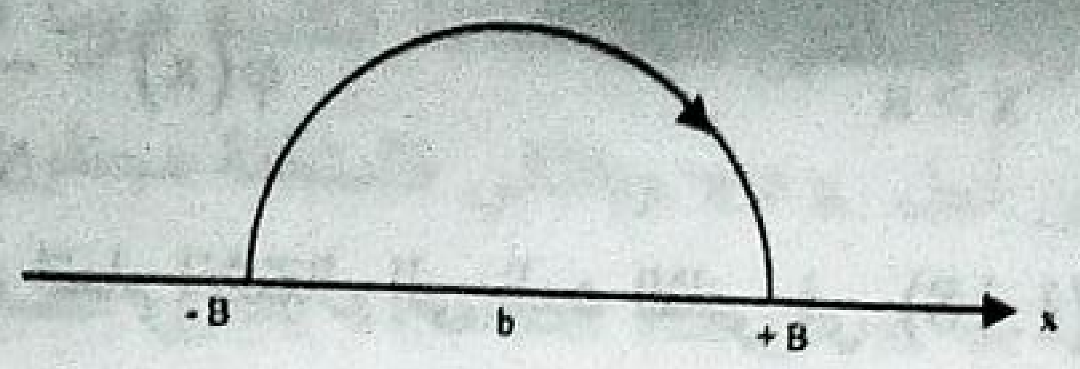
ذلك أن $\int_a^x p dx$ سالب وكتابة الحل على هذا الشكل الأخير يجعله مستقلاً عن وضع المنطقة المحظورة، على يمين أو يسار النقطة $a$.

لنلاحظ أولاً أنه عندما تكون المنطقة المسموح بها تقليدياً محدودة بحاجز كمون لامنته في $a$ $(U = \infty)$ فإن $\varphi(a) = 0$. ينعدم الحل $(1.17)'$ ويبقى الحل $(1.18)'$ مقبولاً شريطة أن يساوي الصفر في النقطة $a$ ولما كانت متجهات الحالة معرفة مقاس طور $\varphi \sim e^{i\alpha}\varphi$ فإن ضرب $(1.18)'$ بـ $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ يفي بالغرض ويأخذ الحل الشكل

$$\varphi(x) = \frac{2c}{\sqrt{p}} \sin\frac{1}{\hbar}\int_a^x p dx \qquad (1.18)'''$$

لنلاحظ أيضاً أنه في حال وقوع المنطقة المسموح بها تقليدياً على يمين نقطة الارتداد $b$، حيث $E > U(x)$ فإننا نأخذ طريق السير في نصف المستوي العقدي العلوي من اليسار إلى اليمين من $-B$

إلى B حول مركز الدائرة b، الشكل.2، لا يتغير شيء في المحاكمة السابقة سوى قلب حدي التكامل من $\int_a^x$ إلى $\int_x^b$




الشكل.2

ونحصل من أجل $x > b$ على الحل المقابل لـ "(1.18)

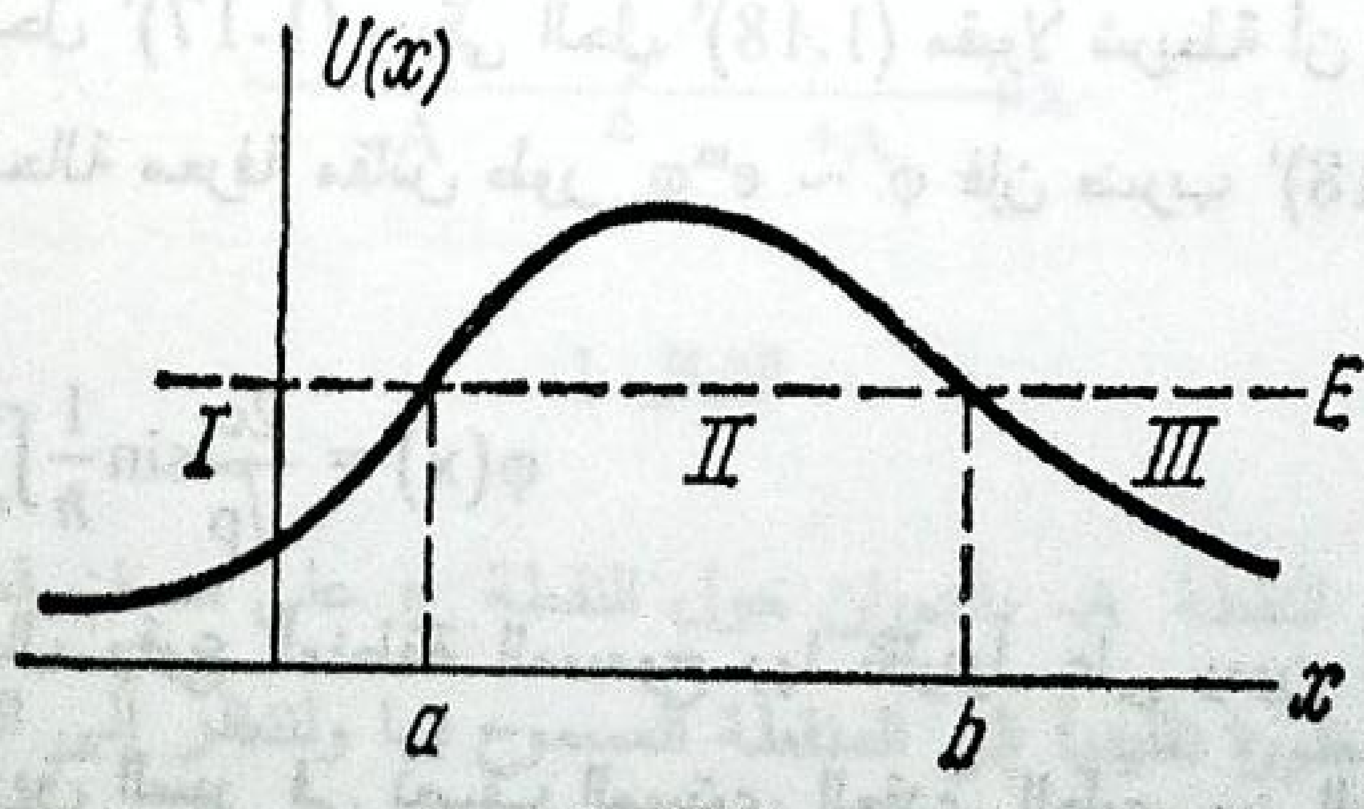
$$\varphi(x) = \frac{2c}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p\,dx + \frac{\pi}{4}\right) \qquad x > b \qquad (1.20)$$

يلخص المخطط التالي تعابير الأمواج الواردة والمنعكسة في a و b.

| a | | b |
|---|---|---|
| $e^{-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p(x)dx - \frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^a p(x)dx - \frac{i\pi}{4}}$ → | ⋮ | ← $e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^b p\,dx - \frac{i\pi}{4}}$ |
| $e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dx + \frac{i\pi}{4}}$ ← | ⋮ | → $e^{\frac{i}{\hbar}\int_b^x p\,dx + \frac{i\pi}{4}}$ |

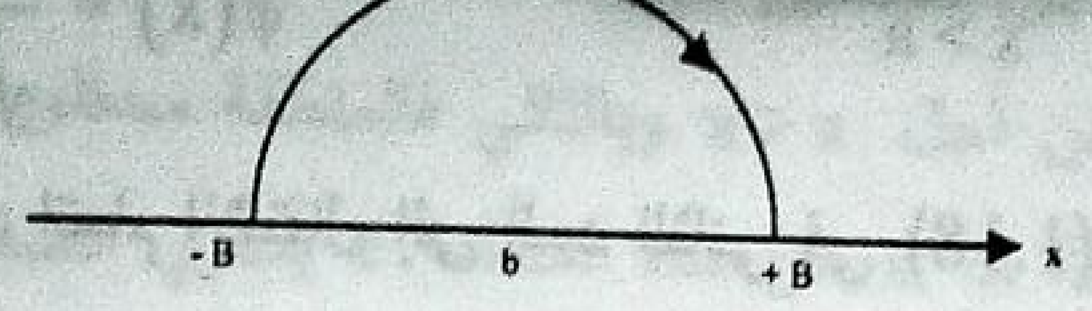
## 5.1– اختراق هضبة كمون

نريد في هذه الفقرة حساب احتمال اجتياز هضبة كمون من الشكل.3 من قبل جسيمات آتية من المنطقة I إلى المنطقة II، حيث $U > E$، المحظورة على الجسيمات التقليدية واجتياز الهضبة إلى المنطقة III، المسموح بها تقليدياً وذلك في التقريب شبه التقليدي. ولننظر في البدء إلى الشروط التي يلزم أن يحققها الكمون لكي يكون التقريب صالحاً.




الشكل.3

إلى B حول مركز الدائرة b، الشكل.2، لا يتغير شيء في المحاكمة السابقة سوى قلب حدي التكامل من $\int_a^x$ إلى $\int_x^b$




الشكل.2

ونحصل من أجل $x > b$ على الحل المقابل لـ "(1.18)

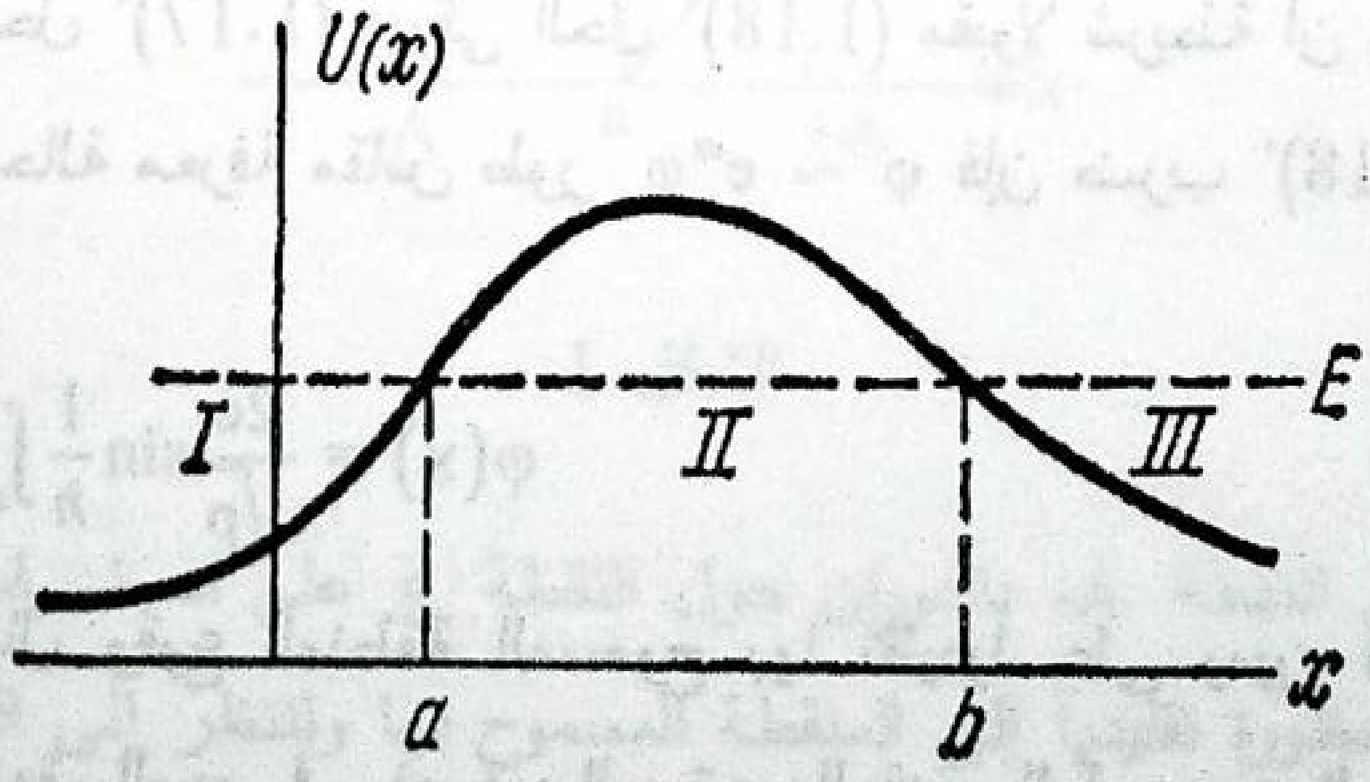
$$\varphi(x) = \frac{2c}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) \qquad x > b \qquad (1.20)$$

يلخص المخطط التالي تعابير الأمواج الواردة والمنعكسة في a و b.

| | |
|---|---|
| $e^{-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p(x)dx - \frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^a p(x)dx - \frac{i\pi}{4}}$ → | ← $e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^b pdx - \frac{i\pi}{4}}$ |
| $e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^x pdx + \frac{i\pi}{4}}$ ← | → $e^{\frac{i}{\hbar}\int_b^x pdx + \frac{i\pi}{4}}$ |
| a | b |

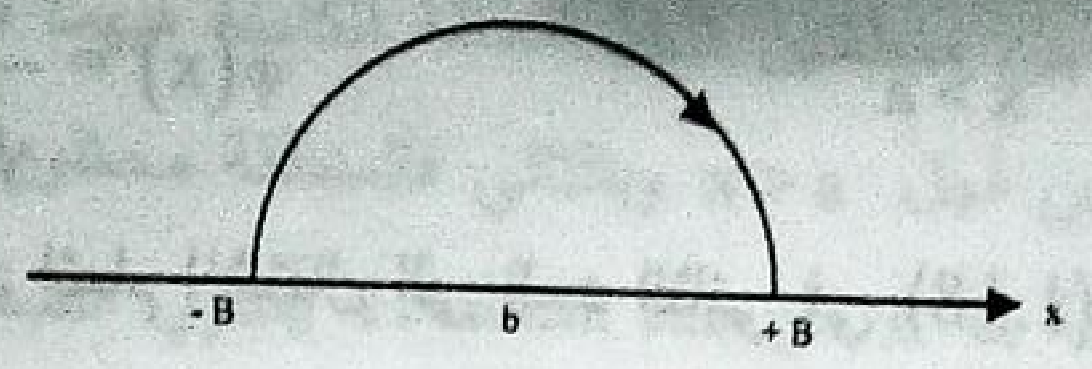
## 5.1– اختراق هضبة كمون

نريد في هذه الفقرة حساب احتمال اجتياز هضبة كمون من الشكل.3 من قبل جسيمات آتية من المنطقة I إلى المنطقة II، حيث $U > E$، المحظورة على الجسيمات التقليدية واجتياز الهضبة إلى المنطقة III، المسموح بها تقليدياً وذلك في التقريب شبه التقليدي. ولننظر في البدء إلى الشروط التي يلزم أن يحققها الكمون لكي يكون التقريب صالحاً.




الشكل.3

إلى B حول مركز الدائرة b، الشكل.2، لا يتغير شيء في المحاكمة السابقة سوى قلب حدي التكامل من $\int_a^x$ إلى $\int_x^b$




الشكل.2

ونحصل من أجل $x > b$ على الحل المقابل لـ "(1.18)

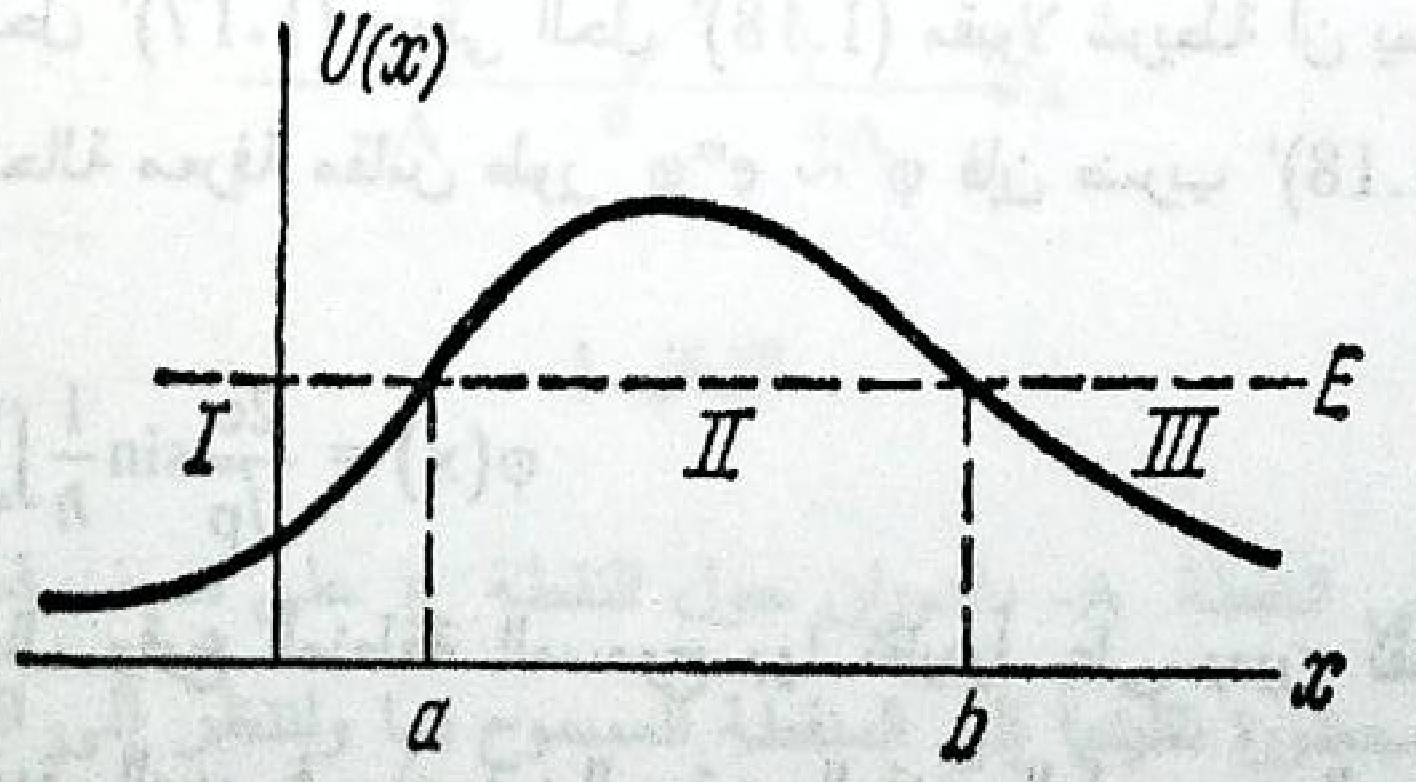
$$\varphi(x) = \frac{2c}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) \qquad x > b \qquad (1.20)$$

يلخص المخطط التالي تعابير الأمواج الواردة والمنعكسة في a و b.

| a | b |
|---|---|
| $e^{-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p(x)dx - \frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^a p(x)dx - \frac{i\pi}{4}}$ $\rightarrow$ | $e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^b pdx - \frac{i\pi}{4}}$ $\leftarrow$ |
| $e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^x pdx + \frac{i\pi}{4}}$ $\leftarrow$ | $e^{\frac{i}{\hbar}\int_b^x pdx + \frac{i\pi}{4}}$ $\rightarrow$ |

## 5.1– اختراق هضبة كمون

نريد في هذه الفقرة حساب احتمال اجتياز هضبة كمون من الشكل.3 من قبل جسيمات آتية من المنطقة I إلى المنطقة II، حيث $U > E$، المحظورة على الجسيمات التقليدية واجتياز الهضبة إلى المنطقة III، المسموح بها تقليدياً وذلك في التقريب شبه التقليدي. ولننظر في البدء إلى الشروط التي يلزم أن يحققها الكمون لكي يكون التقريب صالحاً.




الشكل.3

لنكتب بدليل $\frac{dU}{dx}$ الشرط (1.9) ببعد واحد $\bar{\nabla} \cdot \bar{p} = \frac{dp}{dx}$. لدينا

$$0 = dE = \frac{p}{m}\frac{dp}{dx} + \frac{dU}{dx}$$

ومنه

**قضية 2 :**

إن الشرط اللازم والكافي لتحقيق التقريب شبه التقليدي هو

$$\left|\frac{\hbar}{p^2}\frac{dp}{dx}\right| = \left|\frac{\hbar m}{p^3}\frac{dU}{dx}\right| << 1 \qquad (1.9)''$$

يلزم إذاً أن يتغير الكمون ببطء. أن تكون القوى المطبقة – مشتق الكمون الصغير – ضعيفةً. يجب إذاً أن تكون المنطقة II واسعة بما فيه الكفاية من جهة وأن نأخذ بعين الاعتبار ضرورة حصر باقة الموجة في حيز ضيق من جهة أخرى. تقتضي "(1.9) أن يكون الاندفاع صغيراً وأن يكون ثابتاً تقريباً نظراً للتغير البطيء للكمون. وهو يساوي الصفر في نقطتي الارتداد a و b حيث $U = E$ و $\lambda = \infty$ ولذا فإن التقريب في حال صلاحه لا يطبق إلا في النقاط البعيدة عن a و b.[1]

لنفترض على سبيل المثال أن عرض حاجز الكمون هو $A = [a, b]$. يجب إذاً أن تكون $\lambda << A$ وبالتالي $p >> \frac{\hbar}{A}$ و $E >> \frac{\hbar^2}{2mA^2}$. تتحقق هذه العلاقة من أجل جسيمات α $(m = 6,7.10^{-27}kg)$ طاقتها 1MEV تجتاز طبقة ذرية سمكها $A = 1.10^{-10}m$ ؛ ولكنها غير محققة إذا كانت طاقة الجسيمات أكبر بعشر مرات (10MEV) وتصطدم بنواة، أبعادها – أبعاد هضبة الكمون – $A = 10^{-15}m$.

لنحسب عامل انتقال جسيم آت من $-\infty$ – في المنطقة I، موجة واردة فقط نكتبها على الشكل

$$\varphi_I = \frac{c_I}{\sqrt{p}}e^{\frac{i}{\hbar}px} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{p}}e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

حيث عينا الثابتة بتنظيم الموجة الواردة لجسيم واحد في التدفق $\rho\bar{V}$ :

$$1 = V|\psi|^2 = \frac{Vc_I^2}{p}$$

---

[1] هذا يعني في حال صلاح هذا التقريب – الذي يعرف باسم التقريب WKB لمبتكريه Brillouin ،Kramers ،Wentzel – في النقاط البعيدة عن a و b أننا لن نحتاج لحل معادلة شرودينغر إلا في الجوار المباشر لنقطة الارتداد. ولكن هذا الحل مستحيل إلا في بعض الحالات الخاصة : عندما نعتبر تغيرات U خطية في هذا الجوار ونكتب $U - E = c(x - a)$ بحيث تأخذ معادلة شرودينغر الشكل

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + c(x - a)\varphi(x) = 0$$

وهي معادلة صعبة الحل، يستعان عادة لحلها بدالات بسل من الرتبة $\frac{1}{3}$ ويستعمل الحل لتحديد الثوابت بعيداً عن نقطة الارتداد. انظر كتاب لاندو–ليفشيتس آنف الذكر الفقرة 24، 47 والملحق b.

لنلاحظ أن التابع الأسي المتزايد هو وحده الذي يستطيع الوصول إلى النقطة b واجتيازها ليأخذ شكل موجة مثلثاتية، فهو إذاً من الشكل $e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^b |p|dx}$. هذا يعني أن الحل المقابل للموجة الصادرة عن b : هو $e^{\frac{i}{\hbar}\int_b^x pdx + \frac{i\pi}{4}}$. أي أن

$$\frac{c'}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar}\left|\int_b^x pdx\right|} \rightarrow \frac{c'}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_b^x pdx + \frac{i\pi}{4}} \quad (1.21)$$

لنلاحظ أن $\frac{i\pi}{4}$ في الدالة الأسية في الطرف الثاني ناتجة كما في (1.19)$_2$ عن الدوران من اليمين نحو اليسار في نصف المستوي العلوي، في اتجاه مخالف لما هو عليه الحال في الشكل.2.

إن عامل متجهة الحالة في المجال [a, x] هو $\frac{c}{\sqrt{|p|}}$ ولدينا متجهة الحالة (1.16)

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^x |p|dx} = \frac{c}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b |p|dx + \frac{1}{\hbar}\left|\int_b^x pdx\right|}$$

أي أن

$$c' = c\, e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b |p|dx} \quad (1.22)$$

ولكن c لا تختلف عن $c_1$ إلا بطور $\pm\frac{i\pi}{4}$ لا يعنينا هنا أي أن

$$c' = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b |p|dx}$$

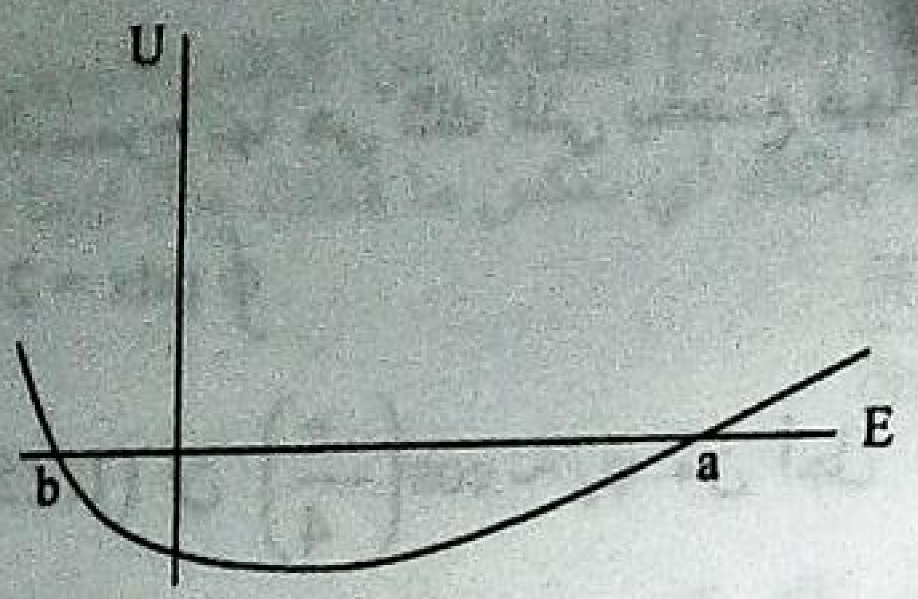
ومنه عامل الانتقال – كثافة تيار الموجة الصادرة في النقطة b من أجل موجة واردة : جسيم واحد في وحدة التيار

$$|c'|^2 = e^{\frac{-2}{\hbar}\int_a^b |p|dx} \quad (1.23)$$

## 6.1– تكميم بور–سومرفلد Bohr-Sommerfeld

ليكن لدينا بئر كمون عوضاً عن هضبة الكمون السابقة. إن مستويات الطاقة منفصلة في البئر يحددها عدد كمومي n يعبر كما رأينا في الفصول السابقة عن عدد عقد متجهة الحالة – عن عدد أنصاف موجة دوبروي – بين حائطي البئر. وهكذا فإن طول الموجة يتناقص كلما ازداد n، كلما اقتربنا من الطيف المتصل.

ونريد هنا وضع قواعد التكميم التي اقترحها بور وعممها سومرفلد قبل صياغة النظرية الكمومية في إطار التقريب شبه التقليدي. لتكن b و a نقطتي الارتداد عن حائط البئر، الشكل.4.




الشكل.4

إن الحل علي يمين النقطة b حيث U < E هو "(1.18)

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (1.24)$$

لم نحتج لوضع القيمة المطلقة لأن التكامل موجب في هذه الحالة. ولدينا ذات الحل على يسار النقطة a

$$\varphi = \frac{c'}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^a p dx - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (1.24)'$$

يجب أن يتساوى الحلان من أجل أي نقطة x واقعة بين b و a وبما أن $\int_b^x + \int_x^a = \int_b^a$ فإن

$$\int_x^a p dx - \frac{\pi}{4} = -\left(\int_b^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) + \int_b^a p dx - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

أي

$$c\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) = c'\cos\left(-\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\hbar}\int_b^a p dx - \frac{\pi}{2}\right)$$

ومنه

$$\frac{1}{\hbar}\int_b^a p dx - \frac{\pi}{2} = n\pi$$

و

$$c = c'(-1)^n$$

أو

$$\frac{1}{\hbar}\int_b^a p dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (1.25)$$

ولكن

$$\int_b^a = \frac{1}{2}\oint$$

حيث تشير $\oint$ إلى منحن مغلق بين b و a في المستوي (x, p).

ومنه قاعدة التكميم

**قضية 3 :**

إن المدارات الإلكترونية الوحيدة المسموح بها هي تلك التي يخضع فيها المدار إلى القاعدة التالية

$$\oint p dx = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (1.26)$$

نرى من العلاقتين (1.24) و (1.25) أن $\varphi_n \sim \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ من أجل $x = b$ و $\varphi_n \sim \cos\left(\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi\right)$ من أجل $x = a$ وتنعدم بالتالي n مرة – n عقدة – في المجال $[b, a]$.

ننظم متجهة الحالة ونكامل في المجال $[b, a]$ فقط لأن متجهة الحالة أسية متناقصة بسرعة خارج هذا المجال. ثم إن الدالة المثلثاتية $\cos^2$ تنعدم عدداً كبيراً من المرات بحيث يمكن أخذ التكامل مساوياً للقيمة الوسطية $\frac{1}{2}$ ومنه، انطلاقاً من (1.24)

$$1 = \int|\varphi|^2 dx = \frac{c^2}{2}\int_b^a \frac{1}{p} dx = \frac{c^2 T}{2 \cdot 2m} = \frac{\pi c^2}{2m\omega}$$

حيث الدورة $T = 2\int_a^b \frac{dx}{V}$ والسرعة الزاوية في الحركة التقليدية الدورية هي $\omega = \frac{2\pi}{T}$. وهكذا فإن $\varphi$ المنظمة للواحد هي

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi V}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (1.27)$$

لأن

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi V}} = \frac{c}{\sqrt{p}}$$

**ملاحظات :**

1– تتفق قاعدة التكميم (1.26) مع فرضية بلانك التي نستعيدها بأن نرمز بـ $\Delta E$ إلى فرق الطاقة بين مستويين متجاورين يحددهما العددان الكوميان n و $n + 1$. نكتب عندما يكون n كبيراً و $dn = 1$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \lim \frac{E_{n+1} - E_n}{\Delta n} = \Delta E \quad (1.28)$$

لدينا من (1.26)

$$\frac{\partial}{\partial n}\oint p dx = \oint \frac{\partial p}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial n} dn dx = 2\pi\hbar$$

ونظراً لأن $\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{V}$ فإن

$$\Delta E \oint \frac{dx}{V} = 2\pi\hbar$$

أو

$$\Delta E T = 2\pi\hbar$$

و

$$\Delta E = \hbar\omega$$

إن $\omega$ تابعة للطاقة ولكننا نعتبرها ثابتة من أجل الطاقات المتجاورة.

حصل بور وسومرفلد على العلاقة (1.26) انطلاقاً من الواقع التجريبي لذرة الهدروجين حيث طاقات طيف هذه الذرة مكممة ومن فرضية بلانك أي بعكس ما فعلناه هنا. لدينا من (1.28)

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \Delta E = \hbar\omega$$

ومنه

$$\int_{E_{min}}^{E} \frac{dE}{\omega} = \hbar\int_{1}^{n} dn = \hbar n$$

وبالعودة إلى معادلات هاميلتون التقليدية نجد أن الطرف الأيسر ليس سوى

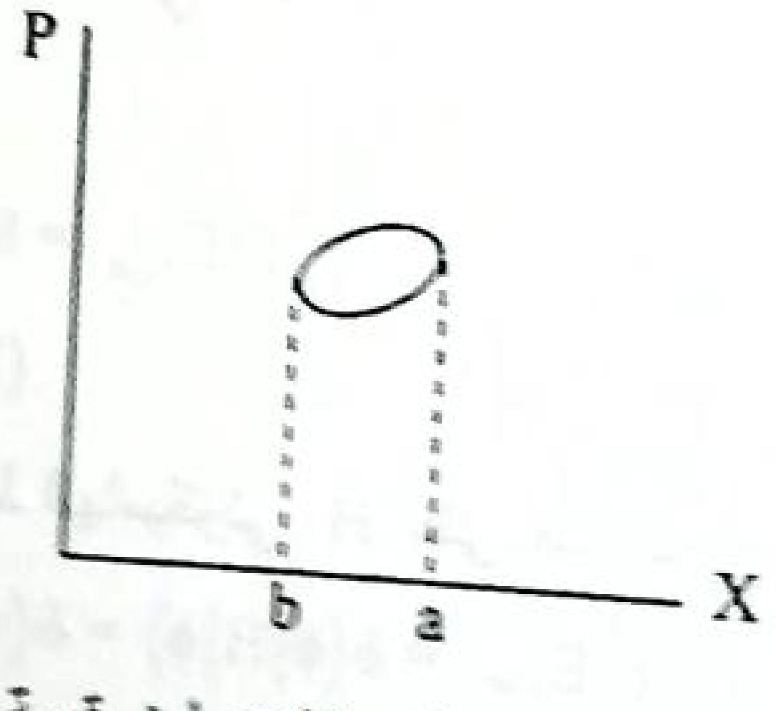
$$\frac{1}{2\pi}\oint p dx$$

أي قاعدة التكميم (1.26) بدون وجود الحد $\frac{1}{2}$ المضاف إلى n.

وهكذا فإن النظرية الكمومية القديمة تقبل مفهوم المسار ولكنها لا تقبل إلا المسارات الدورية الخاضعة للتكميم (1.26). ويمكن تطبيق هذا التكميم على مختلف العزوم المترافقة للحصول على قيم العزم الزاوي وقيم مسقطه على محور معين.

2- يقابل التكامل على "المدار" $\oint$ دورة كاملة للحركة التقليدية الدورية في فضاء الطور (x, p) ويمكننا تصور هذا المنحني المغلق الصغير على شكل مستطيل نرمز له بـ $\Delta P\Delta X$، نهمل $\frac{1}{2}$ أمام n الكبيرة ونكتب

$$\frac{\Delta P\Delta X}{2\pi\hbar} = n \qquad (1.29)$$




يمثل العدد الكمومي n عدد الحالات الكمومية التي لا تتجاوز قيمة طاقتها القيمة التي يعينها المدار في فضاء الطور بحيث يمكننا التعبير عن العلاقة (1.29) بالقول إن كل حالة كمومية تحتل حيزاً – خلية – في فضاء الطور هو $2\pi\hbar$. يصبح هذا الحيز مساوياً الصفر أي النقطة عندما ننتقل من هذا التقريب شبه التقليدي إلى الحالة التقليدية $(\hbar \to 0)$ وهذا ما رأيناه في الميكانيك التقليدي حيث مثلنا الجملة الميكانيكية المعرفة بـ s درجة حرية بنقطة في فضاء طور ذي 2s بعداً. ولذا نعمم العلاقة (1.29) إلى حالة حركة متعددة الدورية ذات s درجة حرية ونكتب عدد الحالات الكمومية N على الشكل

$$N = \frac{\Delta q^1 \ldots \Delta q^s \, \Delta p_1 \ldots \Delta p_s}{(2\pi\hbar)^s} \qquad (1.30)$$

إننا نقابل في الواقع كل درجة حرية بتكامل في فضاء الطور من الشكل

$$\oint p_i dq^i = 2\pi\hbar\left(n_i + \gamma_i\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, s$$

حيث $\gamma_i$ عدد من رتبة الواحد يتوقف على طبيعة الشروط على الحدود من أجل درجة الحرية $i$، شريطة أن تكون درجة الحرية هذه من النوع الاهتزازي أي أن يقابل كل قيمة لـ $q_i$ قيمتان للسرعة هما $\pm\dot{q}_i$. أما عندما تكون درجة الحرية من النوع الدوراني، أي عندما نستطيع جعل كل عزم $p_i$ تابعاً لـ $q_i$ وحده، فإن العدد الكمومي عدد صحيح والعدد الإضافي $\gamma_i = 0$ على ألا يدخل السببين في الموضوع.

تلعب العلاقة (1.30) دوراً هاماً في الفيزياء الإحصائية الكمومية كما سنرى.

## 2. طريقة التغيرات Variational Method

### 1.2– مبدأ الطريقة

رأينا في الفصل الأول كيفية اشتقاق معادلة شرودينغر، كغيرها من معادلات الفيزياء، من مبدأ فعل أصغر خاضع لقيود هي تنظيم متجهات الحالة للواحد. سنلجأ إلى هذه الطريقة للبحث عن حلول تقريبية بأن نقصر التفتيش عن الحلول على فضاء جزئي من الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H}$، نختاره لسهولة الحصول على الحد الأدنى للفعل فيه، أي لسهولة حل المعادلة الدالتية. نرمز لهذا الفضاء الجزئي بـ $\mathscr{H}'$ وبـ P للمسقط عليه. لتكن $|\psi\rangle$ متجهات الحالة في $\mathscr{H}$ و $P|\psi\rangle = |\phi\rangle$؛ وليكن H هاميلتوني النظمة. فعوضاً عن حل معادلة التغيرات في $\mathscr{H}$

$$\delta\langle E\rangle_{\mathscr{H}} = \delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0 \tag{2.1}$$

التي تعطينا

$$\left(H - E\right)|\psi\rangle = 0$$

نبحث عن حل في $\mathscr{H}'$ بدليل مسقط الهاميلتوني H على هذا الفضاء $H_P = PHP$

$$\delta\langle E\rangle_{\mathscr{H}'} = \delta\langle\phi|H|\phi\rangle = \delta\langle\psi|PHP|\psi\rangle = 0 \tag{2.2}$$
$$= \delta\langle\psi|H_P|\psi\rangle = 0$$

سنأخذ لتوضيح هذه الطريقة مثالين نعرف فيهما الحل المضبوط لمعادلة شرودينغر هما الهزاز التوافقي وذرة الهدروجين :

a– لنجرب في المثال الأول متجهات حالة من الفضاء الهيلبرتي العام تابعة لوسيط $\alpha$ صيغتها $P(x)e^{-x^2/2}$، حيث P كثير حدود، ولنبدأ بمتجهة حالة من الشكل

$$|\phi(x;\alpha)\rangle = Ae^{-\alpha x^2/2} \tag{2.3}$$

الدالتية (2.2) الشكل

إننا نقابل في الواقع كل درجة حرية بتكامل في فضاء الطور من الشكل

$$\oint p_i dq^i = 2\pi\hbar(n_i + \gamma_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, s$$

حيث $\gamma_i$ عدد من رتبة الواحد يتوقف على طبيعة الشروط على الحدود من أجل درجة الحرية $i$، شريطة أن تكون درجة الحرية هذه من النوع الاهتزازي أي أن يقابل كل قيمة لـ $q_i$ قيمتان للسرعة هما $\pm\dot{q}_i$. أما عندما تكون درجة الحرية من النوع الدوراني، أي عندما نستطيع جعل كل عزم $p_i$ تابعاً لـ $q_i$ وحده، فإن العدد الكمومي عدد صحيح والعدد الإضافي $\gamma_i = 0$ على ألا يدخل السبين في الموضوع.

تلعب العلاقة (1.30) دوراً هاماً في الفيزياء الإحصائية الكمومية كما سنرى.

## 2. طريقة التغيرات Variational Method

### 1.2– مبدأ الطريقة

رأينا في الفصل الأول كيفية اشتقاق معادلة شرودينغر، كغيرها من معادلات الفيزياء، من مبدأ فعل أصغر خاضع لقيود هي تنظيم متجهات الحالة للواحد. سنلجأ إلى هذه الطريقة للبحث عن حلول تقريبية بأن نقصر التفتيش عن الحلول على فضاء جزئي من الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H}$، نختاره لسهولة الحصول على الحد الأدنى للفعل فيه، أي لسهولة حل المعادلة الدالتية. نرمز لهذا الفضاء الجزئي بـ $\mathscr{H}'$ وبـ P للمسقط عليه. لتكن $|\psi\rangle$ متجهات الحالة في $\mathscr{H}$ و $|\phi\rangle = P|\psi\rangle$؛ وليكن H هاميلتوني النظمة. فعوضاً عن حل معادلة التغيرات في $\mathscr{H}$

$$\delta\langle E\rangle_{\mathscr{H}} = \delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0 \qquad (2.1)$$

التي تعطينا

$$(H - E)|\psi\rangle = 0$$

نبحث عن حل في $\mathscr{H}'$ بدليل مسقط الهاميلتوني H على هذا الفضاء $H_P = PHP$

$$\delta\langle E\rangle_{\mathscr{H}'} = \delta\langle\phi|H|\phi\rangle = \delta\langle\psi|PHP|\psi\rangle = 0 \qquad (2.2)$$

$$= \delta\langle\psi|H_P|\psi\rangle = 0$$

سنأخذ لتوضيح هذه الطريقة مثالين نعرف فيهما الحل المضبوط لمعادلة شرودينغر هما الهزاز التوافقي وذرة الهدروجين :

a– لنجرب في المثال الأول متجهات حالة من الفضاء الهيلبرتي العام تابعة لوسيط $\alpha$ صيغتها $P(x)e^{-x^2/2}$، حيث P كثير حدود، ولنبدأ بمتجهة حالة من الشكل

$$|\phi(x;\alpha)\rangle = Ae^{-\alpha x^2/2} \qquad (2.3)$$

... الدالتية (2.2) الشكل

إننا نقابل في الواقع كل درجة حرية بتكامل في فضاء الطور من الشكل

$$\oint p_i dq^i = 2\pi\hbar(n_i + \gamma_i) \qquad i = 1, 2, ..., s$$

حيث $\gamma_i$ عدد من رتبة الواحد يتوقف على طبيعة الشروط على الحدود من أجل درجة الحرية $i$، شريطة أن تكون درجة الحرية هذه من النوع الاهتزازي أي أن يقابل كل قيمة لـ $q_i$ قيمتان للسرعة هما $\pm\dot{q}_i$. أما عندما تكون درجة الحرية من النوع الدوراني، أي عندما نستطيع جعل كل عزم $p_i$ تابعاً لـ $q_i$ وحده، فإن العدد الكمومي عدد صحيح والعدد الإضافي $\gamma_i = 0$ على ألا يدخل السببين في الموضوع.

تلعب العلاقة (1.30) دوراً هاماً في الفيزياء الإحصائية الكمومية كما سنرى.

## 2. طريقة التغيرات Variational Method

### 1.2- مبدأ الطريقة

رأينا في الفصل الأول كيفية اشتقاق معادلة شرودينغر، كغيرها من معادلات الفيزياء، من مبدأ فعل أصغر خاضع لقيود هي تنظيم متجهات الحالة للواحد. سنلجأ إلى هذه الطريقة للبحث عن حلول تقريبية بأن نقصر التفتيش عن الحلول على فضاء جزئي من الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H}$، نختاره لسهولة الحصول على الحد الأدنى للفعل فيه، أي لسهولة حل المعادلة الدالتية. نرمز لهذا الفضاء الجزئي بـ $\mathscr{H}'$ وبـ P للمسقط عليه. لتكن $|\psi\rangle$ متجهات الحالة في $\mathscr{H}$ و $|\phi\rangle = P|\psi\rangle$؛ وليكن H هاميلتوني النظمة. فعوضاً عن حل معادلة التغيرات في $\mathscr{H}$

$$\delta\langle E\rangle_{\mathscr{H}} = \delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0 \tag{2.1}$$

التي تعطينا

$$(H - E)|\psi\rangle = 0$$

نبحث عن حل في $\mathscr{H}'$ بدليل مسقط الهاميلتوني H على هذا الفضاء $H_P = PHP$

$$\delta\langle E\rangle_{\mathscr{H}'} = \delta\langle\phi|H|\phi\rangle = \delta\langle\psi|PHP|\psi\rangle = 0 \tag{2.2}$$

$$= \delta\langle\psi|H_P|\psi\rangle = 0$$

سنأخذ لتوضيح هذه الطريقة مثالين نعرف فيهما الحل المضبوط لمعادلة شرودينغر هما الهزاز التوافقي وذرة الهدروجين :

a- لنجرب في المثال الأول متجهات حالة من الفضاء الهيلبرتي العام تابعة لوسيط $\alpha$ صيغتها $P(x)e^{-x^2/2}$، حيث P كثير حدود، ولنبدأ بمتجهة حالة من الشكل

$$|\phi(x;\alpha)\rangle = Ae^{-\alpha x^2/2} \tag{2.3}$$

تأخذ الدالتية (2.2) الشكل

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right] e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx \qquad (2.4)$$

حيث $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ هو هاميلتوني الهزاز التوافقي كما نعلم.

يحدد شرط تنظيم $\phi$ المعطاة بـ (2.3) للواحد العامل A : $A^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ . وينتج الاشتقاق الثاني لـ $e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ حداً آخر بـ $x^2$ ليصبح التكامل :

$$J(\alpha) = \int A^2 e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \left( \frac{\hbar^2\alpha}{2m} - \frac{\hbar^2\alpha^2 x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx \qquad (2.4)'$$

نكامل الحد بـ $x^2$ بالتجزئة كما فعلنا مراراً وتكراراً، أو بالعودة إلى الصيغة المعروفة

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-3/2}$$

$$J(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{\hbar^2\alpha}{2m}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{4}\frac{m\omega^2}{\alpha} - \frac{\hbar^2\alpha}{4m}\right)\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left( \frac{\alpha\hbar^2}{m} + \frac{m\omega^2}{\alpha} \right) \qquad (2.4)''$$

أي أن الدالتية دالة عادية بـ $\alpha$ و

$$0 = \delta J(\alpha) = \frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\hbar^2}{m} - \frac{m\omega^2}{\alpha^2} \qquad (2.5)$$

ومنه قيمة الوسيط $\alpha_o$ التي تجعل الدالتية أصغرية (مطرافية في الواقع)

$$\alpha_o = \frac{m\omega}{\hbar}$$

والتي تعطينا عند وضعها في "(2.4) قيمة الطاقة

$$E_o = J(\alpha_o) = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

كما نحصل على متجهة الحالة المقابلة

$$|\phi_o\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \qquad (2.6)$$

نتابع البحث لإيجاد الطاقة التالية بأخذ دالة تجربة عمودية على $|\phi_o\rangle$؛ يجب أن تنعدم هذه الدالة مرة على الأقل – أن تكون بعقدة واحدة – وأن تأخذ بالتالي الشكل

$$|\phi_1(x;\beta)\rangle = Bxe^{-\frac{1}{2}\beta x^2}$$

نطبق على متجهة الحالة هذه كل ما فعلناه من أجل متجهة الحالة (2.3) نقطة بنقطة لنجد أن الدالتية $J(\beta)$ هي دالة عادية بـ $\beta$

$$J(\beta) = \frac{3}{4}\left( \frac{\beta\hbar^2}{m} + \frac{m\omega^2}{\beta} \right)$$

تعطينا مطرافيتها قيمة $\beta$ وبالتالي قيمة الطاقة $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ ومتجهة الحالة المقابلة

$$|\phi_1\rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} 2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{2.7}$$

إن الحلين (2.6) و (2.7) هما الحلان المضبوطان للهزاز التوافقي ((2.(3.18)) من أجل $n=0$ و $H_o = 1$؛ و $n=1$ و $H_1 = 2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x$. أي أن جعل متجهات الحالة تابعة لوسيط لم يجزئ الفضاء الهيلبرتي $P = I$ ولكنه أتاح لنا حساب عوامل كثير حدود هيرميت.

b- كتبنا في ((3.(3.3)) معادلة شرودينغر القطرية بالوحدات الكولومبية على الشكل

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}R + \frac{2}{\rho}R = -2\varepsilon R \tag{2.8}$$

حيث $\rho = \frac{r}{a_o}$ (نصف قطر بور $a_o$) و $2\varepsilon = \frac{E}{|E_R|}$ ($E_R$ طاقة ريدبرغ).

ثم انتقلنا من المتغير $R(\rho)$ إلى $\chi(\rho) = \rho R(\rho)$ لتأخذ المعادلة الشكل التالي

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}\chi = \frac{E}{-E_R}\chi \tag{2.8'}$$

لنكتب الآن (2.2) من أجل $\phi$ حيث الهاميلتوني $\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}$ :

$$\delta\langle E\rangle_{\mathscr{H}} = -E_R\delta\int_0^\infty \bar{\phi}\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}\right)\phi d\rho = 0 \tag{2.9}$$

ولنجرب ثلاث متجهات حالة حقيقية بوسيط $\alpha$

$$\phi_1 = A_1 e^{-\alpha\rho} \quad ; \quad \phi_2 = A_2\frac{\rho}{\alpha^2+\rho^2} \quad ; \quad \phi_3 = A_3\rho^2 e^{-\alpha\rho}$$

وفي أبسط الحالات : $\ell = 0$.

تصبح الدالتية (التكامل في (2.9)) دالة $J(\alpha)$ يسهل حساب حدها الأدنى وتعيين ثابتة تنظيم $\phi$ للواحد ثم حساب الطاقة ومتجهة الحالة المقابلة. نجد ثابتة التنظيم من أجل دالة التجربة 1 : $A = 2\alpha^{3/2}$ ونجد القيمة $\alpha_o = 1$ التي تجعل الدالة $J(\alpha)$ أصغرية؛ نضعها في $J(\alpha)$ فنجد أن $E$ الناتجة عن جعل الدالتية (الدالة) أصغرية ونرمز لها بـ $E_{var}$ تساوي لـ $E_R$ – $(J(\alpha)=1)$؛ وهكذا فإن الدالة $|\phi_1\rangle$ هي $2\rho e^{-\rho}$. إنها الحل المضبوط للمعادلة '(2.8). نضع في الجدول التالي القيم التي نحصل عليها نتيجة الحساب وقد أضفنا في السطر الأخير نسبة الفرق بين الطاقة الصحيحة $E_R$ والطاقة المحسوبة $E_{var}$ على الفرق بين أول طاقة بعد طاقة القاع، $E_1$، $E_1 = -\frac{1}{4}E_R$ وطاقة القاع :

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\phi(e;\alpha)$ | $A_1\rho e^{-\alpha\rho}$ | $A_2\dfrac{\rho}{\alpha^2+\rho^2}$ | $A_3\rho^2 e^{-\alpha\rho}$ |
| A | $2\alpha^{3/2}$ | $2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}$ | $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\alpha^{5/2}$ |
| $\dfrac{E_\alpha}{E_R}$ | $\alpha^2 - 2\alpha$ | $(\pi - 8\alpha)/2\pi\alpha^2$ | $\dfrac{1}{3}\alpha^2 - \alpha$ |
| $\alpha_o$ | 1 | $\dfrac{1}{4}\pi$ | $\dfrac{3}{2}$ |
| $E_{var}$ | $-E_R$ | $-0,81E_R$ | $-0,75E_R$ |
| $\dfrac{E_{var} - E_R}{E_1 - E_R}$ | 0 | 0,25 | 0,33 |

## 2.2– حالة القاع لذرة الهليوم

سنستعمل طريقة التغيرات لحساب طاقة القاع لذرة الهليوم وبصورة عامة للذرات المؤينة الشبيهة بالهليوم (شحنة النواة Z مع وجود إلكترونين فقط). لنلاحظ في البداية أن متجهة حالة الإلكترونين – الجسيمين المتطابقين – هي من الشكل

$$\begin{vmatrix}\psi_1(r_1) & \psi_1(r_2)\\ \psi_2(r_1) & \psi_2(r_2)\end{vmatrix}_{\pm} \qquad (2.10)$$

فهي إذاً المستديم عندما يكون السبين الكلي مساوياً للصفر ويقال عن الهليوم في هذه الحالة إنه جانبي parahelium، وهي المعين عندما يكون السبين الكلي مساوياً للواحد ويقال عن الهليوم عندئذ إنه الصحيح orthohelium. يجب عند تطبيق طريقة التغيرات تغيير $\psi_1$ و $\psi_2$ بشكل منفصل فنحصل على معادلتين لا يمكن حلهما إلا بطرق عددية. ولذا فإننا سنعود إلى طريقة تغيرات أبسط تستعين بالميكانيك التقليدي (الإحصائي على وجه التحديد).

ليكن إذاً هاميلتوني ذرة – شحنة نواتها Z – مؤينة $Z-2$ مرة :

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2\right) - \frac{Z\alpha}{r_1} - \frac{Z\alpha}{r_2} + \frac{\alpha}{r_{12}} \qquad (2.11)$$

حيث 1، 2 تشيران إلى الإلكترونين ($r_1$ وضع الإلكترون الأول و $r_2$ وضع الإلكترون الثاني) و $r_{12} = |r_1 - r_2|$. $\alpha$ ثابتة البنية الدقيقة محسوبة في نظمة وحدات حيث $4\pi\varepsilon_o = 1$ فهي إذاً $\alpha = e^2$. سنأخذ كمتجهة حالة جداء متجهتي حالة لإلكترون في ذرة شبه هدروجينية، وبما أن متجهة الحالة لإلكترون واحد في الحالة s هي

$$\psi(r) = R_{10}Y_0^0 = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-\frac{Zr}{a_0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

حيث نصف قطر بور في هذه الوحدات هو $a_0 = \frac{\hbar^2}{m\alpha} = \frac{\hbar^2}{me^2}$

ومتجهة الحالة التي سنجربها هي

$$\phi(r_1, r_2; z) = \frac{Z^3}{\pi a_0} e^{\frac{-Z}{a_0}(r_1 + r_2)} \qquad (2.12)$$

إنها متجهة حالة منظمة للواحد وهي في الواقع الحل المضبوط لمعادلة شرودينغر بإلكترونين لولا وجود الحد الأخير في الهاميلتوني، حد التفاعل الكهربائي بين الإلكترونين. ننظر إلى Z في (2.12) كوسيط ونبحث عن قيمة Z التي تجعل الفعل التالي أصغري؛ نكتب إذاً z في (2.12) عوضاً عن Z لتمييزها عن العدد الذري

$$0 = \delta J(z) = \delta \int\int \bar{\phi}(r_1, r_2; z) H \phi(r_1, r_2; z) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (2.13)$$

إن القيمة الوسطية للهاميلتوني التي نريد جعلها أصغرية هي مجموع خمس قيم وسطية ولكن التناظر في (2.12) و (2.13) بين $r_1$ و $r_2$ يجعل $\langle P_1^2 \rangle = \langle P_2^2 \rangle$ و $\left\langle \frac{Ze^2}{r_1} \right\rangle = \left\langle \frac{Ze^2}{r_2} \right\rangle$ أي أن

$$0 = \delta \langle H \rangle = 2\left\langle \frac{1}{2m} P_1^2 \right\rangle - 2Z\left\langle \frac{e^2}{r_1} \right\rangle + \left\langle \frac{e^2}{r_{12}} \right\rangle \qquad (2.14)$$

لن نكتب $P^2$ على شكل مؤثر تفاضلي ولن نحسب القيمة الوسطية لـ $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$ انطلاقاً من (2.13) مفضلين استعمال مبرهنة فيريال Virial[2] التي تبين أن $\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$ حيث T و U الطاقتان الحركية والكامنة عندما يكون الكمون من الشكل $U \sim r^n$ ، $n \geqslant 0$. وتبين بالتالي أن $\langle T \rangle = -E$ :

---

[2] يبرهن على virial (منشأ التسمية هو الاسم القديم للطاقة الحركية : القوى الحية) كما يلي : ليكن لدينا عدد من الجسيمات أوضاعها $\vec{r}_i$ واندفاعاتها $\vec{p}_i$ وليكن $G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$ . لدينا

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

نأخذ القيمة الوسطية للطرفين التي هي تعريفاً التكامل من أجل زمن معين $\tau$ مقسوماً على هذا الزمن فنحصل على

$$\frac{1}{\tau}\left(G(\tau) - G(0)\right) = 2\langle T \rangle + <\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i>$$

يساوي الطرف الأول الصفر عندما تكون الحركة دورية و $\tau$ مساو لدورة أو عندما يكون الزمن $\tau$ طويلاً إلى حد كاف على أن يكون لـ G حد أعلى وهذا ما يقع حتماً عندما تبقى قيم $\vec{r}_i$ و $\vec{p}_i$ محدودة. وهكذا فإن

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} <\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i> = \frac{1}{2} <\sum_i \vec{\nabla} U_i \cdot \vec{r}_i>$$

وعندما يكون $U_i = \frac{\alpha}{r_i}$ فإن $\vec{\nabla} U_i = -\frac{\alpha \vec{r}_i}{r^3}$ و $\vec{\nabla} U_i \cdot \vec{r}_i = -\frac{\alpha}{r_i}$

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} <\sum_i U_i> = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

وهكذا لدينا من جهة، حيث الطاقة $-\frac{1}{2}\frac{mz^2\alpha^2}{\hbar^2}$ حسب (3.§ 2.3)

$$\left\langle \frac{1}{2m}p^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m\frac{z^2\alpha^2}{\hbar^2} = \frac{1}{2}\,\frac{z^2e^2}{a_o} \qquad (2.15)$$

وحيث الطاقة الكامنة $z\frac{e^2}{r}$

$$\left\langle \frac{1}{2m}p^2 \right\rangle = -\frac{1}{2}z\left\langle \frac{e^2}{r_1} \right\rangle \qquad (2.16)$$

أي

$$\left\langle \frac{e^2}{r} \right\rangle = -\frac{ze^2}{a_o} \qquad (2.17)$$

لم يبق علينا إلا حساب القيمة الوسطية لـ $\frac{e^2}{r_{12}}$ : إنها

$$\sim \iint \frac{e^{-\frac{2z}{a_o}(r_1+r_2)}}{|r_1 - r_2|}\, d\bar{r}_1 d\bar{r}_2$$

لن نحسب هذا التكامل المطابق لتفاعل شحنة كروية (توزيعها كروي) مع شحنة مماثلة منطبقة عليها مكتفين هنا بإعطاء النتيجة وهي

$$\left\langle \frac{e^2}{r_{12}} \right\rangle = \frac{5}{8}\frac{ze^2}{a_o} \qquad (2.18)$$

وهكذا فإن $J(z)$ في حالة الهليوم $(Z = 2)$ هو

$$\langle H \rangle = J(z) = 2\left\langle \frac{1}{2m}P_1^2 \right\rangle - 4\left\langle \frac{e^2}{r_1} \right\rangle + \left\langle \frac{e^2}{r_{12}} \right\rangle$$

ويساوي بأخذ العلاقات 15 إلى 18 بعين الاعتبار

$$\langle H \rangle = \frac{z^2e^2}{a_o} - 4\frac{ze^2}{a_o} + \frac{5}{8}\frac{ze^2}{a_o} \qquad (2.19)$$

ويتحول بالتالي من دالتية إلى دالة نحسب مشتقها ونساويه بالصفر

$$0 = \delta\langle H \rangle = \frac{dH}{dz} = \frac{e^2}{a_o}\left(2z - \frac{27}{8}\right)$$

---

وبما أن

$$\langle T \rangle + \langle U \rangle = E = \langle T \rangle - 2\langle T \rangle$$

فإن

$$\langle T \rangle = -E$$

تبقى هذه المبرهنة صحيحة في الميكانيك الكمومي حسب مبرهنة إرنفست.

أي $z = \frac{27}{16}$

نضع هذه القيمة في (2.19) لنجد أن

$$E \simeq -2{,}85\frac{e^2}{a_o}$$

إنها الطاقة اللازمة لتأيين الذرة، لإبعاد الإلكترونين. إن القيمة المعطاة تجريبياً هي $E = -2{,}904\frac{e^2}{a_o}$ وهكذا فالتقريب في غاية الجودة ودالة التجربة التي اخترناها لحساب الفعل الأصغر هي أفضل الدالات الممكنة.

## 3.2– تقريب الحقل المتسق ذاتياً Self consistent

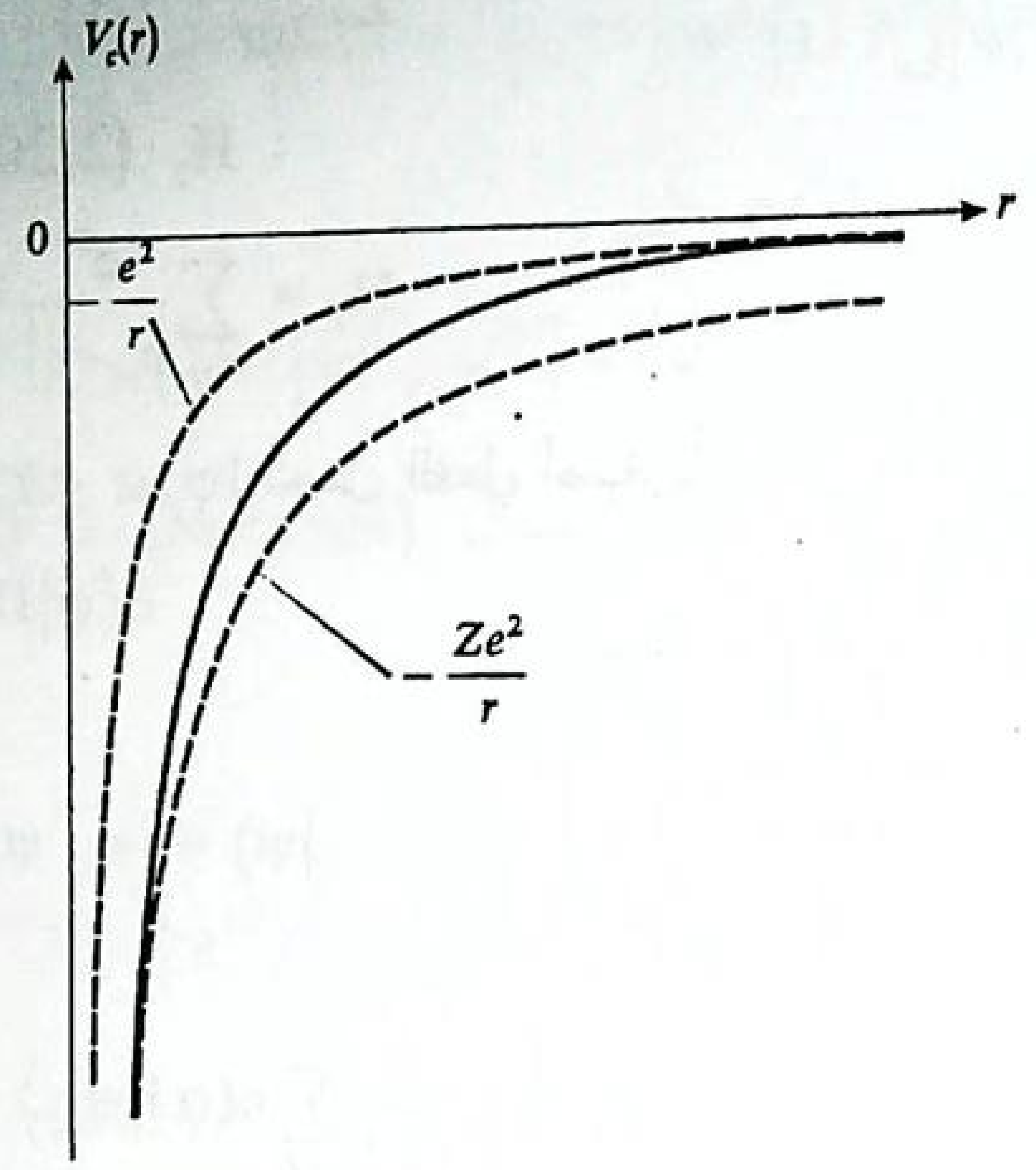
يمكن تطبيق هذا التقريب على الذرات، Z إلكترون حول النواة، كما يمكن تطبيقه على الجزيئات وعلى الأجسام الصلبة وكذا في كل مرة تخضع فيها جسيمات متطابقة إلى حقل خارجي. نهمل في هذا التقريب حركة النواة وهذا ما فعلناه حتى الآن بما في ذلك في ذرة الهذروجين حيث اعتبرنا النواة ثقيلة بالنسبة للإلكترون ومبدأً للإحداثيات. نهمل أيضاً كل ما يتعلق بالتفاعلات المغنطيسية الناتجة عن العزوم المغنطيسية المدارية أو السبينية. نكتب هاميلتوني ذرة بـ Z إلكترون على الشكل التالي

$$H = \sum_{i=1}^{z}\frac{p_i^2}{2m} - \sum_{i=1}^{z}\frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i<j}\frac{e^2}{|r_i - r_j|} \qquad (2.20)$$

يعمم هذا الهاميلتوني هاميلتوني الذرة المؤينة $Z-2$ مرة الذي كتبناه في (2.11)؛ يعين الجمع الأخير تفاعل الإلكترونات فيما بينها زوجاً زوجاً وعدد حدود الجمع هو $\frac{Z(Z-1)}{2}$. وهو المقدار الذي يمنعنا من اعتبار H كهاميلتوني إلكترونات، وعددها Z، مستقلة عن بعضها وخاضعة إلى حقل النواة وبالتالي من الحصول على حل مضبوط لمعادلة شرودينغر. والسؤال الأول هو هل يمكن معالجة هذا الحد الأخير كاضطراب ؟ إن النسبة بين الجمع الأخير وما قبله هو، نظراً إلى كون $r_i - r_j$ تساوي وسطياً $r_i$، $\frac{Z(Z-1)}{2Z^2}$ ويتراوح بين $\frac{1}{4}$ من أجل $Z=2$ و $\frac{1}{2}$ من أجل $Z >> 1$؛ ينتج عن ذلك استحالة اعتبار الجمع الأخير كاضطراب $H' << H$ اللهم إلا في حالة القيمة الصغرى لهذه النسبة؛ إنها حالة الهليوم حيث تعطي نظرية الاضطراب نتائج مقبولة نسبياً. تنتقل النسبة من $\frac{1}{4}$ إلى $\frac{1}{3}$ من أجل $Z = 3$.

أما السؤال الثاني والأهم فهو هل يوجد تقريب يمكن النظر فيه إلى الإلكترونات كجسيمات مستقلة هاميلتوني مجموعها هو $H_1$ وإضافة هاميلتوني آخر $H_2$ كاضطراب على أن يكون مجموع الهاميلتونيين $H_1 + H_2$ مساوياً لـ (2.20) ؟ والجواب على ذلك بنعم؛ إنه تقريب الحقل المركزي : يتنابذ الإلكترون (i) مع كل إلكترون على حدة ولكن وجود الـ $Z-1$ إلكتروناً آخر يحدث حقلاً نابذاً يعدل من شدة حقل النواة

الجاذب بتشكيله حاجزاً بين النواة والإلكترون. وهكذا يخضع الإلكترون إلى كمون $V_c(r_i)$ تابع لوضعه فقط نسميه الكمون المركزي وتتراوح قيمته بين $\frac{-Ze}{r_i}$ عندما يكون الإلكترون (i) قريباً جداً من النواة و $\frac{(Z-1)e}{r_i} + \frac{Ze}{r_i} = -\frac{e}{r_i}$ عندما يكون بعيداً جداً عنها ولا نفرق بين بعده عن النواة وبعده عن الإلكترونات الأخرى، الشكل.5.




الشكل.5

ولدينا في تقريب أولي $H_1 = \sum_{i=1}^{Z} \frac{P_i^2}{2m} + V_c(r_i)$. إنه الهاميلتوني الإلكترونات المستقلة عن بعضها، الهاميلتوني الحر، إلا أن الكمون المركزي $V_c(r_i)$ ليس مستقلاً عن حركة (i) لأن هذه الحركة تؤثر على حركة الـ $Z-1$ إلكتروناً آخر المشكلة للكمون المركزي؛ عندما يقترب إلكترون (j) من (i) فإن التنابذ بينهما يغلب على $V_c(r_i)$ وينزع عنه صفة المركزية. يكمن الحل في إيجاد كمون متوسط يخضع له الإلكترون والنظر إلى $H_2$ المعطى بالعلاقة التالية

$$H_2 = \sum_i \frac{-Ze}{r_i} + \sum_{i<j} \frac{e^2}{|r_i - r_j|} - \sum_i V_c(r_i)$$

كاضطراب. وهذا هو تقريب الحل المركزي الذي لن ندخل في تفاصيله؛ إن كل ما نريد الإلحاح عليه هو صعوبة اختيار الكمون المركزي. إنه تابع إلى وضع الـ $Z-1$ إلكتروناً في الفضاء وفي الوقت ذاته فإن هذه الأوضاع تابعة إلى الكمون المركزي. إن $\psi(r_i)$ الناتج عن الهاميلتوني $H_1$ تابع لـ $V_c(r_i)$ ولذا فمن الضروري اختيار الكمون بشكل متسق يعين توزيعاً للإلكترونات في الفضاء يتواءم مع هذا الكمون، يُنتج هذا الكمون ومنه استعمال مفهوم الحقل ذاتي الاتساق.

## 4.2- تقريب هارتري، فوك، ديراك Hartree-Fock-Dirac

سنأخذ في هذا التقريب الحقل المركزي مساوياً لـ $\frac{-Ze}{r_i}$ من أجل كل إلكترون، أي أن الهاميلتوني الحر لإلكترونات الذرة هو

$$H_1 = \sum_{i=1}^{Z} \frac{P_i^2}{2m} + V_c(r_i) = \sum_{i=1}^{Z} h_i^{(1)} \qquad (2.21)$$

ونسمي ما تبقى من $H$ في (2.20) $H_2$ :

$$H_2 = \sum_{i<j} \frac{e^2}{|r_i - r_j|} = \sum_{i<j} W^{ij} \qquad (2.22)$$

ونفتش عن متجهات حالة $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes Z}$ تجعل الفعل أصغرياً

$$\delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0$$

حيث

$$|\psi\rangle = |\psi_1, \psi_2, \dots \psi_z\rangle$$

المعرف بـ ((6.(1.24)

$$|\psi_1, \psi_2, \dots \psi_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \sum_{\alpha \in Z!} \varepsilon(\alpha) |\psi_{\alpha_1}\rangle \dots |\psi_{\alpha_z}\rangle \qquad (2.23)$$

$$\equiv \sqrt{Z!}\, A |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \dots |\psi_z\rangle$$

حيث $A$ المنظر المضاد (6.(1.12)A)

إن $|\psi_i\rangle$ متجهة خاصة لـ $h_i^{(1)}$ ولتكن $\langle h_i\rangle$ قيمتها الوسطية. إنها في الواقع القيمة الخاصة لـ $h_i$. نرى بسهولة معتمدين على ((6.(3.7) أن

$$\langle H_1\rangle = \sum_i \langle h_i\rangle \qquad (2.24)$$

ولسنا بحاجة لطريقة التغيرات لحساب هذا المقدار لأننا نعرف حل معادلة شرودينغر لجسيم في حقل مركزي. علينا التفتيش عن $|\psi\rangle$ التي تجعل $H_2$ أصغرياً. لدينا

$$\langle H_2\rangle = \langle\psi|H_2|\psi\rangle = \sum_{i<j} \langle\psi_1, \dots, \psi_z|W^{ij}|\psi_1, \dots, \psi_z\rangle \qquad (2.25)$$

إن شكل المؤثر $W^{ij}$ هو حسب ((6.(3.20) لطيف منفصل :

$$W^{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |\psi_i^{(1)}, \psi_j^{(2)}\rangle W^{ij} \langle\psi_i^{(1)}, \psi_j^{(2)}| \qquad (2.26)$$

حيث يشير الرقمان (1) و (2) إلى إلكترونين أحدهما في الوضع $r_i$ - في الحالة $\psi_i$ - والآخر في الوضع $r_j$ - في الحالة $\psi_j$. لا تختلف عناصر المصفوفة $W^{ij}$ عن الصفر إلا من أجل حدود من الشكل $|\psi_i^{(1)}, \psi_j^{(2)}\rangle$ لذا نفضل كتابة $\langle H_2\rangle$ على الشكل التالي

$$\langle H_2\rangle = Z!\langle\psi_1^{\alpha(1)}|\langle\psi_2^{\alpha(2)}|\ldots\langle\psi_z^{\alpha(z)}|AW^{ij}A|\psi_1^{\alpha(1)}\rangle|\psi_2^{\alpha(2)}\rangle\ldots|\psi_z^{\alpha(z)}\rangle$$
$$= Z!\langle\psi_1^{\alpha(1)}|\langle\psi_2^{\alpha(2)}|\ldots\langle\psi_z^{\alpha(z)}|W^{ij}A|\psi_1^{\alpha(1)}\rangle|\psi_2^{\alpha(2)}\rangle\ldots|\psi_z^{\alpha(z)}\rangle$$

لأن $A^2 = A$ ؛ ومن جهة أخرى فإن تطبيق $W^{ij}$ من أجل i و j محددتين على $A|\psi_1\rangle\ldots|\psi_z\rangle$ لا يعطي عناصر مصفوفة مختلفة عن الصفر إلا من أجل المنظر المضاد لمتجهتي حالة، مستبدل المتجهتين؛ إنه $A = \frac{1}{2}(I - P_{ij})$ $(6.(1.5)_A)$ بحيث تصبح $\langle H_2\rangle$

$$\langle H_2\rangle = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sum_{i,j}\langle\psi_1^{\alpha(1)}|\langle\psi_2^{\alpha(2)}|\ldots\langle\psi_z^{\alpha(z)}|W^{ij}(I - P_{ij})|\psi_1^{\alpha(1)}\rangle\ldots|\psi_z^{\alpha(z)}\rangle$$

نحصل بفرض $\alpha(i) = 1$ و $\alpha(j) = 2$ على

$$\langle H_2\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[\langle\psi_i^{(1)}|\langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_i^{(1)}\rangle|\psi_j^{(2)}\rangle - \langle\psi_i^{(1)}|\langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_j^{(1)}\rangle|\psi_i^{(2)}\rangle\right] \quad (2.26)'$$

إن الحد الثاني ين المعقوفتين هو حد الاستبدال (exchange) : الإلكترون الأول في الحالة $\psi_j$ والإلكترون الثاني في الحالة $\psi_i$ وهو حد حقيقي :

إن مرافقه العقدي هو

$$\left[\sum_{i,j}\langle\psi_i^{(1)}|\langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_j^{(1)}\rangle|\psi_i^{(2)}\rangle\right]^* = \sum_{i,j}\langle\psi_j^{(1)}|\langle\psi_i^{(2)}|W^{ij\dagger}|\psi_i^{(1)}\rangle|\psi_j^{(2)}\rangle$$

إن $W^{ji} = W^{ij\dagger}$ لأن $W^{ij}$ حقيقي. يكفي إذاً تغيير التسمية في الطرف الثاني، تبديل i ب j والعكس بالعكس للحصول على

$$\left[\sum_{i,j}\langle\psi_i^{(1)}|\langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_j^{(1)}\rangle|\psi_i^{(2)}\rangle\right]^* = \sum_{i,j}\langle\psi_i^{(1)}|\langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_j^{(1)}\rangle|\psi_i^{(2)}\rangle$$

والآن بعد أن وجدنا صيغة $\langle H_2\rangle$ علينا إضافة القيود $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$ أي إضافة $Z^2$ علاقة بمضاعفات لاغرانج، لنرمز لها كالمعتاد ب $\lambda_{ij}$، ونفتش عن حل للمعادلة التالية

$$\delta\left(\langle H\rangle - \sum_{i,j}\lambda_{ij}\langle\psi_i|\psi_j\rangle\right) = 0 \quad (2.27)$$

لنلاحظ أولاً أن المصفوفة $\lambda_{ij}$ مصفوفة هيرميتية، ذلك أن $\langle H_2\rangle = \langle H_2\rangle^*$ من جهة، ونحصل من جهة ثانية بطرح من (2.27) مرافقها العقدي على

$$\sum_{i,j}(\lambda_{ij} - \lambda_{ji}^*)\,\delta\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$$

ومنه

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^*$$

ولنقم ثانياً بتغيير القاعدة المتعامدة $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle\ldots|\psi_z\rangle$ في $\mathscr{H}^{\otimes z}$. لتكن S مصفوفة تغيير القاعدة في $\mathscr{H}$ : $|\psi'_k\rangle = \sum_{n_k} S_{n_k k}|\psi_{n_k}\rangle$ ؛ مما يعطينا في $\mathscr{H}^{\otimes z}$ :

$$|\psi'_1\rangle|\psi'_2\rangle\ldots|\psi'_z\rangle = \sum_{n_1\ldots n_z} S_{n_1 1}S_{n_2 2}\ldots S_{n_z z}|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle\ldots|\psi_z\rangle$$

$$= \det S|\psi_1\rangle...|\psi_z\rangle$$

وبما أن مصفوفة تغيير القاعدة واحدية فإن $\det S = 1$ وبالتالي $|\psi_1,...,\psi_z\rangle = |\psi'_1,...,\psi'_z\rangle$ ولا تتغير القيمة الوسطية $\langle H\rangle$ نتيجة تغيير القاعدة. أما المصفوفة $\lambda$ فتتحول، ككل مؤثر خطي، نتيجة هذا التغيير إلى

$$\lambda' = S\lambda S^{-1}$$

وبما أنها هيرميتية فإنه من الممكن اختيار $S$ بحيث تكون $\lambda'$ قطرية، عناصرها $e_1,...,e_z$، وإنقاص عدد مضاريب لاغرانج في القاعدة الجديدة من $Z^2$ إلى $Z$. نكتب في هذه القاعدة العلاقة (2.27) على الشكل

$$\delta\langle H\rangle - \sum_i e_i\delta\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 0 \qquad (2.27)'$$

أبقينا على الرمز $\psi_i$ في هذه العلاقة عوضاً عن $\psi'_i$ حتى لا نثقل الكتابة.

ننظر كالمعتاد إلى $\langle\psi_i|$ و $|\psi_i\rangle$ كمتغيرين مستقلين، تعطينا '(2.27) $2Z$ معادلة خطية متجانسة بـ $\delta|\psi_i\rangle$ و $\delta\langle\psi_i|$ تسمح لنا بتكرار ما فعلناه سابقاً بتحديد مضاريب لاغرانج من جهة وكتابة المعادلات التي تحققها المتجهات $|\psi_i\rangle$ من جهة أخرى فنحصل، نظراً لـ (2.24) و '(2.26) بأخذ $\delta\langle\psi_i^{(1)}|$ كمتغير مستقل على

$$h_i|\psi_i^{(1)}\rangle + \sum_j\left[\langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_i^{(1)}\rangle|\psi_j^{(2)}\rangle - \langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_j^{(1)}\rangle|\psi_i^{(2)}\rangle\right] = e_i|\psi_i^{(1)}\rangle \qquad (I)$$

**ملاحظات :**

1- لنلاحظ أنه من الممكن كتابة هذه المعادلة بدليل عناصر المصفوفة $W^{ij}_{j^{(2)}i^{(2)}}$ و $W^{ij}_{j^{(2)}j^{(2)}}$ لأن $|\psi_i^{(1)}\rangle|\psi_j^{(2)}\rangle = |\psi_j^{(2)}\rangle|\psi_i^{(1)}\rangle$ في الحد الأول ونفس الشيء في الحد الثاني. لنلاحظ أيضاً أن $\frac{1}{2}$ اختفى هنا لأن $\sum_{i<j}\sum_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}$.

2- عندما نضرب المعادلة (I) على اليسار بـ $\langle\psi_i^{(1)}|$ ونجمع من أجل كل الـ $i$، $i \in [1, Z]$ نحصل على ضعف $\langle H_2\rangle$ $\sum_{i<j}\sum_j = 2\sum_i\sum_j$ وهكذا فإن

$$\langle H_1\rangle + 2\langle H_2\rangle = \sum_i e_i = Tr\lambda' \qquad (2.28)$$

حيث تشير $Tr$ (أثر المصفوفة) إلى مجموع عناصرها القطرية.

أي أن $\sum e_i$ لا تساوي الطاقة الكلية لإلكترونات الذرة. إنها أكبر منها بالمقدار $\langle H_2\rangle$؛ ومع ذلك فإنه من الممكن النظر لـ $e_i$ كتقريب جيد لطاقة تأيين الإلكترون $|\psi_i\rangle$.

## 5.2- معادلة فوك – ديراك

لننظر إلى متجهات الحالة في التمثيل $q$ : $\psi_i(q) = \langle q|\psi_i\rangle$ حيث الوضع $q$ هو مجمل إحداثيات متجهة الحالة $\langle\psi_i|$ وسبينها $q = (\vec{r}_i, m_s)$؛ ولنأخذ المسقط على فضاء حالات الإلكترون الواحد :

$$\rho = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{2.29}$$

لدينا في التمثيل $q$

$$\rho(q,q') = \langle q|\rho|q'\rangle = \sum_i \psi_i(q)\overline{\psi_i(q')} \tag{2.30}$$

و

$$\rho(q) = \rho(q,q) = \sum_i |\psi_i(q)|^2 \tag{2.30'}$$

إنها كثافة احتمال وجود إلكترون في الوضع $q$.

ولنعبر عن عناصر المعادلة (I) في التمثيل $q$ : إن التفاعل $W^{ij}$ دالة حقيقية ومتناظرة بالمتغيرين $q^{(i)}$ و $q^{(j)}$ نرمز لهما للتسهيل بـ $q$ و $q'$. نكتب $W^{ij}(q^{(i)}q^{(j)}) = W(q,q')$ ونكتب عناصر الحد الأول بين المعقوفتين في I، آخذين بعين الاعتبار الملاحظة I التي أبديناها، على الشكل

$$\langle\psi_j^{(2)}|W^{ij}|\psi_j^{(2)}\rangle|\psi_i^{(1)}\rangle = \left(\int\langle\psi_j^{(2)}|q'\rangle\langle q'|\psi_j^{(2)}\rangle W(q,q')dq'\right)\psi_i^{(1)}(q)$$

لم نفعل شيئاً هنا سوء إدخال $I = \int|q'\rangle dq'\langle q'|$. نحصل بالجمع على كل العناصر $j$، آخذين بعين الاعتبار $(2.30)'$، على

$$\int\sum_j|\psi_j^{(2)}(q')|^2 W(q,q')dq'\,\psi_i^{(1)}(q) = \left(\int\rho(q')W(q,q')dq'\right)\psi_i^{(1)}(q)$$

نسمي التكامل في الطرف الثاني، الذي يمثل تأثير كل الإلكترونات على الإلكترون $\psi_i(q)$، $W(q)$

$$W(q) = \int\rho(q')W(q,q')dq' \tag{2.31}$$

بحيث يصبح مجموع الحدود الأولى بين المعقوفتين

$$W(q)\psi_i(q) \tag{2.32}$$

نكتب مجموع الحدود الثانية بين المعقوفتين – حدود الاستبدال – على نفس النحو

$$-\int\sum_j\overline{\psi}_j(q')W(q,q')\psi_i(q')\psi_j(q)dq'$$

نسمي مضروب $\psi_i(q')$ تحت إشارة التكامل، المقدار $\sum_j\overline{\psi}_j(q')\psi_j(q)W(q,q')$، تفاعل الاستبدال، نرمز له بـ $W_{exch_{(q,q')}}$ ونكتبه على الشكل

$$W_{exch_{(q,q')}} = \rho(q,q')W(q,q') \tag{2.33}$$

ليصبح مجموع الحدود الثانية بين المعقوفتين

$$-\int W_{exch}(q,q')\psi_i(q')dq' \quad (2.34)$$

ولدينا في النهاية بالعودة إلى $Z$ (I) معادلة تفاضلية – تكاملية هي

$$h_i\psi_i(q) + W(q)\psi_i(q) - \int W_{exch}(q,q')\psi_i(q')dq' = e_i\psi_i(q) \quad (II)$$

$$h_i = -\frac{\hbar^2}{2m} + U(q)$$

إن $h_i$ هو هاميلتوني الإلكترون في الحقل المركزي

تعرف هذه النظمة من المعادلات باسم معادلات فوك–ديراك.

يمكن حل هذه المعادلات بالتكرار بدءاً من متجهات تجربة $|\psi_i^0\rangle$ $i = 1, 2 \ldots Z$ أي بدءاً بقيمة تقريبية $\rho^0$، كتابة $(2.31)_0$ :

$$W^0(q) = \int \sum_j |\psi_j^0(q')|^2 W(q,q')dq'$$

و$(2.33)_0$ :

$$W_{exch}^0(q,q') = \sum_j \overline{\psi}_j^0(q')\psi_j^0(q)\, W(q,q')^0$$

ونظمة المعادلات (II) :

$$h_i\psi_i(q) + W^0(q)\psi_i(q) - \int W_{exch}^0\psi_i(q')dq' = e_i\psi_i(q)$$

التي تعرف لنا حسب $i = 1, 2 \ldots Z$ ؛ $\psi_i^1$ على نحصل بحلها على $W^0$ و $W_{exch}^0$ معروفتان في هذه المعادلة، نحصل بحلها على $\psi_i^1$؛ $Z \ldots$ $i = 1, 2$ التي تعرف لنا حسب (2.29) و (2.30) قيمة جديدة للمسقط $\rho^1$، نضعها في $(2.30)_1$ و $(2.33)_1$، نحل المعادلة (II) لمعرفتنا بـ $W^1$ و $W_{exch}^1$ فنحصل على $\psi_i^2$. يمكن للمتتالية $\rho^0$، $\rho^1 \ldots$ أن تتقارب نحو الحل المضبوط $\rho$ الذي يعرف تماماً $W$ و $W_{exch}$ واللذين نسميهما الحقل ذاتي الاتساق.

## 6.2– الطاقة الذاتية ومعادلة هارتري

نريد الآن النظر في المحتوى الفيزيائي لمختلف التعابير الواردة في الرقم السابق، مميزين أحد الإلكترونات $i$ عن بقية الإلكترونات. سنكتب إذاً

$$\rho = \sum_{j\neq i}|j\rangle\langle j| + |i\rangle\langle i|$$

نرمز للحد الأول حيث حذفت $i$ بـ $\rho^{(\check{i})}$

$$\rho^{(\check{i})} = \sum_{j\neq i}|j\rangle\langle j\rangle = \rho - |i\rangle\langle i| \quad (2.29)_v$$

لدينا كذلك

$$\rho^{(\check{i})}(q,q') = \rho(q,q') - \psi_i(q)\overline{\psi_i(q')} \quad (2.30)_v$$

و

$$W^{(\check{i})}(q) = \int \rho^{(\check{i})}(q')W(q,q')dq' \qquad (2.31)_v$$

$$W^{(\check{i})}_{exch}(q,q') = \rho^{(\check{i})}(q,q')W(q,q') \qquad (2.33)_v$$

بحيث يمكننا أن نكتب (2.31) على الشكل

$$W(q) = W^{(\check{i})}(q) + \int |\psi_i(q')|^2 W(q,q')dq' = W^{(\check{i})}(q) + X^i(q) \qquad (2.35)$$

ترينا هذه الطريقة في الكتابة أن الكمون الوسطي الذي يتفاعل مع الإلكترون $i$ هو مجموع كمونين أولهما ناتج عن الـ $Z - 1$ إلكترون غير الإلكترون $i$ والثاني ناتج عن الإلكترون $i$ بالذات والحد $X^i(q)\psi_i(q)$ الذي نحصل عليه في (2.32) هو حد تفاعل الإلكترون $i$ مع الحقل الناتج عنه. يطلق على هذا الحد اسم الطاقة الذاتية للإلكترون وهو لامنته يجب التخلي عنه. نفعل ذلك بطريقة فظة نجد تبريرها في نظرية الحقول المكممة[3] بأن نطرح مقدارين لامنتهين من بعضهما. نكتب إذاً نظمة المعادلات (II) على الشكل

$$h_i\psi_i(q) + W^{(\check{i})}\psi_i(q) + X^i(q)\psi_i(q) - \Big(\int \rho^{(\check{i})}(q,q')\psi_i(q')W(q,q')dq' +$$
$$\int \overline{\psi}_i(q')\psi_i(q)W(q,q')\psi(q')dq'\Big) = e_i\psi_i(q)$$

حيث كتبنا في هذه المعادلة $\rho(q,q')$ كما في $(2.30)_v$. نرى من (2.35) أن التكامل الثاني ليس سوى تفاعل الإلكترون الذاتي (اللامنتهي !) نطرحه من $X^i\psi_i$ ونحصل على

$$(II)' \qquad h_i\psi_i(q) + W^{(\check{i})}(q)\psi_i(q) - \int W^{(\check{i})}_{exch}(q,q')\psi_i(q')dq' = e_i\psi_i(q)$$

يتألف الهاميلتوني الكلي للإلكترون في معادلة القيم الخاصة هذه من طاقة الإلكترون الكلية في الحقل المركزي الناتج عن النواة $\left(h_i = \frac{P_i^2}{2m} + U(r_i)\right)$ ومن الطاقة الكامنة الوسطية المعرفة بـ $(2.31)_v$، طاقة تفاعل الإلكترون $i$ مع الـ $Z - 1$ إلكتروناً المختلفة عنه. أما مفعول الاستبدال فيعبر عنه كمون

---

[3] لا يخلو حقل من الحقول المكممة من الطاقات الذاتية المتناهية في الكبر. يتفاعل الإلكترون مع الحقل الكهرطيسي الذي يحدثه ويبدو هذا التفاعل في الحسابات، في مخططات فاينمان، على الشكل التالي : يحدث الإلكترون فوتوناً في النقطة x ويمتصه في النقطة y وطاقة هذا التفاعل الذاتي لامنتهية، كذلك يخلق الفوتون زوجاً مؤلفاً من إلكترون وبوزيترون في النقطة x ويمتصهما في النقطة y والطاقة لامنتهية هنا أيضاً وقد رسمنا مخططي هذين التفاعلين في آخر هذا الهامش. رأينا أخيراً أن طاقة القاع للهزاز التوافقي هي $\frac{\hbar\omega}{2}$ وقلنا إنه من الممكن اعتبار الحقل الكهرطيسي في كل نقطة من نقاط الفضاء هزازاً توافقياً، طاقة قاع هذه الهزازات اللامتناهية لامتناهية. تلجأ نظرية الحقول الكمومية إلى طريقة رياضية بحتة تعرف باسم إعادة التنظيم Renormalization للتخلص من هذه المقادير اللامنتهية والتي لا معنى لها في الفيزياء. ولكن هذه الطريقة رغم صرامتها لا ترضي الفيزيائي إذ إن منشأ القيم اللامنتهية في نظرية الحقول، بدأ بالكهرطيسية التقليدية حيث طاقة الشحنة النقطية لامتناهية هو قبول الفيزياء بمفهوم النقطة المادية وبالتالي بمفهوم اتصالية المكان – واتصالية المكان–الزمان في النسبية. لذا تحاول النظريات الحديثة التي لم تصل بعد إلى نتيجة مرضية تكميم المكان والزمان أي القول بوجود حد أدنى للأطوال والأزمنة على غرار الحد الأدنى $\hbar$ للأفعال : لا تنتهي المسافة المكانية الزمانية إلى الصفر في أي حال من الأحوال؛ ومن ثم النظر إلى الأجسام كأوتار مثلاً عوضاً عن مفهوم النقطة المادية المنبوذ.

لاموضعي non local، أي أنه ليس على شكل دالة تابعة لنقطة q وإنما معرفاً بنواة التكامل $W^{(i)}_{exch}(q, q')$. نحصل إذا ما أهملنا حد التبادل هذا للإلكترون i مع كل إلكترونات الذرة الأخرى على معادلة هارتري التالية

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla + U(q)\right)\psi_i(q) + W^{(i)}(q)\psi_i(q) = e_i\psi_i(q) \qquad \text{(III)}$$

يمكن حل هذه المعادلة بالتكرار كما فعلنا أعلاه في معادلة فوك-ديراك.

# الفصل الثامن

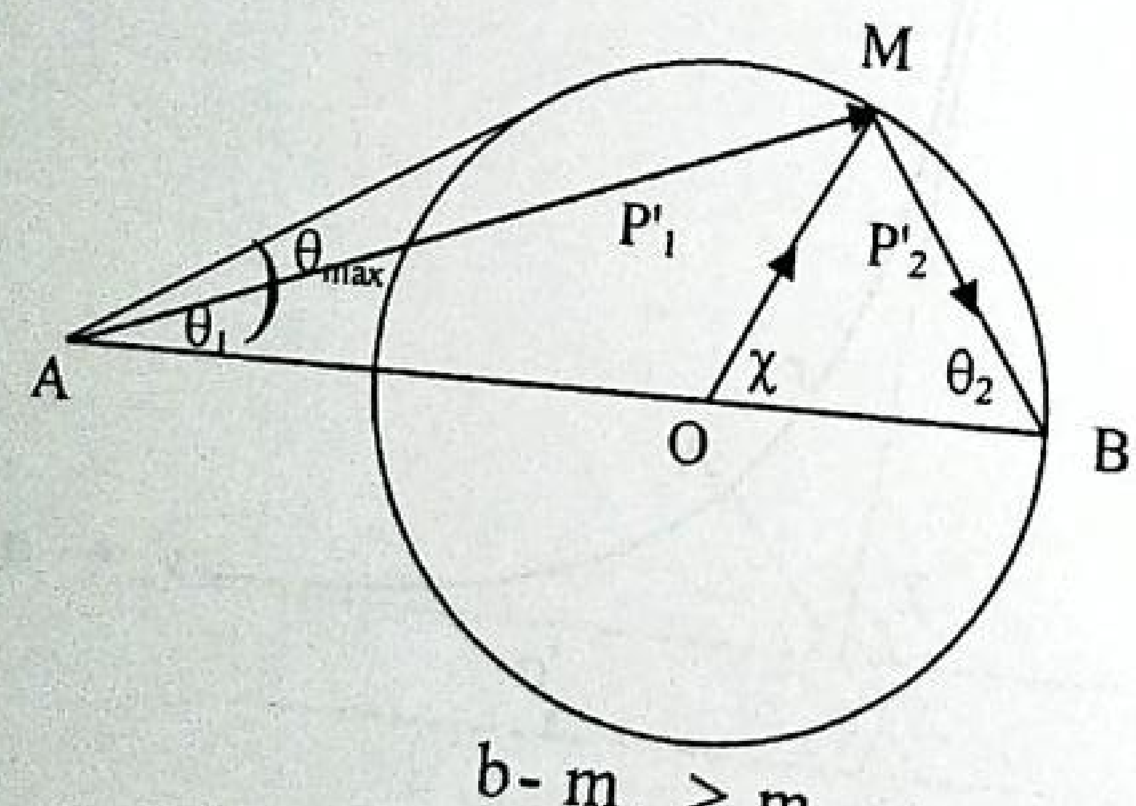
## نظرية التبعثر Scattering


1- صيغة روذرفورد Rutherford ........................ 349
2- التبعثر الكمومي ........................ 358
3- تقريب بورن Born ........................ 367
4- نظرية التبعثر غير المرن ........................ 380
5- المصفوفة S ........................ 389

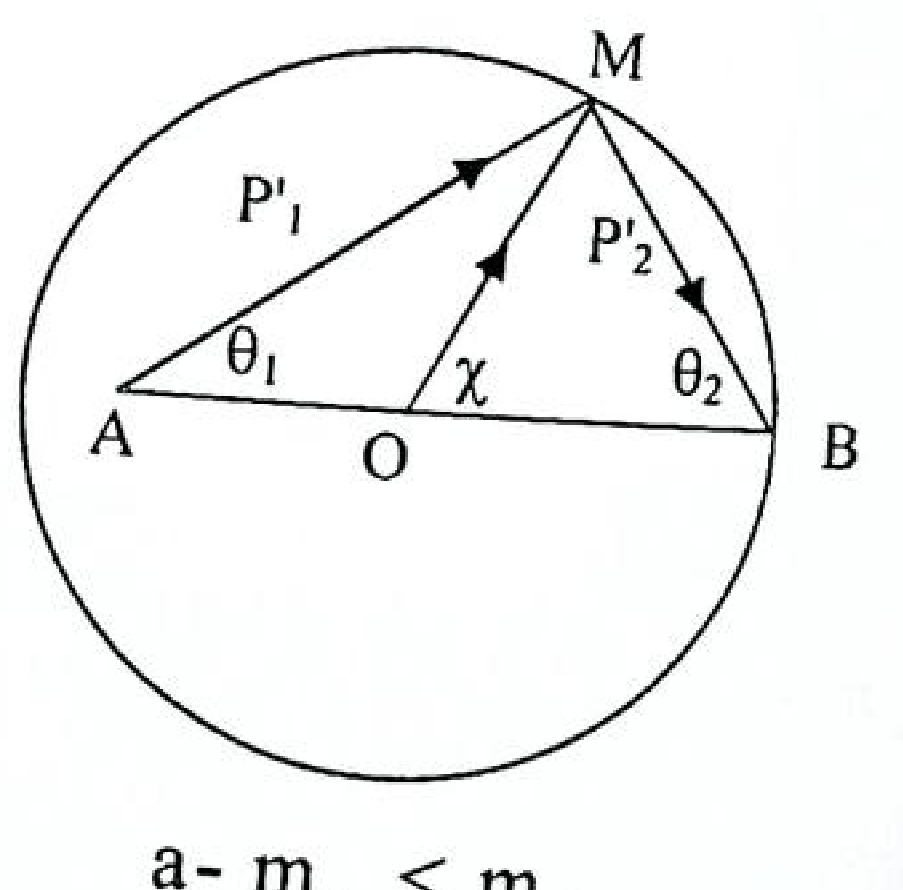
# 1. صيغة روذرفورد Rutherford

## 1.1- التصادم التقليدي

عالجنا في الفصل الرابع من كتاب الميكانيك اصطدام جسيمين، كتلتاهما $m_1$ و $m_2$، وكتلتهما المختصرة $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$، في مقرنين متميزين، مقرن مركز الكتلة الذي يتحرك الجسيمان بالنسبة له وحيث تسهل المعالجة، ومقرن المختبر (العملي) حيث نختار في كثير من الأحيان إحداثياته بالنسبة لأحد الجسيمين، $m_2$ على سبيل المثال؛ أي أننا نعتبر هذا الجسيم، ونسميه الهدف ثابتاً، ويتحرك الجسم الأول باتجاهه ليصطدم به. أعطينا العلاقات الحركية (السينماتيكية) للانتقال من مقرن إلى آخر وبشكل خاص العلاقات بين زاوية الانعطاف $\chi$ للجسيمين المتصادمين بالنسبة لاتجاه الحركة قبل الاصطدام في مقرن مركز الكتلة والزاويتين $\theta_1$ و $\theta_2$ لانعطافهما في مقرن المختبر. ورسمنا في ((I.4.(§3.4) الشكلين التاليين، الشكل.1 المقابلين لمقرن مختبر مرتبط بالجسيم $m_2$ : الهدف الثابت وأعطينا العلاقات التالية




b- $m_1 > m_2$




a- $m_1 < m_2$

الشكل.1

$$tg\theta_1 = \frac{\sin\chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\chi} \qquad (I.(4.(3.25)') \qquad (a)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (I.(4.(3.27)) \qquad (b)$$

وبرهنا كذلك أن

$$\frac{AO}{OB} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (c)$$

عندما تتساوى الكتلتان $m_1 = m_2$ فإن النقطة A واقعة على محيط الدائرة $\theta_1 = \frac{\chi}{2}$، $\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_1$ وتأخذ العلاقة التي تعين سرعة الجسيم الوارد في مقرن مركز الكتلة بعد التصادم والمعطاة بـ:

$$V_1' = \frac{V_1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi} \qquad (d)(I.(4.(3.28))$$

الشكل

$$V_1' = V_1\cos\frac{\chi}{2} \qquad (d')$$

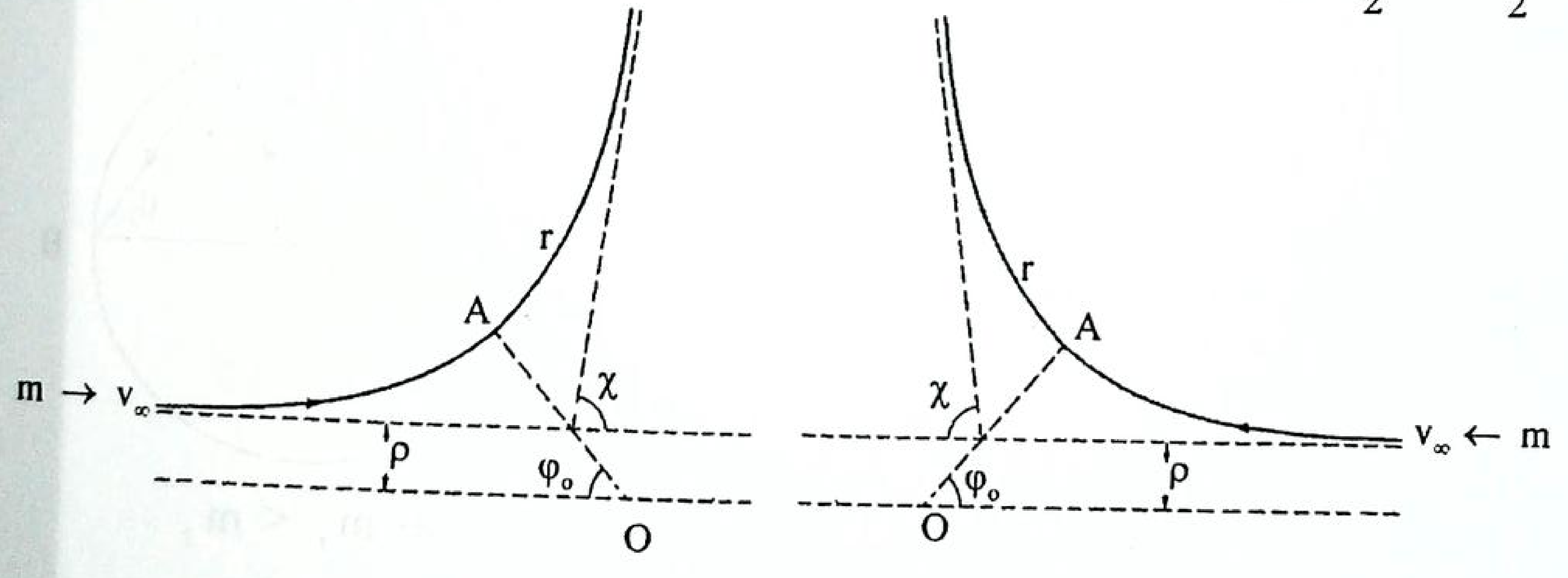
وتلك التي تعين سرعة الجسيم الهدف بعد التصادم

$$V_2' = \frac{2V_1m_1}{m_1 + m_2}\sin\chi/2 \qquad (I.(4.(3.29)) \qquad (e)$$

الشكل

$$V_2' = V_1\sin\chi/2 \qquad (e')$$

بينا أيضاً في هذا الفصل عند دراستنا لمسألة كبلر (I.(4.(§4.4) أن حركة جسيم أت من اللانهاية في حقل نابذ، كمونه من الشكل $\frac{\alpha}{r}$ $\alpha > 0$ على سبيل المثال، هي حركة على شكل قطع زائد لا يحيط بمركز الحقل؛ الطاقة الكلية الموجبة هي الطاقة الحركية للجسيم $m_1$ الآتي من اللانهاية : $\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{m_1v_\infty^2}{2}$ $m_1 << m_2$ و m الكتلة المختصرة




الشكل.2

يمكننا النظر إلى مركز الحقل O كنواة ذرة ثقيلة، شحنتها الموجبة Ze، وإلى الجسيم الآتي من اللانهاية كجسيم صغير الكتلة بالنسبة للنواة، والنظر إلى النقطة O والحال هذه – كما فعلنا في دراستنا لحركة الأرض حول الشمس – كمتطابقة مع مركز الكتلة. رأينا في (I.(4.(4.31)) أن التباعد المركزي أكبر من الواحد من أجل $E > 0$، إلا أننا سنجري الحساب بدليل مقدار جديد هو وسيط التصادم ρ : إنه تعريفاً

المسافة الفاصلة بين اتجاه حركة الجسيم m ومركز الحقل ونسميه أيضاً مركز التبعثر لأنه المسؤول عن تغيير الاتجاه. ليكن r البعد القطبي للجسيم m عن O و φ الزاوية القطبية وليكن L العزم الزاوي المنحفظ للجسيم لدينا

$$L = mr^2\varphi' = m\rho v_\infty \tag{1.1}$$

ولدينا كذلك من انحفاظ الطاقة الكلية

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{m}{2}\left(r'^2 + r^2\varphi'^2\right) + U(r) \tag{1.1'}$$

$$= \frac{mr'^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

نحصل من هذه العلاقة على الدالة الرتيبة العكسية لـ $\frac{dr}{dt}$ وعلى تكاملها

$$t = \int \frac{dr}{\left(\frac{2}{m}(E - U) - \frac{L^2}{m^2r^2}\right)^{1/2}} + \text{ثابتـــة}$$

كما نحصل من انحفاظ العزم الزاوي على φ بدليل ρ، $\frac{\rho v_\infty}{r^2} \cdot dt = d\varphi$، وبشكل خاص على $\varphi_\circ$ التي تعين الحد الأدنى لـ r

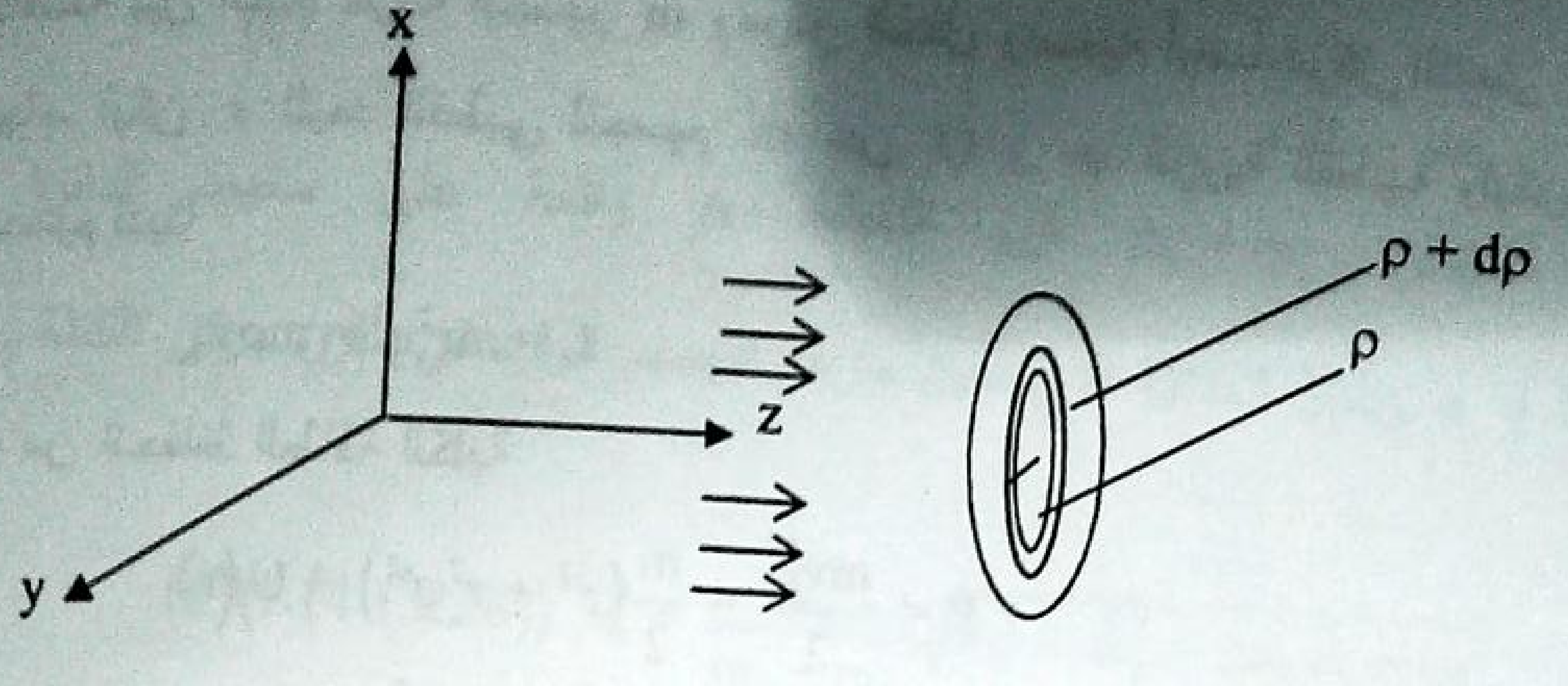
$$|\varphi_\circ| = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{v_\infty \rho}{r^2}dr}{\left(\frac{2}{m}(E - U) - \frac{L^2}{m^2r^2}\right)^{1/2}} \tag{1.2}$$

$$|\varphi_\circ| = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho dr}{r^2}}{\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}\right)^{1/2}} \tag{1.3}$$

وضعنا القيمة المطلقة لـ $\varphi_\circ$ لإنها هي نفسها بالنسبة لـ m آت من اللانهاية من اليمين أو من اليسار. يحدد انعدام الطاقة الحركية $\frac{mr'^2}{2} = 0$ قيمة $r_{min}$، حد التكامل ونستطيع بالتالي حساب قيمة $\varphi_\circ$ ومنها زاوية الانعطاف χ : $\chi = \pi - 2\varphi_\circ$ كما نرى من الشكل.2.

## 2.1- المقطع الفعال

لنفترض الآن أننا لسنا أمام جسيم واحد يحرفه مركز الكمون O عن اتجاهه وإنما أمام عدد كبير من الجسيمات يتراوح وسيط تصادمها بين الصفر وقيمة محددة ρ، الشكل.3 يتوقف الانحراف على قيمة $\varphi_\circ$ التابعة لـ ρ لأنها هي التي تعين زاوية الانحراف χ

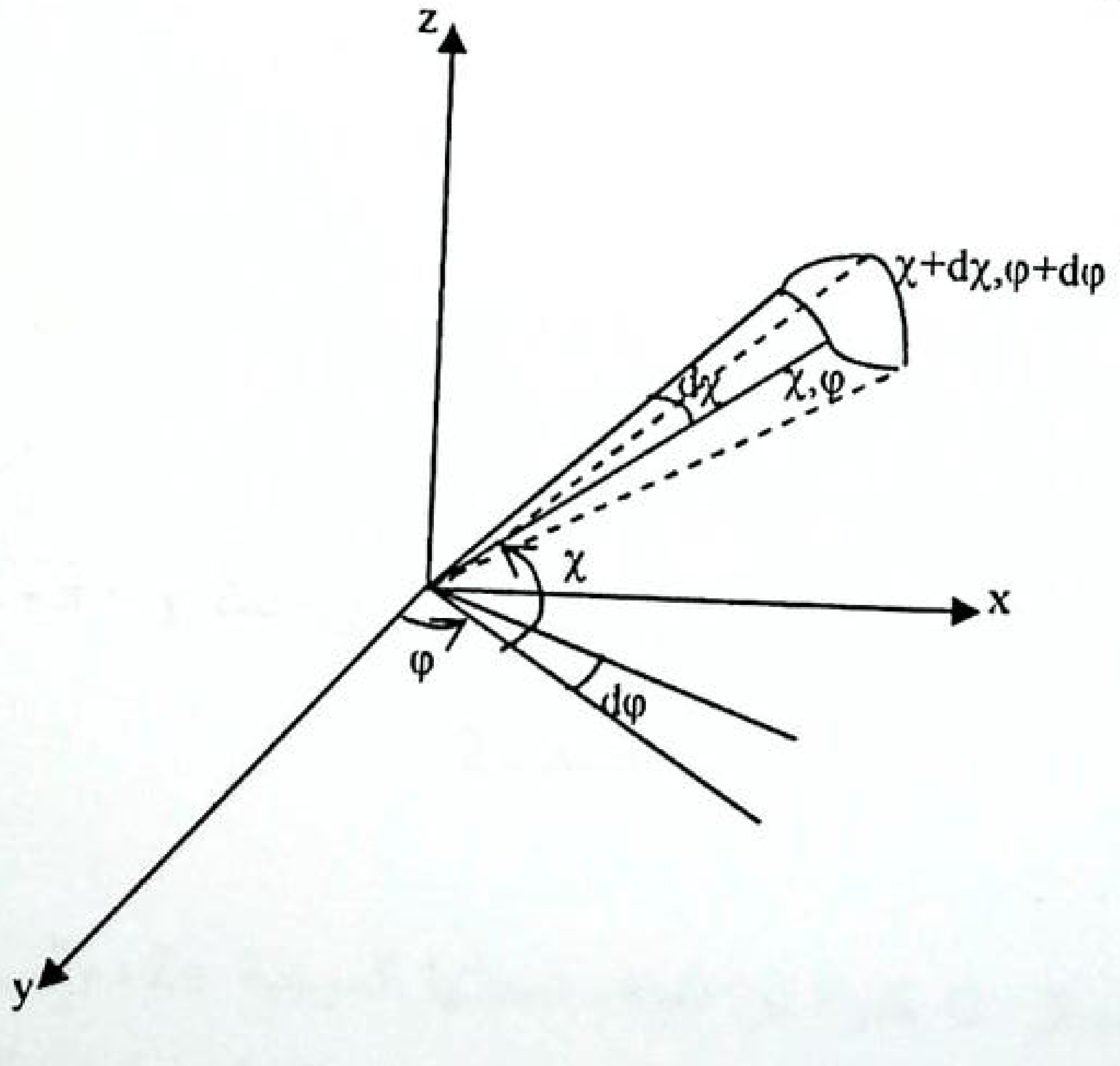



الشكل.3

ونريد معرفة نسبة الجسيمات المنحرفة في اتجاه زاوية مجسمة $d\Omega$ حول الاتجاه المعين بالزاوية $\chi$.

**تعريف 1 :**

نسمي مقطعاً فعالاً Cross Section تفاضلياً عدد الجسيمات في الزاوية المجسمة $d\Omega$ في وحدة الزمن ووحدة التدفق الوارد. أبعاده هي إذاً $[T]^{-1} \cdot \left[\tau\vec{V}\right]^{-1} = [L]^2$ حيث $\tau\vec{V}$ هو التدفق، $\tau$ كثافة الجسيمات (عددها في واحدة الحجوم). إنها أبعاد سطح. ونسمي مقطعاً فعالاً كلياً تكامل المقطع الفعال التفاضلي على كل الزوايا المجسمة. نعين الزاوية المجسمة بزاويتين قطبيتين إحداهما هي $\chi$، كما سميناها هنا ونسمي الأخرى $\varphi$، الشكل.4




الشكل.4

من الطبيعي إذاً أن نكتب المقطع الفعال التفاضلي على شكل كثافة جسيمات مضروبة بالعنصر التفاضلي $d\Omega$

$$\sigma(\varphi,\chi)\,d\Omega = d\sigma \qquad (1.4)$$

والمقطع الفعال الكلي ونرمز له بذات الرمز

$$\sigma = \int \sigma(\varphi,\chi)\,d\Omega \qquad (1.4)'$$

إن الجسيمات المنحرفة حول الاتجاه $\chi$ هي تلك التي انعطفت من المنطقة المحيطة بوسيط تصادم $\rho \in [0, \rho_o]$، أي من المنطقة $2\pi\rho d\rho$ ولذا نكتب

$$\sigma(\varphi,\chi)\,d\Omega = 2\pi\rho d\rho \qquad (1.5)$$

أو

$$= 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi$$

نأخذ القيمة المطلقة لـ $\frac{d\rho}{d\chi}$ لأن الطرف الأيسر موجب دوماً. نكامل من أجل كل قيم الزاوية القطبية $\varphi$ بحيث تصبح الزاوية المجسمة $2\pi\sin\chi d\chi$ والمقطع الفعال التفاضلي :

$$\sigma(\chi) = \left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| \frac{\rho}{\sin\chi} \qquad (1.6)$$

لنأخذ الحالة القصوى التي تتبعثر فيها الجسيمات نتيجة اصطدامها بكرة صلبة نصف قطرها $a$ في مختلف الاتجاهات. إن وسيط الاصطدام في هذه الحالة هو $(x = \rho)$

$$\rho(\chi) = a\sin\varphi_o = a\sin\frac{\pi - \chi}{2} = a\cos\frac{\chi}{2}$$

و

$$\frac{d\rho(\chi)}{d\chi} = \frac{a}{2}\sin\frac{\chi}{2}$$

وبتبديله في (1.6) نحصل على المقطع الفعال التفاضلي

$$\sigma(\chi) = \frac{a^2}{4} \qquad (1.7)$$

والمقطع الفعال الكلي

$$\sigma = \int \frac{a^2}{4}\, d\Omega = \pi a^2$$

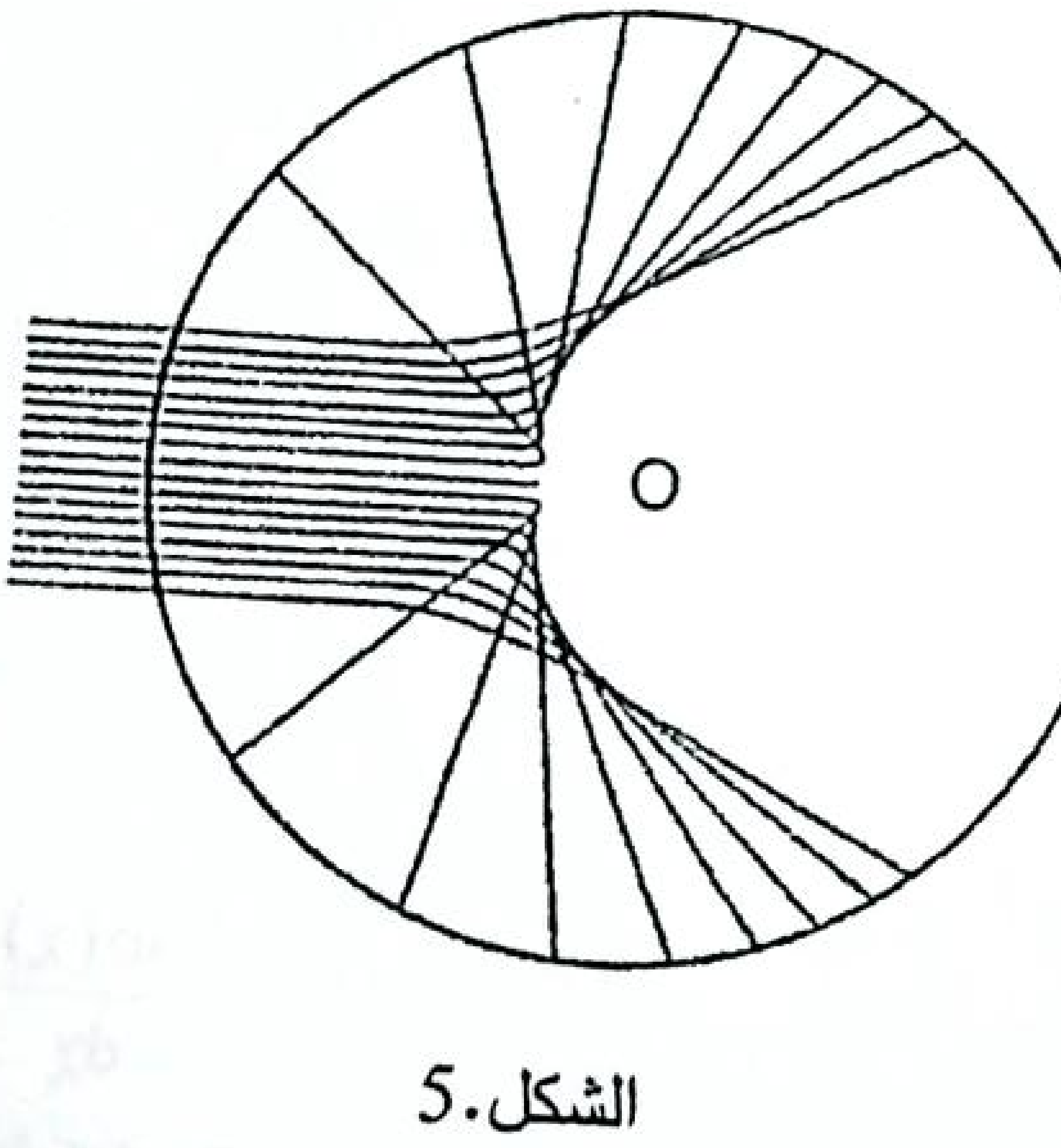
إنه السطح الذي تقابل فيه الكرة الصلبة اتجاه حزمة الجسيمات الواردة عليها.

من الإمكان الحد من قدر ونحاول بينها التفاعلات تهمل بحيث الواردة للجسيمات ضعيفاً تدفقاً عملياً نختار
إنه السطح الذي تقابل فيه الكرة الصلبة اتجاه حزمة الجسيمات الواردة عليها.

الجسيمات : x كبيرة قدر المستطاع حتى لا يتأثر بالجسيمات الواردة ولا يتلقى إلا تلك المبعثرة. هذا يعني أنه يستحيل الكشف عن الجسيمات التي بعثرت في اتجاه الحركة $\chi = 0$ : التبعثر نحو الأمام، الذي نحصل على قيمته باستكمال المقطع الفعال $\sigma(\chi, \varphi)$ من أجل القيم الصغيرة لـ $\chi$.

## 3.1- صيغة روذرفورد

تكمن أهمية هذه الصيغة في برهانها، عام 1911، عن تمركز الشحنة الموجبة للذرة في النواة وعن عدم توزعها على كل الذرة كما كان يظن حتى ذلك الحين، هذا من حيث الأهمية التاريخية؛ إلا أنها مهمة أيضاً لأنها تبقى صحيحة في تقريب نظرية التبعثر الكمومية كما سنرى. تقوم التجربة على قذف مادة ما بجسيمات $\alpha$ الموجبة. يبعثر الحقل الكهربائي النابذ $\frac{Ze}{r}$ هذه الجسيمات التي تأخذ مسارات قطوع زائدة، الشكل.5 ونريد حساب المقطع الفعال التفاضلي مهملين الانعطاف الناتج عن تفاعل شحنة $\alpha$ الموجبة 2e مع الإلكترونات ذات الكتلة الصغيرة.




الشكل.5

لنستبدل في (1.3) الطاقة الكامنة U بـ $\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha = Ze^2)$؛ نقوم بتبديل المتغير r إلى $x = \rho/r$؛ تنقلب حدود التكامل إلى $\int_0^{\rho/r_{min}}$ ثم نقوم بتبديل ثان للمتغير يتيح لنا وضع مخرج (1.3) : $1 - x^2 - 2bx$، حيث $b = \frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}$، على الشكل $1 - x^2 - 2bx = A\left(1 - X^2\right)$ لنجد أن

$$X = \frac{1}{\left(1+b^2\right)^{1/2}}(x+b) \qquad A = \left(1+b^2\right) \qquad (1)$$

ويصبح التكامل:

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{\left(1 - X^2\right)^{1/2}} \qquad (2)$$

يقابل $X_2$ وضع $x = \frac{\rho}{r_{min}}$ في (1) الذي نحسبه من معادلة الطاقة الثابتة '(1.1) عندما تكون الطاقة الحركية $\frac{mr'^2}{2}$ تساوي الصفر :

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{\alpha}{r} + \frac{m^2\rho^2 v_\infty^2}{2mr^2}$$

أو

$$\frac{mv_\infty^2}{2} x^2 + \frac{\alpha}{\rho} x - \frac{mv_\infty^2}{2} = 0 \qquad (3)$$

لنجد أن $X_2 = 1$ . أما $X_1$ فيقابل $x = 0$ في (1) ومنه تكامل (2) أي تكامل (1.3) :

$$\varphi_o = \arc\cos \frac{b}{\left(1 + b^2\right)^{1/2}}$$

$$\varphi_o = \arc\cos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad (1.8)$$

أي

$$\cos\varphi_o = \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 + tg^2\varphi_o\right)^{1/2}}$$

ونحصل منها بسهولة على قيمة وسيط التصادم

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} tg^2\varphi_o = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \cot g^2 \frac{\chi}{2}$$

لأن $\varphi_o = \frac{\pi - \chi}{2}$ كما نرى ذلك في الشكل.2؛ نفاضل هذه العلاقة ونضعها في (1.5) للحصول على المقطع الفعال التفاضلي

$$d\sigma = \sigma(\chi) d\Omega = \pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\chi/2}{\sin^3\chi/2} d\chi \qquad (1.10)$$

ونظراً لأن $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ فالنتيجة هي

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\chi/2}{\sin^3\chi/2} \frac{1}{2\sin\chi} d\Omega$$

أو

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \chi/2} \qquad (1.10)'$$

إنها صيغة رودرفورد التي ترينا أن المقطع الفعال مستقل عن إشارة $\alpha$، بمعنى أن النتيجة هي ذاتها سواء تعلق الأمر بحقل كولومبي نابذ أو جاذب. يجب ألا يغيب عن أذهاننا أننا أجرينا الحساب في مقرن مركز الكتلة – المنطبق على النواة الثقيلة بالنسبة لكتلة الجسيم الوارد. تسمح لنا العلاقتان اللتان أوردناهما في مطلع هذه الفقرة بحساب المقطع الفعال التفاضلي لكلا الجسيمين في مقرن المختبر. يمكن اعتبار مركز مقرن المختبر الجسيم $m_2$، أي اعتبار هذا الجسيم ساكناً أصلاً، كما هي الحال هنا، نكتب $d\sigma$ بدليل الزاوية $\theta_2$ المعطاة بـ (b) : $\chi = \pi - 2\theta_2$ فنحصل من (1.10) على :

$$d\sigma = 2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2} d\theta_2$$

التي نكتبها بدليل الزاوية المجسمة $d\Omega_2 = 2\pi \sin\theta_2 d\theta_2$ لنجد

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3\theta_2} \qquad (1.11)$$

إن كتابة $d\sigma_1$ من أجل الجسيمات الواردة معقد جداً في غالب الأحيان ولذا فلن ننظر إلا إلى بعض الحالات البسيطة.

1– لنفرض بداية أن $m_1 << m_2$. ترينا العلاقة (a) التي تعرف $tg\theta_1$ أن $\theta_1 \cong \chi$ وبالتالي تقترب النقطة A اقتراباً كبيراً من مركز الدائرة حسب (c) لأن $\frac{AO}{BO} = \frac{m_1}{m_2} << 1$. وتقترب الكتلة $m_1$ من الكتلة المختصرة $Om = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. لنلاحظ أن الكتلة في الصيغة '(1.10) هي الكتلة الواردة $m_1$ وأن $m \simeq m_1$ و $2m_1 v_\infty^2 = 4E_1$. لذا نكتب $d\sigma_1$ على الشكل

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}} \qquad (1.12)$$

2– لنفرض أن $m_1 = m_2$ ؛ $m = \frac{m_1}{2}$. نرى من (c) أن $OB = AO$ وتقع A على محيط الدائرة هي أيضاً. بالتالي فإن $\theta_1 = \frac{\chi}{2}$ ؛ تعطينا العلاقة (1.10)

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1} d\Omega_1 \qquad (1.13)$$

وهنا أيضاً $E_1 = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$ هي طاقة الجسيم الوارد؛ $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{2}$.

3- لنفرض أخيراً، إضافة إلى تساوي الكتلتين تطابق الجسيمين. يكفينا في هذه الحالة النظر في مقرن المختبر إلى الجسيمات الناتجة في اتجاه ما $\theta$ عن انعطاف الجسيمات الواردة أو الجسيمات الهدف وبالتالي جمع المقطعين الفعالين التفاضليين (1.11) و (1.13) في صيغة واحدة ($m = \frac{m_1}{2} = \frac{m_2}{2}$)

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\cos^4\theta} + \frac{1}{\sin^4\theta}\right)\cos\theta d\Omega \quad (1.14)$$

لنعد الآن إلى صيغة روذرفورد ولنحسبها بدليل الطاقة التي تفقدها الجسيمات المنحرفة $m_1$. إن سرعة الجسيم الهدف في مقرن مركز الكتلة معطاة بـ ($e$)

والطاقة الحركية لهذا الجسيم هي تلك التي فقدتها $m_1$،

$$\varepsilon = \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{2m^2 v_\infty^2}{m_2}\sin^2\chi/2$$

ومنه بالتبديل في '(1.10) بعد الملاحظة أن $d\Omega = \frac{2\pi m_2}{m^2 v_\infty^2}d\varepsilon$ و $\sin^2\chi/2 = \frac{m_2}{2m^2 v_\infty^2}$

$$d\sigma = 2\pi\frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \quad (1.15)$$

## 4.1- استخراج صيغة روذرفورد كموميا

نتصور الجسيم الوارد على شكل موجة مستوية، عمودية على اتجاه الحركة OZ، من الشكل $e^{ikz}$ والجسيم المتبعثر على شكل موجة كروية سعتها تابعة لزاوية الانعطاف $\theta$ في مقرن المختبر، من الشكل $f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$، إنها الموجة المتباعدة. يجب بالتالي أن نفتش عن حل لمعادلة شرودينغر من الشكل

$$\psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr} \quad (1.16)$$

إن احتمال اجتياز الجسيم المتبعثر عنصر السطح $dS = r^2 d\Omega$ في واحدة الزمن هو $v\frac{|f|^2}{r^2}dS$ وبالتالي فإن نسبة هذا الاحتمال إلى تدفق الجسيمات الواردة $\rho\vec{V}$، حيث $\rho = 1$ (كثافة الجسيمات تساوي 1) هو تعريفاً

$$d\sigma = \frac{v|f^2|}{Vr^2}dS = |f|^2 d\Omega \quad (1.17)$$

حيث $V = v$ لأن التبعثر المرن لا يغير من قيمة السرعة وإنما يعطف الاتجاه فقط.

تعود مسألة البحث عن المقطع الفعال التفاضلي إلى معرفة سعة الموجة الكروية الصادرة، هذا من جهة، ولا يمكن من جهة أخرى النظر في مسألة التبعثر إلا في حالة الطاقة الموجبة أي حالة الطيف المتصل؛ مع وجود تناظر محوري حول OZ ينتج عنه عدم لعب العدد الكمومي المغنطيسي أي دور.

أشرنا في (3.§3.4) إلى حل معادلة شرودينغر من أجل الطيف المتصل بدليل الدالة فوق الهندسية المتدنية والمعرفة في الحقل العقدي ذات الشكل ((3.29).3). يأخذ الحل المقارب لهذه المعادلة (عندما تتناهى $r$ إلى اللانهاية) الشكل (1.16) كما هو متوقع. وتأخذ السعة $f(\theta)$ من أجل حقل كولومبي الشكل التالي

$$f = \frac{1}{2k^2 a_o \sin^2 \theta/2} \tag{1.18}$$

حيث وضعنا $\theta$ بدلاً عن $\chi$ والثابتة $a_o$ هي نصف قطر بور الذي اتخذناه وحدة قياس في الوحدات الكولومبية

$$a_o = \frac{\hbar^2}{m\alpha}$$

و

$$2k^2 a_o = \frac{2\hbar^2 k^2}{m\alpha} = \frac{2p^2}{m\alpha} = \frac{4E}{\alpha}$$

وبالتالي فإن (1.17) تعطينا

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4 \theta/2} d\Omega$$

وهي صيغة روذرفورد '(1.10) التي وجدناها من أجل جسيم وارد كتلته $m_1$ صغيرة أمام الكتلة $m_2$ المولدة للحقل الكولومبي. إن تطابق نتيجة الحساب الكمومي للتبعثر مع الحساب التقليدي وبدون أي تقريب لا يعدو كونه حالة خاصة يتميز بها الكمون الكولومبي المتناسب مع $\frac{1}{r}$ عن الكمونات الأخرى.

## 2. التبعثر الكمومي

### 1.2– الحلول المقاربة للموجة الكروية

وجهنا جل عنايتنا في دراستنا للحقل المركزي على إيجاد حلول منتهية للمعادلة القطرية ((2.4).3) في جوار النقطة $r = 0$. أما الآن فإننا سنبحث لدراسة التبعثر عن حلول مقاربة في اللانهاية بغض النظر عن سلوكها اللامنتهي في جوار المبدأ $r = 0$. إن الموجة الكروية

$$R^{\pm}_{ko} = \frac{Ae^{\pm ikr}}{r} \tag{2.1}$$

المقابلة من أجل $\ell = 0$ لموجة كروية صادرة عن المبدأ، الإشارة +، أو واردة عليه هي أحد هذه الحلول الممكنة رغم عدم تقاربها من أجل $r = 0$. نقول عن الموجة الأولى إنها متباعدة والأخرى متقاربة. إن حل المعادلة القطرية عندما يكون $\ell \neq 0$ هو من الشكل

$$R^{\pm}_{k\ell} = (-1)^{\ell} A \frac{r^{\ell}}{k^{\ell}} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{\ell} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \qquad (2.2)$$

(قارن مع الحل (3.(2.19)) المنتهي من أجل $r = 0$). ويعبر عن هذا الحل بواسطة دالات هانكل Hankel، كما عبرنا عن الحلول الأولى المنتهية بواسطة دالات بسل الكروية. ونريد هنا إيجاد الحل من أجل $r \to \infty$ وكمون يتناهى نحو الصفر في اللانهاية بأسرع من تناهي الكمون الكولومبي، أي من أجل كمون متناسب مع $\frac{1}{r^n}$، $n > 1$، بحيث تأخذ المعادلة القطرية (3.(2.4)) التي نكتبها، بإدخال المشتق الأول لـ $R_{k\ell}$، على الشكل

$$R''_{k\ell} + \frac{2R'_{k\ell}}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{k\ell} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U) R_{k\ell} = 0$$

ثم على الشكل التالي، بحذف كل ما هو متناقص بسرعة عندما $r \to \infty$ أي الحدين بـ $\frac{1}{r^2}$ وما فوق،

$$R''_{k\ell} + \frac{2R'_{k\ell}}{r} + k^2 R_{k\ell} = 0$$

أو $\left(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 (rR_{k\ell})}{dr^2} + k^2 R_{k\ell} = 0 \qquad (2.3)$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$R_{k\ell} \approx \frac{2}{r} \sin\left( kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell} \right) \qquad (2.4)$$

لا يختلف هذا الحل عن الحل المقارب في اللانهاية الذي وجدناه من أجل الحل المنتهي في جوار الصفر والذي كتبناه على الشكل (3.(2.22))

$$R_{k\ell} \approx \frac{2}{r} \sin\left( kr - \frac{\ell\pi}{2} \right) \qquad (2.4)'$$

إلا بوجود الثابتة $\delta_{\ell}$ المسماة انزياح الطور Phase shift والتي تعين انحراف الحل بوجود الكمون عن الحل الحر. تتحدد هذه الثابتة بشرط تناهي الحل في (2.3) إلى الصفر من أجل $r \to 0$ أي بإيجاد حل مضبوط لمعادلة شرودينغر.

يمكننا أن نكتب معادلة انزياح الطور بأن نلاحظ أن $R_{k\ell}$ المؤدية إلى '(2.4) هي حل المعادلة القطرية الحرة. إنها

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rR_{k\ell}) + \left( k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_{k\ell} = 0 \qquad (1)$$

وأن $S_{k\ell}$ المؤدية إلى (2.4) هي حل المعادلة القطرية العامة

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rS_{k\ell}) + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)S_{k\ell} - \frac{2m}{\hbar^2}US_{k\ell} = 0 \quad (2)$$

لنضرب المعادلة الأولى بـ $r^2S_{k\ell}$ – والثانية بـ $r^2R_{k\ell}$، ثم لنجمع المعادلتين ونضع النتيجة على الشكل

$$(3)\ \frac{d}{dr}\left\{(rR_{k\ell})\frac{d}{dr}(rS_{k\ell}) - (rS_{\ell})\frac{d}{dr}(rR_{k\ell})\right\} = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)r^2S_{k\ell}R_{k\ell}$$

الذي يعطينا بالمكاملة

$$(4)\ \left[(rR_{k\ell})\frac{d}{dr}(rS_{k\ell}) - (rS_{k\ell})\frac{d}{dr}(rR_{k\ell})\right]_{r=r_0} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_0^{r_0}U(r)r^2S_{k\ell}R_{k\ell}(r)dr$$

عندما تتناهى $r_0$ إلى $+\infty$ فنحصل بفضل (2.4) و '(2.4) لنبدل أخيراً S و R بقيمتيهما المقاربتين

المتطابقة المثلثاتية

$$\sin a\cos(a+\delta) - \sin(a+\delta)\cos a = -\sin\delta \quad (5)$$

على الصيغة المضبوطة لانزياح الطور

$$-k\sin\delta_\ell(k) = \frac{m}{\hbar^2}\int_0^{\infty}U(r)\ r^2R_{k\ell}(kr)S_{k\ell}(kr)dr \quad (2.5)$$

لكننا لا نستطيع مع الأسف حساب التكامل لأننا لا نعرف الحل المضبوط للمعادلة القطرية العامة. نحصل على حل تقريبي لـ (2.5) باستبدال $R_{k\ell}$ بـ $S_{k\ell}$ في التكامل.

## 2.2– حساب المقطع الفعال بدليل انزياح الطور $\delta_\ell$

رأينا في الفصل الثالث أن حل معادلة شرودينغر في حقل مركزي والمعين بالعدد الكمومي المداري $\ell$ هو من الشكل

$$R_{k\ell}(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi) = R_{k\ell}(r)P_\ell^m(\theta)e^{im\varphi}$$

الذي يأخذ في حالة الاستقلال عن $\varphi$، حالة التناظر حول Oz، الشكل

$$R_{k\ell}(r)P_\ell(\theta)$$

وهكذا فإن الحل العام لهذه المعادلة هو بتوضيع كل الحلول الممكنة، كل الموجات الجزئية كما يسمونها

$$\psi = \sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell P_\ell(\cos\theta)R_{k\ell}(r) \quad (2.6)$$

حيث $P_\ell(\theta)$ كثير حدود لوجاندر المعرف بـ $(3.(1.40)_2)$، $R_{k\ell}$ حل المعادلة القطرية التي أعدنا كتابتها أعلاه و $A_\ell$ ثابتة يجب تعيينها بتطابق الحل (2.6) من أجل القيم الكبيرة لـ r مع الحل (1.16).

**قضية 1 :**

تأخذ الثوابت $A_\ell$ الشكل

$$A_\ell = \frac{1}{2k}(2\ell+1)i^\ell e^{i\delta_\ell} \tag{2.7}$$

كتبنا نشر الموجة المستوية من أجل $r \to \infty$ على الشكل ("(3.(2.26) التالي

$$e^{ikz} \approx \frac{1}{kr}\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

نكتب في هذا النشر $\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$ على شكل أسي مع الملاحظة أن

$$e^{\pm i\ell\pi/2} = (\pm i)^\ell$$

ليأخذ الشكل

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left[(-1)^{\ell+1} e^{-ikr} + e^{ikr}\right] \tag{2.8}$$

ننشر $R_{k\ell}$ المعطى بـ (2.4) على نفس النحو

$$R_{k\ell} \approx \frac{1}{ir}\left[(-i)^\ell e^{i(kr+\delta_\ell)} - (i)^\ell e^{-i(kr+\delta_\ell)}\right]$$

ونضعها في (2.6)، ونضع $e^{ikz}$ في حل معادلة شرودينغر (1.16)

$$e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos\theta) R_{k\ell} \tag{2.6'}$$

ونقارن الطرفين : يجب أن تنعدم الحدود بـ $e^{-ikr}$ أي أن يكون

$$\frac{(2\ell+1)}{2ikr}(-1)^{\ell+1} = \frac{1}{ir} \times -(i)^\ell e^{-i\delta_\ell} A_\ell$$

وبذلك نكون، نظراً لأن $(-1)^{\ell+1} = -i^\ell i^\ell$، قد برهنا القضية.

وهكذا نحصل على معامل $\frac{e^{ikr}}{r}$ في طرفي المعادلة '(2.6)

$$\frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta) + f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{2k} i^\ell e^{i\delta_\ell} \times \frac{1}{i}(-i)^\ell e^{i\delta_\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

ومنه

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left(e^{2i\delta_\ell} - 1\right)P_\ell(\cos\theta) \tag{2.9}$$

ونكون قد توصلنا إلى حل مسألة سعة التبعثر بدليل انزياح الطور $\delta_\ell$ ومنها، حسب (1.17) التي تعرف المقطع الفعال التفاضلي، المقطع الفعال الكلي

$$\sigma = 2\pi\int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta$$

إن كثيرات حدود لوجاندر متعامدة ونظمناها بالعلاقة ('(3.(1.40) التي نكتبها هنا حيث $x = \cos\theta$ على الشكل

$$\int_0^\pi P_\ell^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1}$$

**قضية 1** :

تأخذ الثوابت $A_\ell$ الشكل

$$A_\ell = \frac{1}{2k}(2\ell+1)i^\ell e^{i\delta_\ell} \tag{2.7}$$

كتبنا نشر الموجة المستوية من أجل $r \to \infty$ على الشكل ("(3.(2.26)) التالي

$$e^{ikz} \approx \frac{1}{kr}\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

نكتب في هذا النشر $\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$ على شكل أسي مع الملاحظة أن

$$e^{\pm i\ell\pi/2} = (\pm i)^\ell$$

ليأخذ الشكل

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left[(-1)^{\ell+1}e^{-ikr} + e^{ikr}\right] \tag{2.8}$$

ننشر $R_{k\ell}$ المعطى بـ (2.4) على نفس النحو

$$R_{k\ell} \approx \frac{1}{ir}\left[(-i)^\ell e^{i(kr+\delta_\ell)} - (i)^\ell e^{-i(kr+\delta_\ell)}\right]$$

ونضعها في (2.6)، ونضع $e^{ikz}$ في حل معادلة شرودينغر (1.16)

$$e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos\theta) R_{k\ell} \tag{2.6'}$$

ونقارن الطرفين : يجب أن تنعدم الحدود بـ $e^{-ikr}$ أي أن يكون

$$\frac{(2\ell+1)}{2ikr}(-1)^{\ell+1} = \frac{1}{ir}\times -(i)^\ell e^{-i\delta_\ell}A_\ell$$

وبذلك نكون، نظراً لأن $(-1)^{\ell+1} = -i^\ell i^\ell$، قد برهنا القضية.

وهكذا نحصل على معامل $\frac{e^{ikr}}{r}$ في طرفي المعادلة '(2.6)

$$\frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta) + f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{2k}i^\ell e^{i\delta_\ell} \times \frac{1}{i}(-i)^\ell e^{i\delta_\ell}P_\ell(\cos\theta)$$

ومنه

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left(e^{2i\delta_\ell} - 1\right)P_\ell(\cos\theta) \tag{2.9}$$

ونكون قد توصلنا إلى حل مسألة سعة التبعثر بدليل انزياح الطور $\delta_\ell$ ومنها، حسب (1.17) التي تعرف المقطع الفعال التفاضلي، المقطع الفعال الكلي

$$\sigma = 2\pi\int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta$$

إن كثيرات حدود لوجاندر متعامدة ونظمناها بالعلاقة ('(3.(1.40)) التي نكتبها هنا حيث $x = \cos\theta$ على الشكل

$$\int_0^\pi P_\ell^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1}$$

ومنه المقطع الفعالي الكلي

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell \qquad (2.10)$$

إن كل حد من حدود هذه العلاقة هو مقطع فعال جزئي $\sigma_\ell$ لتبعثر الجسيمات ذات العزم المداري المعين بـ $\ell$ ويأخذ قيمته العظمى من أجل $\sin^2\delta_\ell = 1$. إنه

$$\sigma_{\ell_{max}} = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$$

لنلاحظ أن حساب المقطع الفعال للموجة المستوية الحرة (2.8) يعطي

$$^{1}\sigma_\ell = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$$

أي أنه يمكن لعدد الجسيمات المتبعثرة ذات العدد الكمومي $\ell$ أن يكون أكبر بأربع مرات من عدد هذه الجسيمات في التدفق الوارد : إنه مفعول كمومي صرف ناتج عن تداخل الجسيمات المتبعثرة وغير المتبعثرة.

## 3.2– الشكل التكاملي لحلول معادلة شرودينغر – دالات غرين Green

سنرسم في البداية الخطوط العريضة لطريقة عامة نكتب فيها حل المعادلات التفاضلية على شكل تكامل مركزين انتباهنا على معادلة شرودينغر ومعادلة الموجة بصورة عامة. لا يتيح الشكل التكاملي إعطاء الحلول المضبوطة للمعادلة التفاضلية إلا أنه يفيد في حساب التقريبات المتتالية.

لنكتب معادلة القيم الخاصة لـ $H$ في الحالات المستقرة على الشكل

$$(\nabla^2 + k^2)|\psi(\vec{r})\rangle = \frac{2mU(\vec{r})}{\hbar^2}|\psi(\vec{r})\rangle \qquad (2.11)$$

حيث' الكمون ذو مدى محدد $d$ : $U(r) = 0$ من أجل $|r| \geq d$ ومعادلة الموجة هي معادلة جسيم حر خارج هذا المجال

$$|\psi_o(r)\rangle = e^{i\vec{k}_o\vec{r}} \quad ، \quad (\nabla^2 + k^2)|\psi_o(r)\rangle = 0 \quad ، \quad k^2 = k_o^2 \qquad (2.12)$$

وهو حل منظم من أجل تدفق $\vec{V} = \frac{\hbar\vec{k}_o}{m}$ (جسيم واحد في واحدة الحجوم).

لنفرض أننا حصلنا بشكل ما على الدالة (التوزيعة) $G(\vec{r} - \vec{r}')$ التي تحل المعادلة التفاضلية التالية

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \qquad (2.13)$$

نحصل عندئذ على حل المعادلة (2.11) المعطى على شكل تكامل

---

[1] عندما نكتب هذه العلاقة من أجل مجال معين $\Delta\ell$ من قيم العزم الزاوي $\ell$ (حيث $1 << \Delta\ell << \ell$)

$$\sum_{\Delta\ell}\sigma = \frac{\pi}{k^2}2\ell\Delta\ell$$

ونعبر عنها بدليل وسيط التصادم $\rho p = \hbar\ell$ فنحصل على $\sum_{\Delta\ell}\sigma = 2\pi\rho\Delta\rho$ أي على المقطع الفعال التقليدي (1.5).

$$|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi_0(\vec{r})\rangle + \int \bar{G}(r - \vec{r}')\frac{2mU(r')}{\hbar^2}|\psi(\vec{r}')\rangle d\vec{r}' \qquad (2.14)$$

**تعريف 2 :**

نسمي الدالة (التوزيعة) التي تحل المعادلات التفاضلية بدون طرف ثان، أو على وجه الدقة بطرف ثان هو قياس (توزيعة) ديراك، دالة غرين ونقول عن التكامل المكتوب على الشكل (2.14) حيث إحدى الدالتين تابعة لـ $(\vec{r} - \vec{r}')$ فقط إنه جداء التلاف Convolution لهاتين الدالتين أو التوزيعتين. يطلق أيضاً على هذا الجداء اسم النواة Kernel.

نتحقق من كون متجهة الحالة (2.14) حلاً لـ (2.11) بتطبيق المؤثر التفاضلي $\nabla^2 + k^2$ على طرفيها وأخذ (2.12) و (2.13) بعين الاعتبار

$$(\nabla^2 + k^2)|\psi(r)\rangle = 0 + \int(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}')\frac{2m}{\hbar^2}U(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}'$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\psi(\vec{r})$$

ويمكن على العكس البرهان أن كل حل لـ (2.11) يحقق (2.14)؛ وهو ما يمكن تفهمه حدسياً باعتبار $\frac{2mU(r)}{\hbar^2}$ طرفاً ثانياً في (2.11) والنظر إلى الحل (2.14) كتوضيع للحل العام بدون طرف ثان ولأحد الحلول الخاصة مع طرف ثان.

تسمح (2.13) بتحديد محول فوريي لدالة غرين[2] التي نكتبها هي و $\delta$ على الشكل

$$\begin{cases} G(\vec{r} - \vec{r}') = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}(\vec{r} - \vec{r}')}G(q)d\vec{q} & (2.15) \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}(\vec{r} - \vec{r}')}d\vec{q} & (2.15)\text{ج} \end{cases}$$

لنجد أن

$$G(q) = \frac{1}{k^2 - q^2}$$

لهذه التوزيعة قطبان هما $q = \pm k$.

نحسب التكامل (2.15) لنجد، بوضع $d\vec{q} = 2\pi\sin\theta d\theta q^2 dq$ ثم المكاملة على الزاوية $\theta$،

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{e^{i|\vec{q}||\vec{r} - \vec{r}'|\cos\theta}}{k^2 - q^2}2\pi\sin\theta d\theta q^2 dq \qquad (2.16)$$

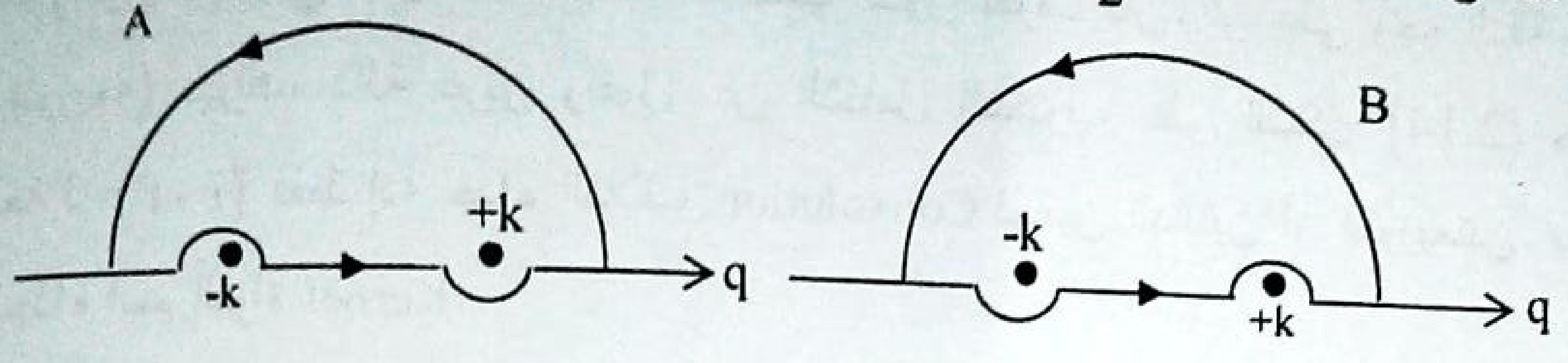
$$= \frac{1}{4\pi^2 i|\vec{r} - \vec{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i|\vec{q}||\vec{r} - \vec{r}'|}q dq}{k^2 - q^2}$$

حيث أعطى التكامل على $\theta$ الحدين $e^{\pm i|\vec{q}||\vec{r} - \vec{r}'|}$، ومنه التكامل من $-\infty$ إلى $+\infty$.

---

[2] فضلنا هنا التناظر بين $\delta$ و $G$ فوضعنا المنظم $\frac{1}{(2\pi)^3}$ عوضاً عن $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ الذي اعتدنا استعماله.

نحسب التكامل (2.16) بطريقة البواقي. نتجنب القطب $\mp k$ في السير على الدائر A أو الدائر B على الترتيب، الشكل.6. وهكذا نحصل عند كتابة $\frac{1}{k^2-q^2}=\frac{-2}{q}\left(\frac{1}{q-k}+\frac{1}{q+k}\right)$ على الباقي من أجل الدائر A، بوضع $|\vec{r}-\vec{r}'|=x$ : $\frac{-e^{ikx}}{2}$ والباقي من أجل الدائر B : $\frac{-e^{-ikx}}{2}$، ومنه بالتكامل[3]




الشكل.6

$$G^+(x)=-\frac{e^{ikx}}{4\pi x} \qquad (2.17)$$

و

$$G^-(x)=-\frac{e^{-ikx}}{4\pi x} \qquad (2.18)$$

لنستبدل في (2.14) $G(\vec{r}-\vec{r}')$ بالقيمة (2.17) (الموجة الصادرة) لنحدد متجهة الحالة لمسألة التبعثر على شكل تكامل

$$\psi(\vec{r})=\psi_o(\vec{r})-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}U(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}' \qquad (2.19)$$

إن $U(r)$ معدوم خارج المجال $r'=d$ ونريد في مسألة التبعثر معرفة السلوك المقارب لـ $\psi(\vec{r})$ $\vec{r}>>\vec{r}'$؛ نكتب الفرق :

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=r\left(1-\frac{2\,\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

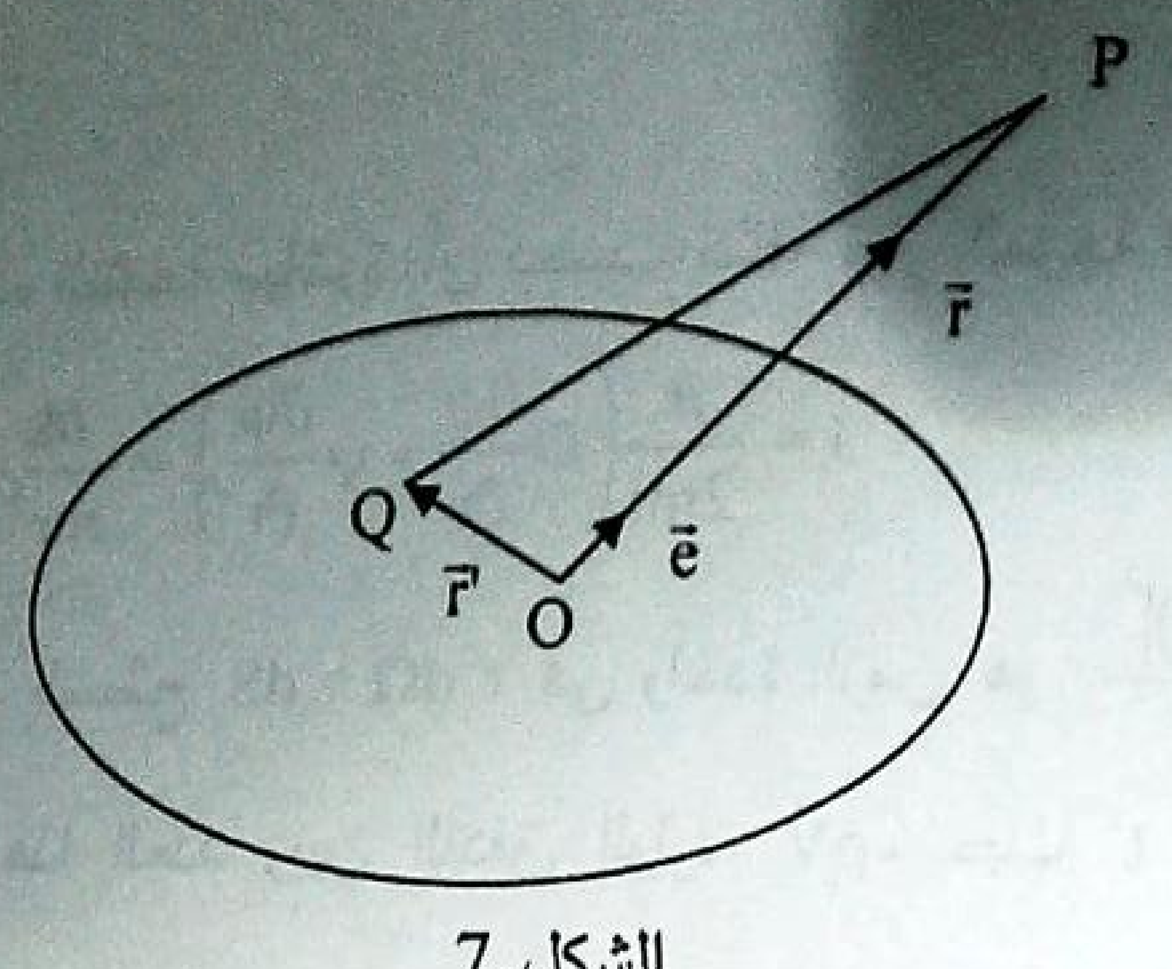
نهمل الحد الأخير ونأخذ الحدين الأولين في نشر الجذر

$$=r\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)=r-\vec{e}\cdot\vec{r}'$$

حيث $\vec{e}$ متجهة الوحدة على المستقيم الذي يعين وضع نقطة الرصد P البعيدة بالمسافة r عن مركز الحقل و Q نقطة ما من المجال $r'\le d$، الشكل.7.

---

[3] يمكن المكاملة بطريقة أخرى بأخذ k عقدي $k\pm i\varepsilon$ وجعل $\varepsilon\to 0$ بحيث يصبح القطبان عقديين $q=\pm(k\pm i\varepsilon)$.



الشكل.7

ونكتب الصيغة المقاربة لـ $\psi(\vec{r})$ على النحو التالي

$$\psi(\vec{r}) = \psi_o(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-ik\vec{e}\cdot\vec{r}'}U(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}' \qquad (2.20)$$

نكتب الموجة المستوية تحت إشارة التكامل بدليل $\vec{r}$ ونرمز لها بـ $e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = \bar{\psi}'_o(\vec{r})$، $\vec{k}' = k\frac{\vec{r}}{r}$ بحيث يبدو التكامل على شكل عنصر "المصفوفة" U بين $\psi(\vec{r})$ و $\psi'_o(\vec{r})$ ونكتبه

$$\langle\psi'_o|U|\psi\rangle$$

إنها سعة الانتقال من متجهة $\psi(\vec{r})$ بفعل الطاقة الكامنة، المؤثر U، إلى متجهة حرة $\psi'_o(\vec{r})$ بعيدة عن تأثير الكمون. وضعنا كلمة مصفوفة بين مزدوجتين لأنها ليست مصفوفة بالمعنى الدقيق للكلمة : لا تنتمي المتجهتان $\langle\psi'_o(\vec{r})|$ و $|\psi(\vec{r}')\rangle$ إلى نفس القاعدة، ومع ذلك فمن الممكن تحويلها إلى مصفوفة.

وهكذا فإن سعة الموجة الكروية $\frac{e^{ikr}}{r}$، التي سنرمز لها أيضاً بـ f هي

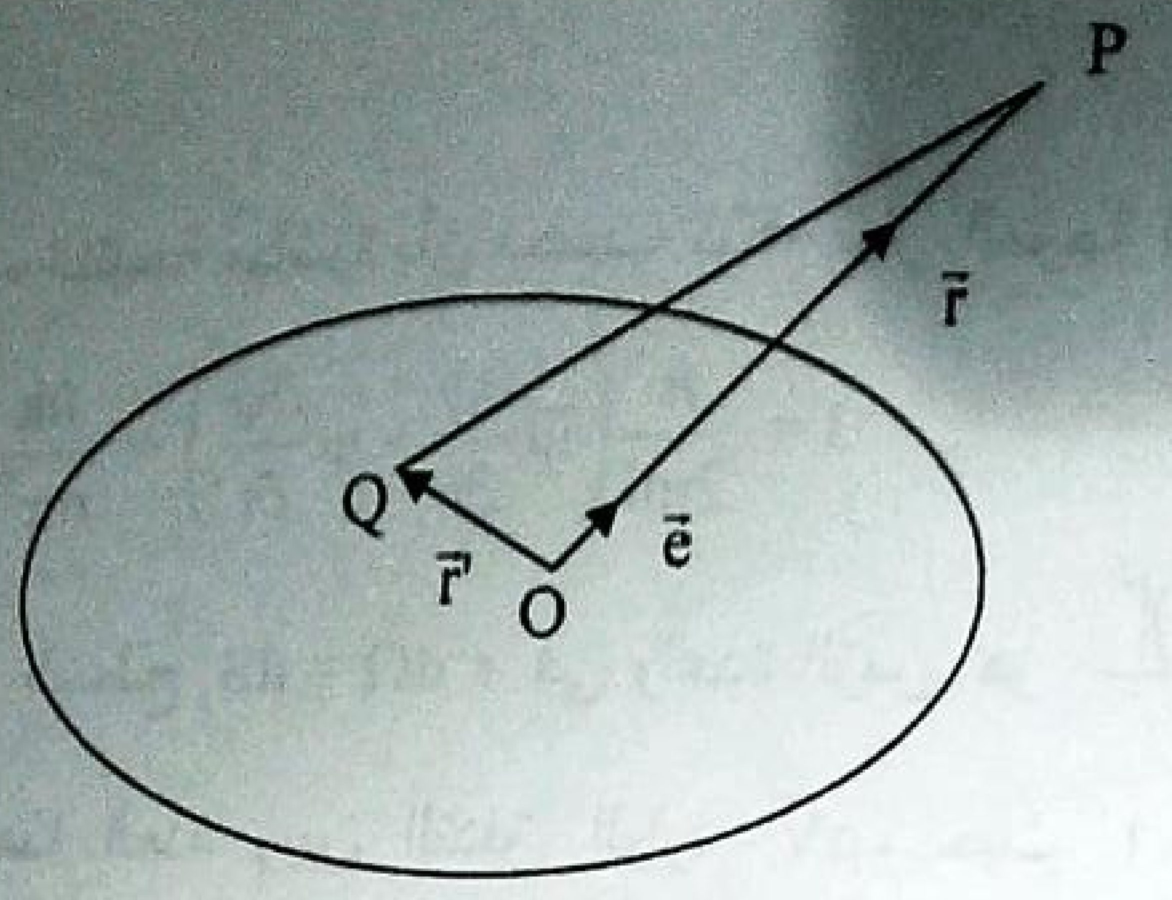
$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\psi'_o|U|\psi\rangle \qquad (2.21)$$

يقع $\vec{k}$ في اتجاه $\vec{r}$، ويقع $\vec{k}'$ تعريفاً في اتجاه $\vec{r}'$ وهكذا فإن f تابعة للزاويتين القطبيتين φ و θ اللتين تحددان التبعثر، وللزاوية θ وحدها عندما يكون المحور Oz محور تناظر كما رأينا ونعود إلى كتابة $\psi(\vec{r})$ في (2.20) على شكل موجة مستوية واردة $\psi_o(\vec{r}) = e^{ikz}$ وموجة كروية صادرة

$$\psi_o(r) \approx e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (2.20)'$$

إن المقطع الفعال التفاضلي هو حسب (1.17)، حيث v في الصورة هي $\frac{\hbar k}{m}$ (سرعة موجة الحالة المبعثرة) و V في المخرج هي $\frac{\hbar k_o}{m}$ (سرعة موجة الحالة الواردة)

$$d\sigma = \frac{k}{k_o}|f(\theta)|^2 d\Omega \qquad (2.22)$$




الشكل.7

ونكتب الصيغة المقاربة لـ $\psi(\vec{r})$ على النحو التالي

$$\psi(\vec{r}) = \psi_o(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-ik\vec{e}\cdot\vec{r}'}U(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}' \qquad (2.20)$$

نكتب الموجة المستوية تحت إشارة التكامل بدليل $\vec{r}$ ونرمز لها بـ $\bar{\psi}'_o(\vec{r}) = e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}$، $\vec{k}' = k\frac{\vec{r}}{r}$ بحيث يبدو التكامل على شكل عنصر "المصفوفة" $U$ بين $\psi(\vec{r})$ و $\psi'_o(\vec{r})$ ونكتبه

$$\langle\psi'_o|U|\psi\rangle$$

إنها سعة الانتقال من متجهة $\psi(\vec{r})$ بفعل الطاقة الكامنة، المؤثر $U$، إلى متجهة حرة $\psi'_o(\vec{r})$ بعيدة عن تأثير الكمون. وضعنا كلمة مصفوفة بين مزدوجتين لأنها ليست مصفوفة بالمعنى الدقيق للكلمة : لا تنتمي المتجهتان $|\psi(\vec{r}')\rangle$ و $|\psi'_o(\vec{r})\rangle$ إلى نفس القاعدة، ومع ذلك فمن الممكن تحويلها إلى مصفوفة.

وهكذا فإن سعة الموجة الكروية $\frac{e^{ikr}}{r}$، التي سنرمز لها أيضاً بـ $f$ هي

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\psi'_o|U|\psi\rangle \qquad (2.21)$$

يقع $\vec{k}$ في اتجاه $\vec{r}$، ويقع $\vec{k}'$ تعريفاً في اتجاه $\vec{r}'$ وهكذا فإن $f$ تابعة للزاويتين القطبيتين $\varphi$ و $\theta$ اللتين تحددان التبعثر، وللزاوية $\theta$ وحدها عندما يكون المحور $Oz$ محور تناظر كما رأينا ونعود إلى كتابة $\psi(\vec{r})$ في (2.20) على شكل موجة مستوية واردة $\psi_o(\vec{r}) = e^{ikz}$ وموجة كروية صادرة

$$\psi_o(r) \approx e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (2.20)'$$

إن المقطع الفعال التفاضلي هو حسب (1.17)، حيث $v$ في الصورة هي $\frac{\hbar k}{m}$ (سرعة موجة الحالة المبعثرة) و $V$ في المخرج هي $\frac{\hbar k_o}{m}$ (سرعة موجة الحالة الواردة)

$$d\sigma = \frac{k}{k_o}|f(\theta)|^2 d\Omega \qquad (2.22)$$

**ملاحظات :**

1- يمكن الحصول على هذه النتيجة مباشرة بأن نحسب كثافة تيار الموجة الكروية $f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$، إنه

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r}\right) = \frac{\hbar k}{mr^2}|f(\theta)|^2$$

وعدد الجسيمات التي تجتاز السطح $r^2 d\Omega = dS$ في واحدة الزمن هو $\frac{\hbar k|f(\theta)|^2}{m}$. أما المقطع الفعال التفاضلي فهو النسبة بين هذا العدد وبين التدفق الوارد $\rho\bar{V}$، حيث $\rho = 1$ كما اخترنا حتى الآن و $|\bar{V}| = \frac{\hbar k_o}{m}$، ونجد (2.22).

2- لم تظهر النسبة $\frac{k}{k_o}$ في الحسابات السابقة لأننا لم نأخذ حتى الآن بعين الاعتبار تغير بنية الجسيمات نتيجة الاصطدام أي أننا نظرنا إلى الاصطدام كاصطدام مرن وهو في واقع الأمر انعطاف جسيم بفعل حقل ناتج عن جسيم آخر. إن $k = k_o$ في هذه الحالة كما في (1.17) وهكذا فإن (2.22) صالحة في التصادمات المرنة وغير المرنة كذلك.

3- لم نأخذ بعين الاعتبار إلا الحل الموجب (2.17) (الموجة الصادرة) وأهملنا الحل السالب (2.18)، وهذا يذكرنا بما فعلناه في الكهرطيسية حيث أهملنا الحلول من الشكل $g\left(t + \frac{r}{c}\right)$ التي تقابل الكمون المسبق ولم نحتفظ إلا بالكمون المتأخر. إن معادلة الكمون الكهرطيسي رباعي الأبعاد هي من الشكل

$$\square^2 A = J$$

حيث $\square^2$ هو الدالامبرسي : $\frac{\partial^2}{\partial x_o^2} - \nabla^2$. إن هذه المعادلة حالة خاصة من المعادلات الكمومية التي سندرسها في الفصل القادم

$$\left(\square^2 + m^2\right)\psi^2 = J$$

المعبرة كمومياً عن معادلة الطاقة النسبوية $E^2 = P^2 + m^2$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_o^2} - \nabla^2 + m^2 = 0$$

حيث أخذنا لتبسيط الكتابة وحدات قيمة $\hbar$ و $c$ فيها تساوي الواحد.

نعرف دالة غرين بالعلاقة التالية

$$\left(\square^2 + m^2\right)G(x - x') = \delta(x - x')$$

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ikx}G(k)dk$$

حيث $k = \left(k^o, \vec{k}\right)$ و $x = \left(x_o, \vec{x}\right)$ حيث $k^o$ هي الطاقة، ومحول فوريي لهذه الدالة هو

$$G(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2}$$

وهو يساوي اللانهاية على مجسم القطع الزائد ذي الفرعين $k^2 - m^2 = 0$ (ويساوي الصفر على مخروط الضوء في الفضاء الثنوي $k$ $k^2 = 0$ من أجل الجسيمات التي تساوي كتلتها الصفر (النوترون مثلاً)) فهو دالة شاذة، ننظمها كما في الحالة ثلاثية الأبعاد، بالنظر إلى $k^o$ كمتغير عقدي وكتابة $G(k)$ على الشكل

$$G(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{(k^o \pm i\varepsilon)^2 - \vec{k}^2 - m^2} \tag{2.23}$$

ونكتب

$$G_{\substack{ret \\ av}}(x - x') = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk e^{ik(x-x')}}{k^2 - m^2 \pm 2i\varepsilon k^o} \tag{2.24}$$

حيث ret و av ترمزان إلى متأخر (مؤخر) ومسبق، ونبرهن بأخذ دائر مناسب أن

$G_{ret}(x - x') = 0$ من أجل $x^0 < x'^0$

ومنه كلمة مؤخر : تأتي لحظة تأثير الكمون في النقطة $x' = (x'^0, \vec{x}')$ بعد وقوعها في النقطة x. وعلى العكس فإن

$G_{av}(x - x') = 0$ من أجل $x^0 > x'^0$

ومنه كلمة مسبق : تتأثر النقطة 'x بالكمون قبل حدوثه في النقطة x ! ولذا يهمل هذا الحد الذي يعبر عن الموجات الواردة في كل ما فعلناه حتى الآن. ولكنه يعود إلى احتلال مكانه في نظرية الحقول المكممة لأنه يعبر عن الجسيمات المضادة.

## 3. تقريب بورن Born

### 1.3- حل المعادلة التكاملية بالتكرار

يمكننا حساب متجهة الحالة $|\psi(\vec{r})\rangle$ في (2.14) بنفس الطريقة التي حسبنا فيها $\psi(\vec{r})$ أي بكتابتها على الشكل

$$|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi_o(\vec{r})\rangle + \int G(\vec{r} - \vec{r}'') \frac{2m}{\hbar^2} U(r'') |\psi(\vec{r}'')\rangle d\vec{r}'' \tag{3.1}$$

ثم استبدال $|\psi(\vec{r})\rangle$ في (2.14) بـ (3.1) وتكرار هذه العملية عدد المرات التي نشاء.

ليست هذه المرة الأولى التي نفتش فيها عن حلول للمعادلة التكاملية بالتكرار، فقد فعلنا ذلك عند تعريفنا لدالة غرين في ((1.(5.15)) وحسابنا لسعة الانتقال من متجهة الحالة $|q(t_o)\rangle$ إلى $|q(t)\rangle$ بواسطة

وهو يساوي اللانهاية على مجسم القطع الزائد ذي الفرعين $k^2 - m^2 = 0$ (ويساوي الصفر على مخروط الضوء في الفضاء الثنوي $k$ $k^2 = 0$ من أجل الجسيمات التي تساوي كتلتها الصفر (النوترون مثلاً)) فهو دالة شاذة، ننظمها كما في الحالة ثلاثية الأبعاد، بالنظر إلى $k^0$ كمتغير عقدي وكتابة $G(k)$ على الشكل

$$G(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{\left(k^0 \pm i\varepsilon\right)^2 - \vec{k}^2 - m^2} \tag{2.23}$$

ونكتب

$$G_{\substack{ret \\ av}}(x - x') = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk e^{ik(x-x')}}{k^2 - m^2 \pm 2i\varepsilon k^0} \tag{2.24}$$

حيث ret و av ترمزان إلى متأخر (مؤخر) ومسبق، ونبرهن بأخذ دائر مناسب أن

$$G_{ret}(x - x') = 0 \quad \text{من أجل} \quad x^0 < x'^0$$

ومنه كلمة مؤخر : تأتي لحظة تأثير الكمون في النقطة $x' = \left(x'^0, \vec{x}'\right)$ بعد وقوعها في النقطة $x$. وعلى العكس فإن

$$G_{av}(x - x') = 0 \quad \text{من أجل} \quad x^0 > x'^0$$

ومنه كلمة مسبق : تتأثر النقطة $x'$ بالكمون قبل حدوثه في النقطة $x$ ! ولذا يهمل هذا الحد الذي يعبر عن الموجات الواردة في كل ما فعلناه حتى الآن. ولكنه يعود إلى احتلال مكانه في نظرية الحقول المكممة لأنه يعبر عن الجسيمات المضادة.

## 3. تقريب بورن Born

### 1.3- حل المعادلة التكاملية بالتكرار

يمكننا حساب متجهة الحالة $\left|\psi(\vec{r})\right\rangle$ في (2.14) بنفس الطريقة التي حسبنا فيها $\psi(\vec{r})$ أي بكتابتها على الشكل

$$\left|\psi(\vec{r})\right\rangle = \left|\psi_0(\vec{r})\right\rangle + \int G(\vec{r} - \vec{r}'') \frac{2m}{\hbar^2} U(r'') \left|\psi(\vec{r}'')\right\rangle d\vec{r}'' \tag{3.1}$$

ثم استبدال $\left|\psi(\vec{r})\right\rangle$ في (2.14) بـ (3.1) وتكرار هذه العملية عدد المرات التي نشاء. ليست هذه المرة الأولى التي نفتش فيها عن حلول للمعادلة التكاملية بالتكرار، فقد فعلنا ذلك عند تعريفنا لدالة غرين في ((5.15).1) وحسابنا لسعة الانتقال من متجهة الحالة $\left|q(t_0)\right\rangle$ إلى $\left|q(t)\right\rangle$ بواسطة

سنعيد ذات المحاكمة هنا بأن نكتب النواة في مؤثر التطور $U(t, t_o)$ : انظر العلاقة ((5.19).1). سنعيد ذات المحاكمة هنا بأن نكتب النواة في (2.14) على الشكل

$$K(\vec{r}, \vec{r}_1) \equiv K_1(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{2m}{\hbar^2} G(\vec{r} - \vec{r}_1) U(\vec{r}_1)$$

حيث وضعنا $\vec{r}_1$ عوضاً عن $\vec{r}'$ وكذلك

$$K_2(\vec{r}, \vec{r}_2) = K(\vec{r}, \vec{r}_1) K(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \tag{3.2}$$

حيث $\vec{r}_2$ عوضاً عن $\vec{r}''$ وهكذا دواليك

$$\vdots$$

$$K_n(\vec{r}, \vec{r}_n) = K(\vec{r}, \vec{r}_1) K(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \ldots K(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_n)$$

إن استبدال $\psi(\vec{r})$ في (2.14) بتعريفها (3.1) والأخذ بعين الاعتبار للرموز الجديدة الأكثر ملاءمة للتكرار : 1، 2، 3 عوضاً عن ' ، "، "'، الخ يجعلنا نكتب $|\psi(\vec{r})\rangle$ على الشكل .

$$|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi_o(\vec{r})\rangle + \int K(\vec{r}, \vec{r}_1) |\psi_o(\vec{r}_1)\rangle d\vec{r}_1 + \int K(\vec{r}, \vec{r}_1) K(\vec{r}_1, \vec{r}_2) |\psi(\vec{r}_2)\rangle d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \tag{3.3}$$

$$= |\psi_o(\vec{r})\rangle + \int K_1(\vec{r}, \vec{r}_1) |\psi_o(\vec{r}_1)\rangle d\vec{r}_1 + \int K_2(\vec{r}, \vec{r}_2) |\psi(\vec{r}_2)\rangle d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \tag{3.3'}$$

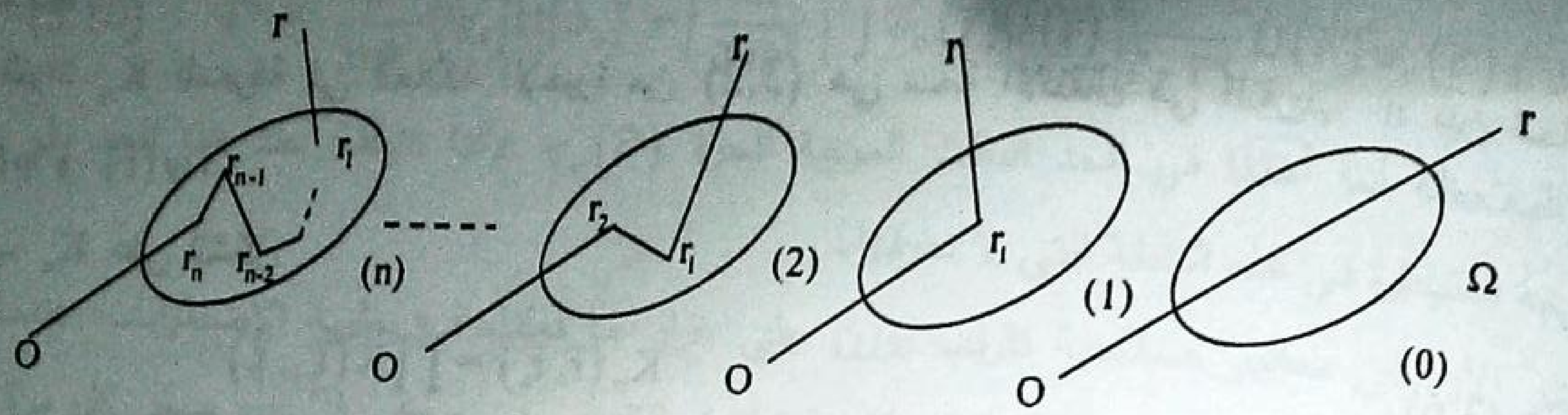
وبالتكرار نجد

$$|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi_o(\vec{r})\rangle + \int K_1(\vec{r}, \vec{r}_1) |\psi_o(\vec{r}_1)\rangle d\vec{r}_1 + \int K_2(\vec{r}, \vec{r}_2) |\psi(\vec{r}_2)\rangle d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 + \ldots$$
$$+ \int K_{n-1}(\vec{r}, \vec{r}_{n-1}) |\psi(\vec{r}_{n-1})\rangle d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_{n-1} + \int K_n(\vec{r}, \vec{r}_n) |\psi(\vec{r}_n)\rangle d\vec{r}_1 \ldots dr_n \tag{3.4}$$

إن هذا الحل هو أحد الحلول الممكنة التي تعطينا $\psi(\vec{r})$ ولذا نكتب الحل العام الذي يعطي $\psi(\vec{r})$ على شكل عدد لامنته من التكاملات

$$|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi_o(\vec{r})\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \int K_n(\vec{r}, \vec{r}_n) |\psi(\vec{r}_n)\rangle d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_n \tag{3.5}$$

لنوضح الآن المحتوى الفيزيائي لهذه العلاقات بمخططات، الشكل.8، نشير فيها بالرمز $\Omega$ إلى مجال فعل الكمون في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة، نقاطه هي $\vec{r}_1$، $\vec{r}_2$ ... $\vec{r}_n$ هذا في حين تقع النقطتان O و $\vec{r}$ بعيداً عن المجال. ترمز النقطة O إلى منشأ الموجة الواردة إلى $\Omega$ و $\vec{r}$ إلى موضع المكشاف الراصد للموجة المتبعثرة. يعني الحل بدون طرف ثان $\psi_o(\vec{r})$ أن الموجة الواردة من O لا تتأثر البتة في طريقها نحو r بمفعول الكمون ونعبر عن مسارها كموجة حرة بخط مستقيم (يعبر عن المسار الحر في مخططات فاينمان بأشكال عدة ترمز إلى نوع الجسيم، فهو مستقيم من أجل الإلكترون، وخط موجي من أجل الفوتون، ومتقطع من أجل الميزون مثلاً الخ).




الشكل.8

يعبر المخطط $(0)$ عن اجتياز الموجة الآتية من نقطة البداية O مجال الكمون بدون أن تتفاعل معه والمخطط $(1)$ عن موجة آتية من نقطة البداية تأثرت في النقطة $\vec{r}_1$ بالكمون، تفاعلت معه فانعطفت عن مسارها في هذه النقطة وتابعت طريقها كموجة حرة، مسارها مستقيم، لتصل إلى نقطة رصد التبعثر $\vec{r}$. يعبر المخطط $(2)$ عن تفاعل الجسيم مرتين في المجال Ω فينعطف مرتين، في النقطة $r_2$ أولاً، فمسار حر إلى النقطة $\vec{r}_1$ وأخيراً إلى $\vec{r}$؛ وهكذا يعبر المخطط $(n)$ عن تفاعل الجسيم وانعطافه $n$ مرة قبل بلوغه النقطة $\vec{r}$ الخ.

يعبر المخططان $(0)$ و $(1)$ عن الحل $(2.14)$ الذي كتبناه بدليل $\vec{r}$ و $\vec{r}_1$ ونسميه التقريب الأول ويعني أن الموجة الحرة الآتية من O قد تكون قد عبرت مجال الكمون بدون أن تتأثر به أو أنها قد تفاعلت معه في نقطة واحدة $\vec{r}_1$ مما أدى إلى انعطافها؛ وبما أن النقطة $\vec{r}_1$ نقطة لا على التعيين فقد عبرنا عن هذا التفاعل مرة واحدة بالتكامل على كل نقاط المجال. لننظر الآن إلى الحل $(3.3)$ الذي نسميه التقريب الثاني: إن الحد الأول فيه هو الموجة الحرة $(0)$ والحد الثاني هو تفاعل مرة واحدة ولكن ليس مع الموجة $\psi(\vec{r}_1)$ كما في التقريب الأول وإنما مع الموجة الحرة $\psi_0(\vec{r}_1)$ والحد الثالث هو التفاعل مرتين مع الموجة $\psi(\vec{r}_2)$ التي لا نعرفها، وهكذا فالتقريب الثاني هو المخططات الثلاثة الأولى، الخ.

يمكننا تصور مجال حقل الكمون كصفيحة يمر الجسيم الوارد (الموجة الواردة) عبرها دون أن يصطدم بأي من جسيماتها – إنه الحل الحر بدون طرف ثان $\psi_0(\vec{r})$ – أو أنه يعبرها بعد اصطدام بجسيم واحد أو اصطدامين بجسيمين لا على التعيين أو بعد ثلاثة أو أربعة اصطدامات الخ.

<u>تعريف 3</u> :

يطلق على النشر $(3.5)$ اسم نشر بورن أو النشر الاضطرابي كما يطلق على توزيعة غرين $G(\vec{r}_i - \vec{r}_{i+1})$ اسم ناشر فاينمان Propagator : إنه المسار الحر للجسيم بين نقطتي تفاعله مع الكمون.

**قضية 2 :** إن النواة $K_n$ المعرفة في العلاقة الأخيرة من (3.2) هي سعة الانتقال في التقريب n بين الحالتين $\psi(\vec{r}_n)$ و $\psi(\vec{r})$.

لنكتب $K_n$ على الشكل

$$K_n(\vec{r}, \vec{r}_n) = \prod_{i=1}^{n} K(\vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i) \tag{3.6}$$

حيث $r_o = r$.

لنضع بين كل حدين متجاورين $K(r_{i-1}, r_i)$ و $K(r_i, r_{i+1})$ من الـ n حداً المؤثر الوحدة $I = \int |\psi(\vec{r}_i)\rangle d\vec{r}_i \langle\psi(\vec{r}_i)|$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$ فنحصل على

$$K_n(\vec{r}, \vec{r}_n) = \int K(\vec{r}, \vec{r}_1)|\psi(\vec{r}_1)\rangle\langle\psi(\vec{r}_1)|K(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|\psi(\vec{r}_2)\rangle\langle\psi(\vec{r}_2)|\ldots \ldots\langle\psi(\vec{r}_{n-1})|K(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_n)d\vec{r}_1\ldots d\vec{r}_{n-1} \tag{3.7}$$

$$\langle\psi(\vec{r})|K_n(\vec{r}, \vec{r}_n)|\psi_n\rangle = \int\langle\psi(r)|K(\vec{r}, \vec{r}_1)|\psi(\vec{r}_1)\rangle\ldots K(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_n)|\psi_n\rangle d\vec{r}_1\ldots d\vec{r}_{n-1} \tag{3.7'}$$

ومنه بالمقارنة مع (3.5) برهان القضية.

ترينا العلاقة '(3.7) بقراءتها من اليمين نحو اليسار أن سعة الانتقال من الحالة $\psi(\vec{r}_j)$ إلى الحالة $\psi(\vec{r}_{j-1})$ هي $K(\vec{r}_{j-1}, \vec{r}_j)$ من أجل $j = n, n-1, \ldots 1$ ، $\vec{r}_{i-1} = \vec{r}$.

## 2.3– تقريب بورن

لا يكتسي النشر الاضطرابي (3.5) أهمية عملية إلا في إحدى حالتين، إما البرهان على تقارب السلسلة في الطرف الثاني وهو أمر يكاد يكون مستحيلاً في أغلب الأحيان، وإما التوقف عند الحلول الأولى من النشر وتبرير هذا التوقف نظرياً – ما هي أهمية الحدود المهملة ؟ – وعملياً حينما يتفق توقف النشر عند الحدود الأولى – لنقل التقريب الثاني – مع التجربة. وهذا ما يفعله تقريب بورن ولذا سنعود إلى كتابة الرموز '، " في النواة $K_2$ ونكتب $\psi(\vec{r})$ بالتفصيل على الشكل التالي

$$\psi(\vec{r}) = \psi_o(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}U(\vec{r}')\psi_o(\vec{r}')d\vec{r}' + \left(\frac{-m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \times \int\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}U(\vec{r}')\frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}''|}}{|\vec{r}'-\vec{r}''|}U(\vec{r}'')\psi(\vec{r}'')d\vec{r}'d\vec{r}'' \tag{3.8}$$

سنحصل على سعة التبعثر بالتقريب الأولى انطلاقاً من هذه العلاقة ومن (2.21)

$$f^B = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\psi_o'|U|\psi_o\rangle = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}U(\vec{r}')e^{i\vec{k}_o\vec{r}'}d\vec{r}' \tag{3.9}$$

$$(\vec{k}'\cdot\vec{r}) = (\vec{k}\cdot\vec{r})$$

وعلى هذه السعة في التقريب الثاني :

$$f^B = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\psi_o'|U|\psi_o\rangle + \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int \bar{\psi}_o'(\vec{r})U(\vec{r})\frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}''|}}{|\vec{r}-\vec{r}''|}U(\vec{r}'')\psi_o(\vec{r}'')d\vec{r}d\vec{r}'' \tag{3.10}$$

مع الملاحظة أننا أخذنا في الحد الثالث الموجة الحرة $\psi_o(\vec{r}'')$ لأننا نتوقف عند هذا الحد ولم نأخذ الموجة المتبعثرة في هذه النقطة التي لا نعرفها.

لننظر الآن إلى معايير صلاحية تقريب بورن على غرار ما فعلناه في نظرية الاضطرابات عندما قلنا على سبيل المثال إن الشروط اللازمة لصلاحية تطبيق التقريب هي صغر $|\psi^{(1)}\rangle$، صغر كل مركباتها، وبالتالي صغر عناصر مصفوفة الاضطراب $(H')_{nk}$ أمام فروق القيم الخاصة لـ $|\psi^{(0)}\rangle$ ((1.13).4). سنضع هنا شرط كبر الحد الثاني في النشر (3.3) أمام الحد الثالث أو بتعبير آخر كبر $|\psi_o(\vec{r})\rangle$ أمام $\int K(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\psi_o(\vec{r}_2)d\vec{r}_2$ ونكتب حسب (3.10)

$$\|\psi_o(\vec{r})\| >> \left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}''|}}{|\vec{r}-\vec{r}''|}U(\vec{r}'')\psi_o(r'')d\vec{r}''\right| \tag{3.11}$$

لنختر النقطة $r' \in \Omega$ التي يكون فيها الكمون أعظمياً كنقطة مبدأ بحيث يصبح شرط الصلاحية

$$\|\psi_o(0)\| = 1 >> \left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ikr''}}{r''}U(\vec{r}'')e^{i\vec{k}_o\vec{r}''}d\vec{r}''\right| = |I| \tag{3.12}$$

إن التكامل $I$ تابع للطاقة الحركية : $I(\vec{k},\vec{k}_o)$، وقيمته المطلقة أصغر حتماً من المقدار التالي المستقل عنها

$$|I| < \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{U(\vec{r}'')d\vec{r}''}{r''} << 1 \tag{3.13}$$

نستبدل في هذا التكامل $U(r'')$ بضعف قيمة الكمون الدنيا ونرمز لها بـ $U_o$. يصل الكمون إلى هذه القيمة الدنيا على حدود المجال $\Omega$، لتكن $d$ أبعد نقطة في $\Omega$ عن النقطة $O$ حيث الكمون أعظمي وهكذا يصبح التكامل (3.13)

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}2U_o\int_0^d\int_\pi^\theta\frac{r^2\ 2\pi\sin\theta d\theta dr}{r} << 1$$

أو

$$U_o << \frac{\hbar^2}{2m\ d^2} \tag{3.14}$$

يميز الطرف الأيمن في هذه المتراجحة الطاقة الحركية للجسيم حسب علاقة اللاتحديد $\hbar k \cdot d \sim \hbar$، $k \sim \frac{1}{d}$. وهكذا فإن تقريب بورن مبرر عندما تكون الطاقة الحركية كبيرة جداً بالنسبة للطاقة الكامنة. إلا أنه شرط قاس جداً ذلك أن $|I|$ يبلغ حده الأقصى من أجل $1 \simeq e^{i(kr''+\vec{k}_o\vec{r}'')}$ أي من أجل $kd << 1$ وبالتالي من أجل الطاقات الصغيرة؛ وعلى العكس فإن $kd >> 1$ تعني التغير السريع للحد الاهتزازي في التكامل إلى درجة تصل فيها قيمة التكامل إلى الصفر عندما يكبر $k$ كثيراً. وتقديرنا (3.12) $1 >> 0$ بالغ التشاؤم. لنقل إذاً إن تقريب بورن مقبول من أجل قيم طاقة حركية كبيرة بما فيه الكفاية.

$$f^B = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle \psi_o' | U | \psi_o \rangle + \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int \overline{\psi}_o'(\vec{r}) U(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}' - \vec{r}''|}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} U(\vec{r}'') \psi_o(\vec{r}'') d\vec{r}' d\vec{r}'' \quad (3.10)$$

مع الملاحظة أننا أخذنا في الحد الثالث الموجة الحرة $\psi_o(\vec{r}'')$ لأننا نتوقف عند هذا الحد ولم نأخذ الموجة المتبعثرة في هذه النقطة التي لا نعرفها.

لننظر الآن إلى معايير صلاحية تقريب بورن على غرار ما فعلناه في نظرية الاضطرابات عندما قلنا على سبيل المثال إن الشروط اللازمة لصلاحية تطبيق التقريب هي صغر $|\psi^{(1)}\rangle$، صغر كل مركباتها، وبالتالي صغر عناصر مصفوفة الاضطراب $(H')_{nk}$ أمام فروق القيم الخاصة لـ $|\psi^{(0)}\rangle$ ((1.13)،4).

سنضع هنا شرط كبر الحد الثاني في النشر (3.3) أمام الحد الثالث أو بتعبير آخر كبر $|\psi_o(\vec{r})\rangle$ أمام $\int K(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\psi_o(\vec{r}_2)d\vec{r}_2$ ونكتب حسب (3.10)

$$\| \psi_o(\vec{r}) \rangle \| >> \left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}' - \vec{r}''|}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} U(\vec{r}'') \psi_o(r'') d\vec{r}'' \right| \quad (3.11)$$

لنختر النقطة $r' \in \Omega$ التي يكون فيها الكمون أعظمياً كنقطة مبدأ بحيث يصبح شرط الصلاحية

$$\| \psi_o(0) \rangle \| = 1 >> \left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik\vec{r}''}}{r''} U(\vec{r}'') e^{i\vec{k}_o\vec{r}''} d\vec{r}'' \right| = |I| \quad (3.12)$$

إن التكامل $I$ تابع للطاقة الحركية : $I(\vec{k}, \vec{k}_o)$، وقيمته المطلقة أصغر حتماً من المقدار التالي المستقل عنها

$$|I| < \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{U(\vec{r}'') d\vec{r}''}{r''} << 1 \quad (3.13)$$

نستبدل في هذا التكامل $U(r'')$ بضعف قيمة الكمون الدنيا ونرمز لها بـ $U_o$. يصل الكمون إلى هذه القيمة الدنيا على حدود المجال $\Omega$، لتكن $d$ أبعد نقطة في $\Omega$ عن النقطة $O$ حيث الكمون أعظمي وهكذا يصبح التكامل (3.13)

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} 2U_o \int_0^d \int_\pi^0 \frac{r^2\ 2\pi \sin\theta d\theta dr}{r} << 1$$

أو

$$U_o << \frac{\hbar^2}{2m\, d^2} \quad (3.14)$$

يميز الطرف الأيمن في هذه المتراجحة الطاقة الحركية للجسيم حسب علاقة اللاتحديد $\hbar k \cdot d \sim \hbar$، $k \sim \frac{1}{d}$. وهكذا فإن تقريب بورن مبرر عندما تكون الطاقة الحركية كبيرة جداً بالنسبة للطاقة الكامنة. إلا أنه شرط قاس جداً ذلك أن $|I|$ يبلغ حده الأقصى من أجل $1 \simeq e^{i(kr'' + \vec{k}_o\vec{r}'')}$ أي من أجل $kd << 1$ وبالتالي من أجل الطاقات الصغيرة؛ وعلى العكس فإن $kd >> 1$ تعني التغير السريع للحد الاهتزازي في التكامل إلى درجة تصل فيها قيمة التكامل إلى الصفر عندما يكبر $k$ كثيراً. وتقديرنا (3.12) $0 << 1$ بالغ التشاؤم. لنقل إذاً إن تقريب بورن مقبول من أجل قيم طاقة حركية كبيرة بما فيه الكفاية.

يمكننا في حالة الكمون المركزي مكاملة (3.12) بأخذ عنصر الحجم $2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr$ والمكاملة على الزاوية $\theta$، زاوية انعطاف الجسيم الآتي باتجاه Oz عن هذا الاتجاه، فنحصل، نظراً لأن $k = |\bar{k}_o|$، على

$$1 >> \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{U(r)}{r} e^{ikr + ikr\cos\theta} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr\right| \qquad (3.12)'$$

$$= \frac{m}{k\hbar^2}\left|\int_0^\infty U(r)\left[e^{2ikr} - 1\right]dr\right|$$

إن قيمة الحد الاهتزازي معدومة من أجل $kd >> 1$ بحيث يصبح شرط صلاحية التقريب بأخذ قيمة وسطية $U_o$ للحقل المركزي : $U_o = \frac{1}{d}\left|\int_0^d U(r)dr\right|$

$$U_o << \frac{\hbar^2 k}{md} \qquad (3.15)$$

أما في الحالة النقيضة $kd << 1$ فإننا ننشر الدالة الأسية في $(3.12)'$ مما يعطينا الشرط (3.14) عندما نتوقف عند الحد الثاني في النشر ونستبدل $U(r)$ بقيمة وسطية $2U_o$.

لنأخذ أخيراً على سبيل المثال بئر كمون عمقه يساوي القيمة العظمى لـ $U(r)$ $-U_o = U(r)$ في جوار النقطة صفر من المجال $\Omega$ $r << d$ بحيث يمكن إخراجه من التكامل $(3.12)'$، نحسب القيمة المطلقة للمقدار المكامل بين 0 و $d$ : $\frac{e^{2ikd} - 1}{2ik} - d$، المساوي لـ $\frac{e^{ikd}\sin kd - kd}{k}$، فنجد

$$1 >> \frac{mU_o}{k\hbar^2}\left|\int_0^d \left(e^{2ikr} - 1\right)dr\right| = \frac{mU_o}{\hbar^2 k^2}\left(\sin^2 kd + k^2 d^2 - 2kd\sin kd\cos kd\right)^{1/2} \qquad (3.12)''$$

$$\cong \frac{mU_o}{\hbar^2 k^2}$$

يجب إذاً أن يكون الكمون صغيراً جداً أمام $\frac{\hbar^2 k^2}{m} = 2E$ : $U_o << 2E$.

نتمثل في الفيزياء النووية التبعثر المرن للنوترونات من قبل النويات الذرية على شكل بئر كمون عمقه 50MEV؛ ومجال الكمون هو $d = 1,3A^{1/3}10^{-15}m$ حيث A العدد الذري ولذا فإنه من الممكن تطبيق تقريب بورن على طاقات كبيرة نسبياً $E >> 25MeV$.

## 3.3- تبعثر الإلكترونات المرن في تصادمها مع الذرات

ننظر للذرة الحيادية ذات العدد الذري Z كشحنة موجبة، هي شحنة النواة المتمركزة في نقطة O وشحنة سالبة – شحنة مجموعة إلكترونات الذرة – موزعة توزيعاً متصلاً كثافته $\rho(r)$ ونكتب الشحنة الكلية على الشكل

$$e\left(Z\delta(\bar{r}) - \int\rho(\bar{r})d\bar{r}\right)$$

حيث $\delta(r)$ قياس ديراك المشير إلى تمركز الشحنة في النقطة O.

يمكننا في حالة الكمون المركزي مكاملة (3.12) بأخذ عنصر الحجم $2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr$ والمكاملة على الزاوية $\theta$، زاوية انعطاف الجسيم الآتي باتجاه Oz عن هذا الاتجاه، فنحصل، نظراً لأن $k = |\bar{k}_o|$، على

$$1 >> \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{U(r)}{r} e^{ikr + ikr\cos\theta} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr\right| \quad (3.12)'$$

$$= \frac{m}{k\hbar^2}\left|\int_0^\infty U(r)\left[e^{2ikr} - 1\right]dr\right|$$

إن قيمة الحد الاهتزازي معدومة من أجل $kd >> 1$ بحيث يصبح شرط صلاحية التقريب بأخذ قيمة وسطية $U_o$ للحقل المركزي : $U_o = \frac{1}{d}\left|\int_0^d U(r)dr\right|$

$$U_o << \frac{\hbar^2 k}{md} \quad (3.15)$$

أما في الحالة النقيضة $kd << 1$ فإننا ننشر الدالة الأسية في $(3.12)'$ مما يعطينا الشرط (3.14) عندما نتوقف عند الحد الثاني في النشر ونستبدل $U(r)$ بقيمة وسطية $2U_o$.

لنأخذ أخيراً على سبيل المثال بئر كمون عمقه يساوي القيمة العظمى لـ $U(r)$ $U_o = U(r)$- في جوار النقطة صفر من المجال $\Omega$ $r << d$ بحيث يمكن إخراجه من التكامل $(3.12)'$، نحسب القيمة المطلقة للمقدار المكامل بين 0 و d: $-d$ $\frac{e^{2ikd} - 1}{2ik}$، المساوي لـ $\frac{e^{ikd}\sin kd - kd}{k}$، فنجد

$$1 >> \frac{mU_o}{k\hbar^2}\left|\int_0^d \left(e^{2ikr} - 1\right)dr\right| = \frac{mU_o}{\hbar^2 k^2}\left(\sin^2 kd + k^2 d^2 - 2kd\sin kd\cos kd\right)^{1/2} \quad (3.12)''$$

$$\cong \frac{mU_o}{\hbar^2 k^2}$$

يجب إذاً أن يكون الكمون صغيراً جداً أمام $2E = \frac{\hbar^2 k^2}{m}$ : $U_o << 2E$.

تتمثل في الفيزياء النووية التبعثر المرن للنوترونات من قبل النويات الذرية على شكل بئر كمون عمقه 50MEV؛ ومجال الكمون هو $d = 1,3A^{1/3}10^{-15}m$ حيث A العدد الذري ولذا فإنه من الممكن تطبيق تقريب بورن على طاقات كبيرة نسبياً $E >> 25MeV$.

## 3.3- تبعثر الإلكترونات المرن في تصادمها مع الذرات

ننظر للذرة الحيادية ذات العدد الذري Z كشحنة موجبة، هي شحنة النواة المتمركزة في نقطة O وشحنة سالبة – شحنة مجموعة إلكترونات الذرة – موزعة توزيعاً متصلاً كثافته $\rho(r)$ ونكتب الشحنة الكلية على الشكل

$$e\left(Z\delta(\bar{r}) - \int\rho(\bar{r})d\bar{r}\right)$$

حيث $\delta(r)$ قياس ديراك المشير إلى تمركز الشحنة في النقطة O.

إن الكمون V الناتج عن هذه الشحنات يحقق قانون لابلاس[4] الذي سنكتبه بدليل كثافة الشحنة في فضاء الاندفاعات على الشكل

$$-q^2 V(\vec{q}) = \nabla^2 V = -4\pi e\left(Z\delta(r) - \rho(\vec{r})\right) = -4\pi e\left(Z - \int e^{-i\vec{q}\vec{r}}\rho(\vec{r})\,d\vec{r}\right)$$

حيث محول فوريي لـ $\delta$ هو 1.

إن الطاقة الكامنة للإلكترون الوارد، المتجه نحو الذرة هي $U = -eV$. سنكتب سعة بورن (3.9) من أجل هذا الكمون بدليل $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_o$ على الشكل التالي

$$f^B = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}U(\vec{r})d\vec{r} = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}U(q) \tag{3.16}$$

إن محول فوريي لـ $\nabla^2 U$ هو $-q^2 U(\vec{q})$ وبالتالي

$$q^2 U(\vec{q}) = 4\pi e^2\left(Z - \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\rho(\vec{r})\,d\vec{r}\right) \tag{3.17}$$

**تعريف 4 :**

يطلق على محول فوريي للكثافة الإلكترونية في الذرة اسم عامل الصيغة Form Factor، ويرمز له بـ $F(q)$.

لدينا إذاً

$$F(q) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\rho(\vec{r})d\vec{r} = \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty \sin qr\rho(r)\, r\, dr \tag{3.18}$$

حيث أخذنا عنصر الحجم بدليل الزاوية $qr = \widehat{(\vec{q}, \vec{r})}$، أي باعتبار اتجاه $\vec{q}$ المحور Oz، كتبنا $e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = e^{-iqr\cos qr}$ وكاملنا على المتغير (الزاوية qr) للوصول إلى الطرف الأخير. لنلاحظ أن $F(0) = \int \rho(\vec{r})d\vec{r} = Z$. وهكذا فإن المقطع الفعال في تقريب بورن حسب (2.22) والعلاقات الثلاث أعلاه

$$d\sigma^B = \frac{4m^2}{\hbar^4}\frac{e^4}{q^4}\left[Z - F(q)\right]^2 d\Omega \tag{3.19}$$

تجدر الإشارة إلى أننا أهملنا للحصول على هذه العلاقة مفاعيل الاستبدال بين الإلكترون السريع الوارد والذي تبعثر نتيجة تفاعله مع حقل الذرة V وبين إلكترونات الذرة. أو بتعبير آخر أننا لم نناظر متجهة حالة الجملة الكمومية المؤلفة من الذرة والإلكترون المصطدم بها. لنلاحظ كذلك قبل البدء بمناقشة

---

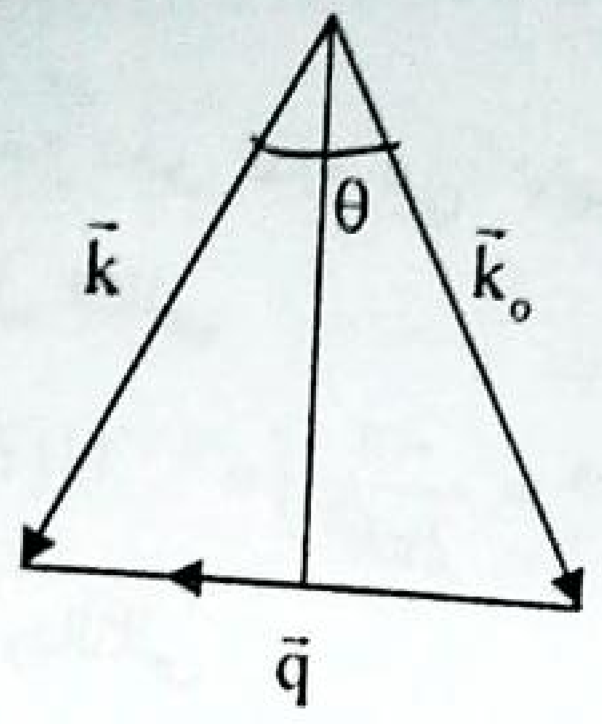
[4] إن قانون لابلاس في الوحدات العادية MKS هو $\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_o}$ حيث $\rho$ كثافة الشحنة في النقطة التي نحسب فيها اللابلاسي، إلا أننا استعملنا وحدات جعلنا فيها البنية الدقيقة بدون أبعاد أي أننا أخذنا $4\pi\varepsilon_o = 1$، ومنه إدخال العامل $4\pi$.

نذكر أننا نكتب هنا محول فوريي $A(\vec{k}) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}A(\vec{r})\,d\vec{r}$ في حين نكتب المحول العكس $A(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}A(\vec{k})\,d\vec{k}$ للتخلص من الجذور في المخرج رغم ما للكتابة المتناظرة من فائدة في بعض الأحيان، وهكذا فإن $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int$ في حين يساوي محولها لـ 1.

مختلف قيم عامل الصيغة حسب أبعاد الذرة وسرعة الإلكترون الوارد أن $|\vec{k}| = |\vec{k}_o|$ في الاصطدام المرن

وبالتالي فإن

$$q = 2|k|\sin\theta/2 = \frac{2mv}{\hbar}\sin\theta/2 \qquad (3.20)$$




حيث $\theta$ زاوية الانعطاف. ولننظر أولاً إلى الحالتين الحديتين التاليتين :

أ- $qa \ll 1$ حيث $a$ بحدود أبعاد الذرة أي بضع مرات نصف قطر بور $a_o$. إن سرعة إلكترونات الذرة $v_o \sim \frac{\hbar}{ma}$ هي $pa \sim \hbar$، التي يفرضها مبدأ اللاتحديد، وهذا يعني أن $qa = \frac{2v}{v_o}\sin\theta/2 \ll 1$ ويتضمن ذلك أمرين : إن زاوية الانعطاف صغيرة، $\theta \ll \frac{v_o}{v}$، والانعطاف نحو الأمام، أو إن $q = |\vec{k} - \vec{k}_o| \sim 2k_o \ll \frac{1}{a}$ أي بطء الإلكترون الوارد.

ب- لنفترض على العكس أن $qa \gg 1$ أي أن $\sin\theta/2 \gg \frac{v_o}{v}$ والانعطاف كبير. يبين التذبذب للدالة $e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}$، $|r| \in [-a, +a]$ أن التكامل المعرف لـ $F(q)$ يساوي الصفر بحيث يصبح المقطع الفعال التفاضلي (3.19)، بملاحظة أن $v = \frac{\hbar q}{m}$

$$d\sigma = \left(\frac{Ze}{2mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}$$

إنها صيغة روذرفورد التقليدية التي حصلنا عليها في '(1.10) والتي تعين المقطع الفعال بتأثير النواة بمفردها : لا تشكل إلكترونات الذرة أي حاجز بين الإلكترون الوارد والنواة.

ج- ننشر عامل الصيغة $F(q)$ كسلسلة بقوى $q$ بنشر $e^{iqr\cos qr}$ كدالة أسية أو بنشر تيلور لنرى من جديد أن $F(0) = Z$ وأن الحد من الدرجة الأولى بـ $q$ متناسب مع $\int \vec{r}\rho(\vec{r})d\vec{r}$ أي مع القيمة الوسطية لعزم ثنائي القطب للذرة المعرف بـ $\vec{M} = \sum e\vec{r}$. ولكن هذه المتجهة متجهة قطبية وعناصر مصفوفتها المختلفة عن الصفر هي العناصر التي تغير السوية، انظر (4.§1.6) هذا يعني أن العناصر القطرية فيها تساوي الصفر وبالتالي قيمتها الوسطية : إن القيمة الوسطية لعزم ثنائي القطب معدومة. ننتقل إذاً إلى الحد من الدرجة الثانية بـ $q$ ونلاحظ بدون إجراء الحساب بالنظر إلى التعبير عن $F$ بدليل $\sin qr$ في (3.18) إلى أنه متناسب مع $\frac{1}{q}\frac{q^3}{6}r^3$ أي أن

$$Z - F(q) = Z - \left(Z - 0 - F''(0)\frac{q^2}{2}\right) = \frac{q^2}{6}\int r^2\rho(\bar{r})\,d\bar{r} \qquad (3.21)$$

بحيث يصبح المقطع الفعال التفاضلي

$$d\sigma = \left|\frac{1}{3}\frac{me^2}{\hbar^2}\int r^2\rho(\bar{r})\,d\bar{r}\right|^2 d\Omega \qquad (3.21)'$$

د- أما في الحالة العامة فلابد من معرفة متجهة الحالة الإلكترونية التي تعطينا $\rho = |\psi|^2$. إنها على سبيل المثال من الشكل المتناسب مع $Ze^{-r/a}$ كما رأينا في حالة الهدروجين والذرات الشبيهة به، أو على شكل غاوصي أو من الشكل المعقد $f(r) = Z^2 f\left(\frac{rZ^{1/3}}{b}\right)$ الذي يعطيه نموذج توماس – فيرمي وهو نموذج لم نتطرق إليه في الفصول السابقة. لذا سنكتفي بحساب $F(q)$ من أجل $\rho = |\psi|^2 = \frac{Ze^{-r/a}}{8\pi a^3}$.

لدينا

$$F(q) \sim \int e^{-iqr\cos\chi} e^{-r/a} 2\pi r^2 \sin\chi\, d\chi\, dr$$

حيث اخذنا $q$ في اتجاه المحور القطبي وكاملنا على الزاوية $\varphi$ التي أعطتنا $2\pi$. نكامل على $\chi$ بين 0 و $\pi$ فنحصل على

$$F(q) \sim \int \frac{1}{-iq}\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right) r e^{-r/a} dr$$

نكتب هذا التكامل على الشكل

$$\int \frac{1}{iq}\left[e^{-\frac{(1-iqa)}{a}r} - e^{-\frac{(1+iqa)}{a}r}\right] r\,dr$$

يعطينا التكامل بالتجزئة الذي يخلصنا من $r$

$$\frac{-a^2}{(1-iqa)^2} + \frac{a^2}{(1+iqa)^2} = \frac{-4iqa^3}{\left(1+q^2a^2\right)^2}$$

وأخيراً

$$F(q) = Z\left(1+q^2a^2\right)^{-2}$$

عندما يكون الجداء $qa$ بحدود الواحد $qa \sim 1$ فإن $F(q)$ هو $\frac{Z}{4}$.

## 4.3- التبعثر المرن للجسيمات البطيئة (تبعثر الإرنان)

نقصد كما فعلنا في الرقم السابق بالجسيمات البطيئة تلك التي تحقق العلاقة $kd \ll 1$ في حقل جاذب $(U<0)$ مداه $d$، أي تلك التي يمكن مقارنة طاقتها $E$، بأصغر الطاقات السالبة في الطيف المنفصل، ونرمز لها بـ $\varepsilon$ : $|\varepsilon| \sim E$. إن $-\varepsilon$ هي طاقة المستوى $s$ $(\ell = 0)$ وهي صغيرة جداً أمام القيمة

$\varepsilon$ و $E$ إنهما في حالة شبه إرنان لأن هذا التقارب سيرفع الوسطية للكمون $|\langle U\rangle| >> \varepsilon$. ولذا نقول عن بحدة قيمة المقطع الفعال كما سنرى. ونريد بداية حساب انزياح الطور بتقريب بورن.

نكتب المعادلة القطرية للجسيم ذي الطاقة $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ و $\ell = 0$ بدليل $\chi(r) = rR(r)$ على الشكل

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right)\chi(r) = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\chi(r) = V(r)\chi(r)$$

حيث سمينا $V(r) = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)$ للتخلص من العامل $\frac{2m}{\hbar^2}$. نكتب الحل التكاملي لهذه المعادلة على الشكل (2.14)، ببعد واحد

$$\chi(r) = \chi_o(r) + \int G(r-r')V(r')\chi(r')dr'$$

وننتقل بتحويل فوريي إلى فضاء الاندفاعات $q$، مع الملاحظة أن محول فوريي لجداء تلاف يساوي لجداء محول فوريي لطرفي الجداء[5]. رأينا في (2.15) أن $G(q)$ هو $\frac{1}{k^2 - q^2}$، كما أن محول فوريي للموجة المستوية $\chi_o = e^{ikr}$ هو $\delta(k-q)$ ومنه

$$\chi(q) = A\delta(k-q) + \frac{1}{k^2 - q^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} V(q-q')\chi(q')dq' \qquad (3.22)$$

$$= A\delta(k-q) + \frac{B(q)}{k^2 - q^2} \qquad (3.22)'$$

حيث سمينا $B(q)$ التكامل

$$B(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(q-q')\chi(q')dq' \qquad (3.23)$$

إن الحل $\chi(r)$ هو حسب (2.4)

$$\chi(r) = C\sin(kr + \delta_o)$$

حيث انزياح الطور هو $\delta_o$ لأن $\ell = 0$، وهو حل فردي ومحول فوريي لهذا الحل فردي أيضاً. $F(q) = -F(-q)$ ؛ يجب إذاً أن يتحول الحد الأول في '(3.22) إلى الشكل الفردي

$$A\big(\delta(k-q) - \delta(k+q)\big) \qquad (3.22)''$$

ونكتب محول فوريي العكسي لهذا المقدار

$$\frac{A}{2\pi}\int e^{ikr}\big(\delta(k-q) - \delta(k+q)\big)dq = \frac{iA}{\pi}\sin kr$$

---

[5] نكتب محول فوريي لجداء التلاف لدالتين $A$ و $B$ $\int A(r-r')B(r')dr'$ على الشكل
$\int e^{-iqr}A(r-r')B(r')dr'dr$
ثم نكتب $e^{-iqr} = e^{-iq(r-r')-iqr'}$ ليصبح التكامل جداء تكاملين هما $\int e^{-iq(r-r')}A(r-r')dr$ و $\int e^{-iqr'}B(r')dr'$ ، أولهما هو $A(q)$ وثانيهما $B(q)$. إن المهم في هذه المبرهنة هو التحقق من صحة تحويل التكامل المزدوج إلى جداء تكاملين. وعلى العكس فإن محول فوريي لجداء $B(r) = V(r)\chi(r)$ هو جداء التلاف لمحولي فوريي لحدي الجداء أي أن
$B(q) = \int V(q-q')\chi(q')dq'$

الوسطية للكمون $|\langle U\rangle| \gg \varepsilon$. ولذا نقول عن $E$ و $\varepsilon$ إنهما في حالة شبه إرنان لأن هذا التقارب سيرفع بحدة قيمة المقطع الفعال كما سنرى. ونريد بداية حساب انزياح الطور بتقريب بورن.

نكتب المعادلة القطرية للجسيم ذي الطاقة $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ و $\ell = 0$ بدليل $\chi(r) = rR(r)$ على الشكل

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right)\chi(r) = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\chi(r) = V(r)\chi(r)$$

حيث سيمنا $V(r) = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)$ للتخلص من العامل $\frac{2m}{\hbar^2}$. نكتب الحل التكاملي لهذه المعادلة على الشكل (2.14)، ببعد واحد

$$\chi(r) = \chi_o(r) + \int G(r-r')V(r')\chi(r')dr'$$

وننتقل بتحويل فوريي إلى فضاء الاندفاعات $q$، مع الملاحظة أن محول فوريي لجداء تلافِ يساوي لجداء محول فوريي لطرفي الجداء[5]. رأينا في (2.15) أن $G(q)$ هو $\frac{1}{k^2 - q^2}$، كما أن محول فوريي للموجة المستوية $\chi_o = e^{ikr}$ هو $\delta(k-q)$ ومنه

$$\chi(q) = A\delta(k-q) + \frac{1}{k^2-q^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} V(q-q')\chi(q')dq' \qquad (3.22)$$

$$= A\delta(k-q) + \frac{B(q)}{k^2-q^2} \qquad (3.22)'$$

حيث سمينا $B(q)$ التكامل

$$B(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(q-q')\chi(q')dq' \qquad (3.23)$$

إن الحل $\chi(r)$ هو حسب (2.4)

$$\chi(r) = C\sin(kr + \delta_o)$$

حيث انزياح الطور هو $\delta_o$ لأن $\ell = 0$، وهو حل فردي ومحول فوريي لهذا الحل فردي أيضاً. $F(q) = -F(-q)$؛ يجب إذاً أن يتحول الحد الأول في '(3.22) إلى الشكل الفردي

$$A\left(\delta(k-q) - \delta(k+q)\right) \qquad (3.22)''$$

ونكتب محول فوريي العكسي لهذا المقدار

$$\frac{A}{2\pi}\int e^{ikr}\left(\delta(k-q) - \delta(k+q)\right)dq = \frac{iA}{\pi}\sin kr$$

---

[5] نكتب محول فوريي لجداء التلاف لدالتين $A$ و $B$ $\int A(r-r')B(r')dr'$ على الشكل

$$\int e^{-iqr}A(r-r')B(r)dr'dr$$

ثم نكتب $e^{-iqr} = e^{-iq(r-r')-iqr'}$ ليصبح التكامل جداء تكاملين هما $\int e^{-iq(r-r')}A(r-r')dr$ و $\int e^{-iqr'}B(r')dr'$، أولهما هو $A(q)$ وثانيهما $B(q)$. إن المهم في هذه المبرهنة هو التحقق من صحة تحويل التكامل المزدوج إلى جداء تكاملين. وعلى العكس فإن محول فوريي لجداء $B(r) = V(r)\chi(r)$ هو جداء التلاف لمحولي فوريي لحدي الجداء أي أن

$$B(q) = \int V(q-q')\chi(q')dq'$$

أما محول فوريي العكسي لـ $\frac{B(q)}{k^2 - q^2}$ فقد حسبناه بطريقة البواقي (2.17)، (2.18) ونجد في نتيجة الحساب نظراً لضرورة كون $B(q)$ فردياً

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q-k}+\frac{1}{q+k}\right)B(q)e^{iqr}dq = -\frac{2\pi}{2\pi}i\left(\frac{1}{2k}B(k)e^{ikr} - \frac{1}{2k}B(-k)e^{-ikr}\right) \tag{3.24}$$

$$= -\frac{i\,B(k)}{k}\cos kr$$

وهكذا فإن $\chi(r)$ بتقريب عامل طور $i = e^{i\pi/2}$ نهمله هو

$$\chi(r) = \frac{1}{\pi}\left(A\sin kr - \frac{\pi}{k}B(k)\cos kr\right) \tag{3.25}$$

نكتب الطرف الأيسر على الشكل

$$\chi(r) = C(\sin kr\cos\delta_o + \cos kr\sin\delta_o)$$

ونقارن فنحصل على

$$A = \pi C\cos\delta_o$$

و

$$tg\delta_o = -\frac{\pi B(k)}{kA} = -\frac{\pi}{kA}\int_{-\infty}^{\infty}V(k,q')\chi(q')dq' \tag{3.26}$$

ولما كنا لا نستطيع حل المعادلة التكاملية فإننا نحسب انزياح الطور بتقريب بورن أي باستبدال $\chi(q')$ بـ $\chi^0(q')$ المعطى بـ "(3.22) لنجد

$$(tg\delta_o)^B = -\frac{\pi}{kA}\int_{-\infty}^{\infty}V(k,q')A\left[\delta(k-q') - \delta(k+q)\right]dq' \tag{3.27}$$

$$= -\frac{\pi}{k}\left[V(k,k) - V(k,-k)\right] = -\frac{\pi}{k}\int_{-\infty}^{\infty}V(r)\left[1 - e^{-2ikr}\right]dr$$

ذلك أننا كتبنا

$$V(q,q') = V(q-q') = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(q-q')r}V(r)\,dr$$

وأخيراً

$$(tg\delta_o)^B = -\frac{\pi}{k}\int_{-\infty}^{\infty}V(r)2i\sin kr(\cos kr - i\sin kr)dr$$

لا يسهم في التكامل إلا الحد الفردي ولدينا

$$(tg\delta_o)^B = \frac{4\pi}{k}\int_0^{\infty}\sin^2 kr\,V(r)\,dr \tag{3.28}$$

لا نستطيع الحصول على انزياح الطور وبالتالي تعيين المقطع الفعال إلا إذا عرفنا صيغة الكمون $V = \frac{2m}{\hbar}U$ في هذه العلاقة، وهي غير متاحة. علينا إذاً كما فعلنا في كثير من حالات التقريب مقارنة

حلي معادلة شرودينغر داخل وخارج منطقة الكمون $[0, d]$ والوصل بين هذين الحلين. والحلان هما حل معادلة شرودينغر $\ell = 0$ $(\chi = rR_o)$ $(3.(2.6))$

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U(r)\right)\chi = 0$$

تأخذ هذه المعادلة الشكل التالي داخل مجال الكمون حيث $E$ صغيرة جداً الشكل

$$\chi'' - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\chi = 0 \qquad r \sim d \qquad (3.29)$$

وخارج هذا المجال الشكل

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\chi = 0 \qquad r >> d \qquad (3.30)$$

يجب إذاً أن يتحقق من أجل حلين ما $\chi_1$ و $\chi_2$ للمعادلتين السابقتين على الترتيب شرط الاتصال

$$\left(\frac{\chi_1'}{\chi_1}\right) = \left(\frac{\chi_2'}{\chi_2}\right)\Bigg|_{r=d}$$

لكن الملاحظة التالية تعفينا من إيجاد الحلين ومشتقيهما في النقطة $r = d$ واستبدال ذلك بالنقطة $O$ : إن حل معادلة شرودينغر $\chi$ يتناهى نحو الصفر وهذا هو حال المعادلة (3.29) $\chi_1 \underset{r\to 0}{\to} 0$ أما حل المعادلة الحرة (3.30) فإن مشتقها صغير في جوار النقطة صفر ولذا فمن الممكن صياغة شرط الاتصالية على النحو التالي

$$\left(\frac{\chi_1'}{\chi_1}\right) = \left(\frac{\chi_2'}{\chi_2}\right)\Bigg|_{r=0} = -\kappa \qquad (3.31)$$

إن الطرف الأول في هذه المساواة مستقل عن $E$ والثاني عن $U$ ولذا فإن الطرف الأخير ثابتة وحل المعادلتين هو

$$\chi = Ae^{-\kappa r} \qquad (3.32)$$

نوفق بين المتطلبين بأخذ $\kappa = \frac{\sqrt{2m|\varepsilon|}}{\hbar}$ ؛ $E = |-\varepsilon|$ $\varepsilon < 0$ هي طاقة القاع في الكمون الجاذب.

إن حل معادلة الجسيم الحر (3.30) هي كما نعلم

$$\chi_2 = C\sin(kr + \delta_o) = C\sin\delta_o\,(\sin kr\,\mathrm{cotg}\delta_o + \cos kr) \qquad (3.30)'$$

التي تعطينا بالمقارنة مع (3.32) في النقطة $O$، حيث $\chi = A(1 - \kappa r)$، قيمة $A$ : $A = C\sin\delta_o$ و

$$kr\,\mathrm{cotg}\delta_o = -\kappa r$$

$$\mathrm{cotg}\delta_o = -\frac{\sqrt{2m|\varepsilon|}}{k\hbar}$$

أو $\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E\right)$

$$\mathrm{cotg}\delta_o = -\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{E}}$$

ومنه حسب (2.10)

$$\sigma_o = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_o = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{E}{E+|\varepsilon|}\right)$$

$$\sigma_o = \frac{2\pi\hbar^2}{m\left(E+|\varepsilon|\right)} \qquad (3.33)$$

يبلغ هذا المقطع الفعال قيمته القصوى من أجل $E = 0$ وهو كبير بقدر ما يكون $|\varepsilon|$ صغيراً ويبلغ حالة الإرنان الفعلية من أجل $|\varepsilon| = 0$.

توصف العلاقة (3.33) بشكل جيد الصلة بين المقطع الفعال وطاقات صغيرة بحدود 5 MeV، كما هو الحال في تبعثر النوترون من قبل البروتون، المكونين لنواة الدوتيرون، عندما يكون سبينيهما متوازيين – تدني ثلاثي (Triplet). إن $|\varepsilon|$ في هذه الحالة هي 2,23 MeV، وهي طاقة القاع للدوتيرون والكتلة المختصرة هي نصف كتلة النوكليون $m = \frac{1}{2}M$ و المقطع الفعال الأعظمي هو

$$\sigma_o = \frac{4\pi\hbar^2}{M|\varepsilon|} \simeq 3.10^{-28}m^2$$

لنحسب أخيراً $\chi_2$ المنظمة للواحد، $A = C\sin\delta_o = 1$، في '(3.30) في جوار النقطة O : نكتب $\chi$ من أجل $kr << 1$ حيث $\sin kr \simeq kr$ و $\cos kr \simeq 1$ على الشكل

$$\chi = 1 + kr\cot g\delta_o$$

$$= 1 - kr\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{E}}$$

تصبح $\chi$ مساوية للصفر من أجل

$$r = -\frac{1}{k\cot g\delta_o} = \frac{1}{k\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{E}}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|\varepsilon|}} = c \qquad (3.34)$$

ويطلق على هذا المقدار الذي رمزنا له بـ c اسم طول التبعثر. وهو يساوي في مثل الدوتيرون أعلاه $5.10^{-15}$م تقريباً.

<u>ملاحظات</u> :

1- إن طول التبعثر في حال اصطدام النوترون بالبروتون وهما في الحالة المنفردة (Singlet) – سبينهما متضاد التوازي –، سالب ($c_s = -2{,}5.10^{-14}$م). ولا يمكن إذاً لهذين الجسيمين أن يشكلا حالة مرتبطة. نحسب الطاقة E الموجبة بوضع $c_s$ في الطرف الأخير في (3.34) لنجد أنها تساوي $\simeq$ 37 Kev.

2- تملي علينا هذه الواقعة العودة إلى الثابتة $\kappa$ في (3.31). إنها في حقيقة الأمر دالة متصلة تابعة لـ $U(r)$. تبقى الصلة بين $U(r)$ بحيث يمكن أن تأخذ القيمة صفر وتصبح موجبة وفق تغيرات مناسبة لـ $U(r)$

ومنه حسب (2.10)

$$\sigma_o = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_o = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{E}{E+|\varepsilon|}\right)$$

$$\sigma_o = \frac{2\pi\hbar^2}{m\left(E+|\varepsilon|\right)} \qquad (3.33)$$

يبلغ هذا المقطع الفعال قيمته القصوى من أجل $E = 0$ وهو كبير بقدر ما يكون $|\varepsilon|$ صغيراً ويبلغ حالة الإرنان الفعلية من أجل $|\varepsilon| = 0$.

توصف العلاقة (3.33) بشكل جيد الصلة بين المقطع الفعال وطاقات صغيرة بحدود 5 MeV، كما هو الحال في تبعثر النوترون من قبل البروتون، المكونين لنواة الدوتيرون، عندما يكون سبينيهما متوازيين – تدني ثلاثي (Triplet). إن $|\varepsilon|$ في هذه الحالة هي 2,23 MeV، وهي طاقة القاع للدوتيرون والكتلة المختصرة هي نصف كتلة النوكليون $m = \frac{1}{2}M$ و المقطع الفعال الأعظمي هو

$$\sigma_o = \frac{4\pi\hbar^2}{M|\varepsilon|} \simeq 3.10^{-28}m^2$$

لنحسب أخيراً $\chi_2$ المنظمة للواحد، $A = C\sin\delta_o = 1$، في '(3.30) في جوار النقطة O : نكتب $\chi$ من أجل $kr << 1$ حيث $\sin kr \simeq kr$ و $\cos kr \simeq 1$ على الشكل

$$\chi = 1 + kr\cot g\delta_o$$

$$= 1 - kr\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{E}}$$

تصبح $\chi$ مساوية للصفر من أجل

$$r = -\frac{1}{k\cot g\delta_o} = \frac{1}{k\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{E}}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|\varepsilon|}} = c \qquad (3.34)$$

ويطلق على هذا المقدار الذي رمزنا له بـ c اسم طول التبعثر. وهو يساوي في مثل الدوتيرون أعلاه $5.10^{-15}$م تقريباً.

**ملاحظات :**

1- إن طول التبعثر في حال اصطدام النوترون بالبروتون وهما في الحالة المنفردة (Singlet) – سبينهما متضاد التوازي –، سالب ($c_s = {}$م$-2,5.10^{-14}$). ولا يمكن إذاً لهذين الجسيمين أن يشكلا حالة مرتبطة. نحسب الطاقة E الموجبة بوضع $c_s$ في الطرف الأخير في (3.34) لنجد أنها تساوي $\simeq$ 37 Kev.

2- تملي علينا هذه الواقعة العودة إلى الثابتة $\kappa$ في (3.31). إنها في حقيقة الأمر دالة متصلة تابعة لـ $U(r)$. تبقى الصلة بين $U(r)$ بحيث يمكن أن تأخذ القيمة صفر وتصبح موجبة وفق تغيرات مناسبة لـ $U(r)$

لا تعبر عن مستوى طاقة لحالة مرتبطة $|\varepsilon| = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ ولكن الطاقة (3.33) صحيحة و $\kappa$ المقطع الفعال و. وهذا هو حال التصادم $U(r)$ في الكمون $U$ ونقول عندئذ إنه مستوى وهمي يميز تغيرات الكمون نوترون-بروتون في الحالة المنفردة.

3- يعبر وجود طول التبعثر $c$ على شكل مربع في صيغة المقطع الفعال عن استحالة معرفة إشارته في صيغة $\frac{1}{k^2c^2} = \frac{|\varepsilon|}{E}$ : لدينا بوضع وبالتالي تمييز الحالات المرتبطة الفعلية عن الحالات الوهمية

المقطع الفعال

$$\sigma_o = \frac{4\pi}{k^2 + \frac{1}{c^2}}$$

## 4. نظرية التبعثر غير المرن

### 1.4- التبعثر غير المرن

نقول عن الاصطدامات المترافقة مع تغيرات في حالة الجسيمات المتصادمة الداخلية إنها اصطدامات غير مرنة. إن الاصطدامات غير المرنة في الفيزياء التقليدية هي تلك التي يحدث فيها تغير في الطاقة الداخلية للأجسام المتصادمة بدءاً بالتشويه وانتهاءً بالتحطم إلى عدة أجزاء. أما في الميكانيك الكمومي فيترافق الاصطدام غير المرن بحالات استحاث : تحريض الذرة على سبيل المثال، تغيير مستويات الطاقة الإلكترونية فيها إلى حد التأيين، أو بحالات استبدال، أن نستبدل الإلكترون المصطدم بالذرة بأحد إلكترونات الذرة وهي الحالة التي استثنيناها في الفقرة السابقة. يمكن أيضاً أن يتفكك الجسيم إلى جسيمات جديدة وهو موضوع تعنى به بشكل خاص نظرية الحقول المكممة ونظرية الجسيمات الأولية لأنه كثيراً ما يحدث في طاقات (وسرع) عالية تتطلب الجمع بين النظرية الكمومية ونظرية النسبية الخاصة. يطلق عادة على سيرورة اصطدام من نوع معين اسم قناة ويقال عن القناة إنها مفتوحة أو مغلقة حسبما تكون قوانين الانحفاظ (انحفاظ الطاقة خاصة) متوائمة مع حدوثها أو غير متوائمة. يعني هذا كله أننا ملزمون في دراسة هذه السيرورات أخذ وسطاء جديدة بعين الاعتبار، سيبين الجسيمات المتفاعلة الذي أهملناه في الاصطدامات المرنة والمتغير في الاصطدامات غير المرنة، الشحنة الكهربائية الكلية في حال التفكك : إنها مقدار منحفظ، وكذلك الاندفاع الكلي المنحفظ. لنذكر أن انحفاظ الاندفاع هو الذي دفع باولي إلى التنبؤ بالنوترينو في تفكك النوترون إلى إلكترون وبروتون ونوترينو إلكتروني مضاد : $n \rightarrow p + \bar{e} + \bar{\nu}$، الخ.

المقطع الفعال و $\kappa$ صحيحة (3.33) ولكن الطاقة $|\varepsilon| = \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$ لا تعبر عن مستوى طاقة لحالة مرتبطة في الكمون U ونقول عندئذ إنه مستوى وهمي يميز تغيرات الكمون $U(r)$. وهذا هو حال التصادم نوترون-بروتون في الحالة المنفردة.

3- يعبر وجود طول التبعثر c على شكل مربع في صيغة المقطع الفعال عن استحالة معرفة إشارته وبالتالي تمييز الحالات المرتبطة الفعلية عن الحالات الوهمية : لدينا بوضع $\frac{|\varepsilon|}{E} = \frac{1}{k^2c^2}$ في صيغة المقطع الفعال

$$\sigma_o = \frac{4\pi}{k^2 + \frac{1}{c^2}}$$

## 4. نظرية التبعثر غير المرن

### 1.4- التبعثر غير المرن

نقول عن الاصطدامات المترافقة مع تغيرات في حالة الجسيمات المتصادمة الداخلية إنها اصطدامات غير مرنة. إن الاصطدامات غير المرنة في الفيزياء التقليدية هي تلك التي يحدث فيها تغير في الطاقة الداخلية للأجسام المتصادمة بدءاً بالتشويه وانتهاءً بالتحطم إلى عدة أجزاء. أما في الميكانيك الكمومي فيترافق الاصطدام غير المرن بحالات استحاث : تحريض الذرة على سبيل المثال، تغيير مستويات الطاقة الإلكترونية فيها إلى حد التأيين، أو بحالات استبدال، أن نستبدل الإلكترون المصطدم بالذرة بأحد إلكترونات الذرة وهي الحالة التي استثنيناها في الفقرة السابقة. يمكن أيضاً أن يتفكك الجسيم إلى جسيمات جديدة وهو موضوع تعنى به بشكل خاص نظرية الحقول المكممة ونظرية الجسيمات الأولية لأنه كثيراً ما يحدث في طاقات (وسرع) عالية تتطلب الجمع بين النظرية الكمومية ونظرية النسبية الخاصة. يطلق عادة على سيرورة اصطدام من نوع معين اسم قناة ويقال عن القناة إنها مفتوحة أو مغلقة حسبما تكون قوانين الانحفاظ (انحفاظ الطاقة خاصة) متوائمة مع حدوثها أو غير متوائمة. يعني هذا كله أننا ملزمون في دراسة هذه السيرورات أخذ وسطاء جديدة بعين الاعتبار، سبين الجسيمات المتفاعلة الذي أهملناه في الاصطدامات المرنة والمتغير في الاصطدامات غير المرنة، الشحنة الكهربائية الكلية في حال التفكك : إنها مقدار منحفظ، وكذلك الاندفاع الكلي المنحفظ. لنذكر أن انحفاظ الاندفاع هو الذي دفع باولي إلى التنبؤ بالنوترينو في تفكك النوترون إلى إلكترون وبروتون ونوترينو إلكتروني مضاد : $n \rightarrow p + \bar{e} + \bar{\nu}$، الخ.

لنرمز إلى الجسيم الوارد بـ X وإلى الجسيم الهدف بـ A للتمييز بين ثلاثة أنواع من الاصطدامات:

a) $A+X \to A+X$ : لم يتغير شيء في طبيعة الجسيمين، في حالتهما الداخلية ولم ينتج عن التصادم إلا انعطاف الجسيمين بالنسبة لاتجاههما قبل الاصطدام وهكذا فالاصطدام مرن.

b) $A+X \to A'+X'$ : احتفظ الجسيمان بهويتهما ولكن حالتهما الكمومية أضحت مختلفة بعد الاصطدام، تغيرت مساقط السبين تحولاً من الحالة $\langle -+|$ مثلاً إلى $\langle +-|$ والاصطدام غير مرن.

c) $A+X \to B+Y$ يتبادل الجسيمان في هذه الحالة مكوناتهما الأولية، أو تنتج مكونات أولية جديدة بحيث يختلف نتاج الاصطدام كلياً عن الجسيمين المتصادمين؛ أبرز مثال على ذلك التفكك. إن التفاعل الكيمياوي مثل آخر عن إعادة ترتيب المكونات، تبادل الجسيمات، وكذا الأمر في التفاعلات النووية، الخ.

## 2.4- دالة غرين بدليل المحلل $R_\lambda$

عرفنا في الفصل الخامس (تعريف 15 و (5.(3.1) محلل مؤثر ما، سنرمز له هنا بـ A على الشكل

$$R_\lambda = \frac{I}{A-\lambda I} \qquad (4.1)$$

وقلنا إنه معرف في كل المستوي العقدي وتحليلي كتابع للعدد العقدي $\lambda$ ماعدا النقاط الحقيقية المنتمية إلى طيف A، المتصل منه والمنفصل. نريد هنا كتابته بدليل القيم الخاصة لـ A. ليكن $P_n$ المسقط على القيمة الخاصة $\lambda_n$ و $A=\sum_n \lambda_n P_n$. نكتب $R_\lambda$ على الشكل

$$R_\lambda = \frac{\sum_m P_m}{\sum_n (\lambda_n - \lambda) P_n} = \sum_{m,n} \frac{P_m P_n}{(\lambda_n-\lambda)P_n} \qquad (4.1)'$$

حيث ضربنا الصورة والمخرج بـ $P_n$؛ و $P_m P_n = 0$ من أجل $m \neq n$ و $P_n^2 = P_n$ من أجل $m=n$؛ وهكذا فإن

$$R_\lambda = \sum_n \frac{P_n}{(\lambda_n-\lambda)P_n} = \sum_n \frac{I}{\lambda_n - \lambda} \qquad (4.2)$$

إذا كان الطيف منفصلاً و n درجة تدني المستوى n وإلا فإن $P_n = \int_{\alpha_1}^{\alpha_n} |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n| dn$ $P_n = \sum_{i=1}^{n} |n_i\rangle\langle n_i|$ حيث $\alpha_1\alpha_n$ هو مجال تدني المستوى n في الطيف المتصل و $I = \int |\lambda\rangle\langle\lambda d\lambda$.

لنفرض أننا نريد حل المعادلة التالية، التي ليست معادلة القيم الخاصة: طرفها الثاني غير متناسب مع U

$$(A-\lambda I)U(x) = f(x) \qquad (4.3)$$

، $U = c_n u_n$   A مكونة من المتجهات الخاصة لـ الهيلبرتي، الفضاء في مشتركة قاعدة f و U لـ وأن كل n الشكل التالي

$AU = \lambda_n c_n u_n$ ، $f = d_n u_n$ . تأخذ المعادلة (4.3) من أجل كل n الشكل التالي

$$c_n(\lambda_n - \lambda)\, u_n(x) = d_n u_n(x) \tag{4.4}$$

ومنه

$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda} = \frac{\langle u_n | f \rangle}{\lambda_n - \lambda}$$

إن صورة الطرف الأخير تعريفاً هو

$$\int \overline{u_n(x')}\, f(x')\, dx'$$

وبالتالي فإن حل (4.3) المطلوب هو

$$U = \sum_n c_n\, u_n(x) = \sum_n \frac{u_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int \overline{u_n(x')}\, f(x')\, dx'$$

عليه لمعادلة تفاضلية ما بطرف ثان تبين مقارنة الطرف الأخير في هذا الحل مع الحل الذي حصلنا

(2.14) أن دالة غرين (ندخل $u_n(x)$ تحت إشارة التكامل) هي

$$G(x - x') \equiv G(x, x') = \sum_n \frac{u_n(x)\, \overline{u_n(x')}}{\lambda_n - \lambda} \tag{4.5}$$

. $f(x')$ . أما دالة غرين فقد عبرنا وأن حل المعادلة هو جداء التلاف لدالة غرين بالطرف الثاني للمعادلة

عنها بدليل محلل المؤثر A (4.2).

لنلاحظ أن الطرف الأخير في (4.2) هو أيضاً الدالة

$$R_\lambda = \sum_m \frac{P_m}{\lambda_m - \lambda} \tag{4.2)'$$

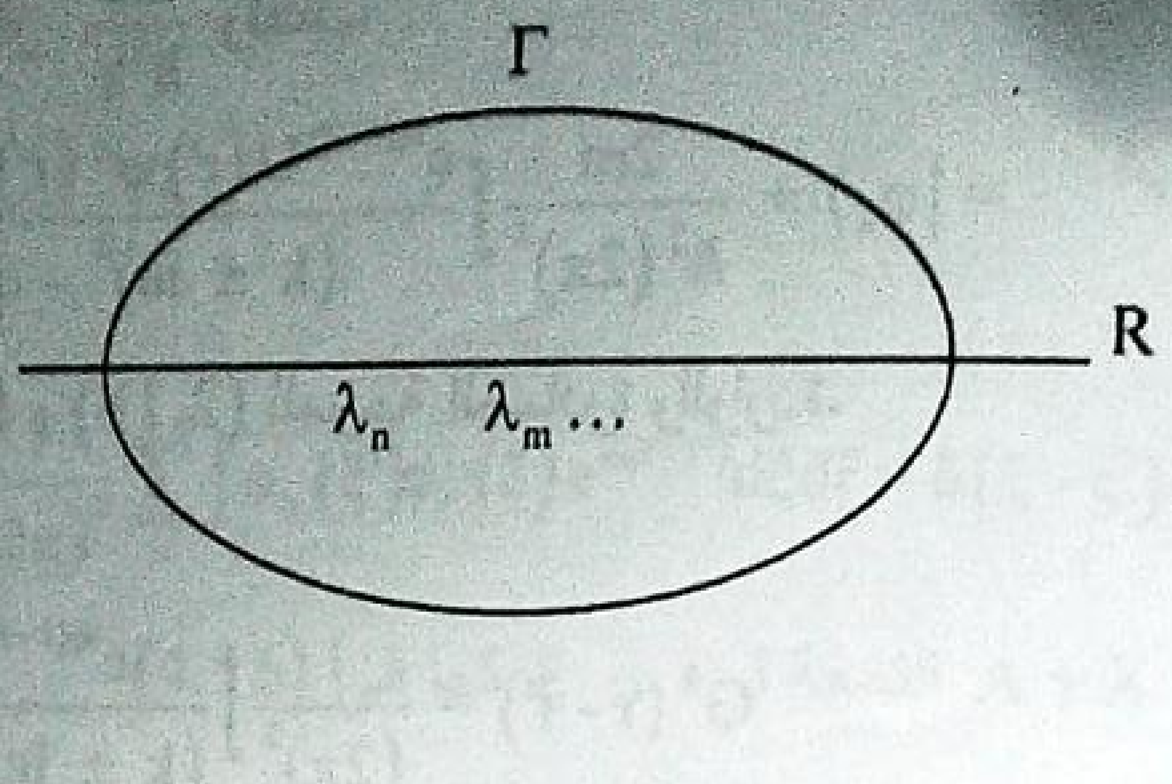
والتي يمكننا أن نحصل عليها كما حصلنا على (4.2) انطلاقاً من '(4.1) بضرب الصورة والمخرج بـ $P_m$ عوضاً عن $P_n$ بحيث يختفي $P_n$ في المخرج ويبقى $P_m$ . عندما نكامل $R_\lambda$ في هذه العلاقة على دائر في المستوى العقدي $\Gamma_n$ يتضمن القيمة الخاصة $\lambda_n$ للمؤثر A ، المقابلة للمسقط $P_n$ وهي قيمة حقيقية فإن نتيجة التكامل بحساب البواقي، حيث للدالة $R_\lambda$ قطب واحد هو $\lambda_n$ هي

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} R_\lambda\, d\lambda \tag{4.6}$$

يُكتب في كثير من الأحيان $R(Z)dZ$ للإلحاح على التكامل في المستوى العقدي.

كما أن التكامل على دائر $\Gamma$ يحتوي عدة قيم خاصة للمؤثر يقابلها المسقط $P_\Gamma$ هو

$$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma R_\lambda\, d\lambda \tag{4.6)'$$




ومنه

$$AP_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} AR_\lambda d\lambda \tag{4.7}$$

لكن تعريف المحلل (4.1) يرينا أن $AR_\lambda = \lambda R_\lambda + I$، ومنه بوضع هذه القيمة في (4.7)

$$AP_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \lambda R_\lambda d\lambda \tag{4.7'}$$

لنطبق الطريقة التي أوصلتنا إلى (4.5) على معادلة القيم الخاصة التالية

$$(H_o + U)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{4.8}$$

نكتب المحلل (مع إشارة ناقص) على الشكل

$$R_E = \frac{I}{E - H_o} \tag{4.9}$$

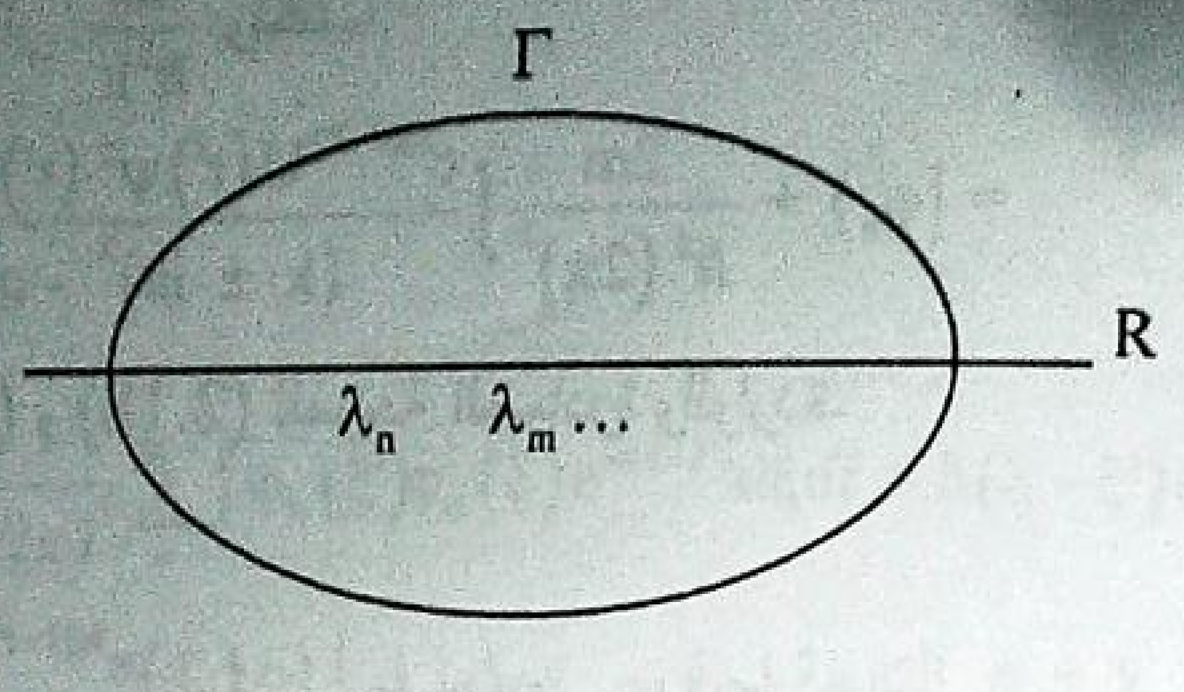
الطيف طيف متصل، نرمز لمتجهات القاعدة فيه –في التمثيل $\bar{k}$– ب $\varphi(q) \equiv |q\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}}$

والقيم الخاصة المقابلة لها هي $E_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$. ونكتب $R_E$ كما في '(4.2) (لا ننسى تغير الإشارة في التعريف)

$$R_E = \int \frac{|q\rangle\langle q| d\bar{q}}{\lambda - E_q} \equiv \int \frac{|\varphi(q)\rangle\langle\varphi(q)|}{\lambda - E_q} \tag{4.9'}$$

لتكن المتجهة $|\varphi_n\rangle$ حل معادلة شرودينغر الحرة $(U = 0)$ المقابلة للطاقة $E_n$؛ نكتب الحلين الممكنين لـ (4.8) ونرمز لهما بـ $\psi^\pm$ آخذين بعين الاعتبار أن ما يلعب دور الطرف الثاني في (4.3)، $f(x)$، هو $U\psi^\pm$، إنهما

$$|\psi^\pm\rangle = |\varphi_n\rangle + \int \frac{|\varphi_q\rangle\langle\varphi_q|U|\psi^\pm\rangle d\bar{q}}{E_n \pm i\varepsilon - E_q}$$
$$= |\varphi_n\rangle + \frac{2m}{\hbar^2 (2\pi)^3}\int \frac{e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}}\int e^{-i\bar{q}\cdot\bar{r}'} U(\bar{r}')\psi^\pm(\bar{r}')d\bar{r}'d\bar{q}}{k^2 \pm \frac{i2m\varepsilon}{\hbar^2} - q^2} \tag{4.10}$$




ومنه

$$AP_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} AR_\lambda d\lambda \qquad (4.7)$$

لكن تعريف المحلل (4.1) يرينا أن $AR_\lambda = \lambda R_\lambda + I$ ، ومنه بوضع هذه القيمة في (4.7)

$$AP_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \lambda R_\lambda d\lambda \qquad (4.7)'$$

لنطبق الطريقة التي أوصلتنا إلى (4.5) على معادلة القيم الخاصة التالية

$$(H_o + U)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \qquad (4.8)$$

نكتب المحلل (مع إشارة ناقص) على الشكل

$$R_E = \frac{I}{E - H_o} \qquad (4.9)$$

الطيف طيف متصل، نرمز لمتجهات القاعدة فيه –في التمثيل $\vec{k}$ – ب $\varphi(q) \equiv |q\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$

والقيم الخاصة المقابلة لها هي $E_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$ . ونكتب $R_E$ كما في '(4.2) (لا ننسى تغير الإشارة في التعريف)

$$R_E = \int \frac{|q\rangle\langle q| d\vec{q}}{\lambda - E_q} \equiv \int \frac{|\varphi(q)\rangle\langle\varphi(q)|}{\lambda - E_q} \qquad (4.9)'$$

لتكن المتجهة $|\varphi_n\rangle$ حل معادلة شرودينغر الحرة $(U = 0)$ المقابلة للطاقة $E_n$؛ نكتب الحلين الممكنين لـ (4.8) ونرمز لهما بـ $\psi^\pm$ آخذين بعين الاعتبار أن ما يلعب دور الطرف الثاني في (4.3)، $f(x)$، هو $U\psi^\pm$، إنهما

$$|\psi^\pm\rangle = |\varphi_n\rangle + \int \frac{|\varphi_q\rangle\langle\varphi_q|U|\psi^\pm\rangle d\vec{q}}{E_n \pm i\varepsilon - E_q} \qquad (4.10)$$

$$= |\varphi_n\rangle + \frac{2m}{\hbar^2 (2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} U(\vec{r}')\psi^\pm(\vec{r}')d\vec{r}' d\vec{q}}{k^2 \pm \frac{i2m\varepsilon}{\hbar^2} - q^2}$$

نبقي على التسمية ε للمقدار $\frac{m\varepsilon}{\hbar^2 k}$ ونكتب

$$= |\varphi_n\rangle + \frac{2m}{\hbar^2 (2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} U(\vec{r}') \psi^{\pm}(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{q}}{(k \pm i\varepsilon)^2 - q^2}$$

حيث جمعنا الحلين (2.17) و(2.18) للموجة الصادرة والواردة.

أو

$$G^{\pm}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{q}}{(k \pm i\varepsilon)^2 - q^2} \qquad (4.11)$$

تنطبق هذه النتائج على ما حصلنا عليه في (§3.2) مع فارق أساسي هو أن المحلل معرف في المستوى العقدي ولذا يبدو المتغير $\lambda = E_n \pm i\varepsilon$ المنتمي إلى $\mathbb{C}$ بشكل طبيعي في هاتين العلاقتين وليس كتقنية انتقال إلى $\mathbb{C}$ تهدف إلى جعل التكامل متقارباً.

## 3.4– صيغة ليبمان – شفينغر Lippman-Schwinger

سندرس تفاعل جسيم حر X مع نظمة معقدة نرمز لها بـ A ونفترض أن مركز كتلتها هو مركز الجملة X + A.

لنرمز بـ ξ لمجمل درجات حرية النظمة A، إحداثياتها، سبينها، الخ وبـ $H(\xi)$ لهاميلتونها وبـ $|\psi(\vec{r},\xi)\rangle$ لحالة الجملة. كما نرمز بـ $U(\vec{r},\xi)$ لمؤثر التفاعل بين A و X حيث $\vec{r}$ وضع الموجة الواردة. نفترض أخيراً عدم وجود جسيم مطابق لـ X في النظمة A. لنفرض أن حل الموجة التابع لـ $\vec{r}$ وحده هو موجة مستوية

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \qquad (4.12)$$

ومعادلة شرودينغر لـ A + X هي

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + H(\xi) + \tilde{U}(r,\xi)\right)|\psi(\vec{r},\xi)\rangle = E|\psi(\vec{r},\xi)\rangle \qquad (4.13)$$

لتكن متجهات الحالة $\varphi_b(\xi)$ متجهات خاصة للهاميلتوني $H(\xi)$ تقابلها القيم الخاصة $\varepsilon_b$

$$H\varphi_b(\xi) = \varepsilon_b \varphi_b(\xi) \qquad (4.14)$$

وهكذا فإن للهاميلتوني الكلي

$$H_o = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + H(\xi) \qquad (4.15)$$

نظمة متجهات خاصة

$$\phi_{bq} = \varphi_b(\xi) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \qquad (4.16)$$

$$\varepsilon_b + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \qquad (4.17)$$

التي تنظمها وفق العلاقة

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_b \int \overline{\varphi_b}(\xi')\varphi_b(\xi)e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d\xi d\vec{r} = \delta(\xi-\xi')\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

لنكتب الحالة البدائية للجملة $A + X$ التابعة لـ $\vec{r}$ و $\xi$ كما في (4.16)

$$\phi_a = \phi_{ok_o} = \varphi_o(\xi)e^{i\vec{k}_o\cdot\vec{r}} \qquad (4.18)$$

حيث $\varphi_o(\xi)$ هي حالة قاع النظمة $A$ أي

$$H\varphi_o(\xi) = \varepsilon_o\varphi_o(\xi)$$

ونكتب الحالة النهائية على الشكل

$$\phi_{bk_b} = \varphi_b(\xi)e^{i\vec{k}_b\cdot\vec{r}} \qquad \text{حيث} \quad H\varphi_b(\xi) = \varepsilon_b\varphi_b(\xi)$$

يقتضي انحفاظ الطاقة $E_a = E_b$ تحقق المساواة

$$\varepsilon_o + \frac{\hbar^2 k_o^2}{2m} = \varepsilon_b + \frac{\hbar^2 k_b^2}{2m}$$

فنقول إن القناة مفتوحة في حال

$$\frac{\hbar^2 k_b^2}{2m} = \varepsilon_o - \varepsilon_b + \frac{\hbar^2 k_o^2}{2m} \geq 0$$

وإلا فهي مغلقة

$$\varepsilon_o - \varepsilon_b + \frac{\hbar^2 k_o^2}{2m} < 0$$

نكتب معادلة القيم الخاصة (4.13) بدليل المحلل

$$(E_a - H_o)|\psi\rangle = U|\psi\rangle$$

مع الملاحظة أن المسقط $P_m$ في '(4.2) متوقف على دليلين أحدهما منفصل والآخر متصل هما $b$ و $q$ ولذا نكتبه على الشكل $P_{bq}$، وكذلك فإن القيم الخاصة لـ $H_o$ هي $E_{pq}$ ونكتب $Z = \lambda \in \mathbb{C}$ على الشكل $Z = E_a + i\varepsilon$؛ نرمز أخيراً لـ $R_\lambda$ بـ $G(Z)$. وهكذا فإن

$$R_E \equiv G(Z) = G(E_a + i\varepsilon) = \sum_{b,q}\frac{P_{bq}}{Z - E_{bq}} = \sum_{bq}\frac{|\phi_{bq}\rangle\langle\phi_{bq}|}{E_a + i\varepsilon - E_{bq}} \qquad (4.19)$$

$$= \sum_b \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\varphi_b(\xi)e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\overline{\varphi_b}(\xi')e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'}dq}{E_a + i\varepsilon - E_{bq}}$$

إنه مجموع محللات تابعة لـ $b$، لذا نكتبه على الشكل

$$G(E_a + i\varepsilon) = \sum_b g_b^+ \qquad (4.19)'$$

حيث

$$g_b^+ = \frac{1}{(2\pi)^3}\varphi_b(\xi)\overline{\varphi}_b(\xi')\int \frac{e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}d\vec{q}}{E_a + i\varepsilon - E_{bq}} \qquad (4.20)$$

نكتب المخرج في هذه العلاقة من أجل قناة ما

$$\frac{\hbar^2 k_b^2}{2m} = \left(\varepsilon_o - \varepsilon_b + \frac{\hbar^2 k_o^2}{2m}\right) = E_a - E_{bq} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$$

لنجد

$$g_b^+ = \frac{2m}{\hbar^2 (2\pi)^3}\varphi_b(\xi)\overline{\varphi}_b(\xi')\int \frac{e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}d\vec{q}}{k_b^2 - q^2 + i\varepsilon} \qquad (4.20)'$$

وليس التكامل، مضروباً بـ $\frac{1}{(2\pi)^3}$، سوى دالة غرين الصادرة (2.17) $-\frac{e^{ik_b|x|}}{4\pi|x|}$ حيث $|x| = \vec{r} - \vec{r}'$ ولدينا في النهاية

$$g_b^+(\vec{r}, \xi, \vec{r}', \xi') = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\varphi_b(\xi)\overline{\varphi}_b(\xi')\frac{e^{ik_b|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (4.20)''$$

نخلص من هذا كله إلى أن الكتابة الصورية لـ (4.8) بدليل (4.9) وإضافة الحل بدون طرف ثان $|\varphi_a\rangle$

$$|\psi\rangle = |\varphi_a\rangle + \frac{U}{E - H_o}|\psi\rangle \qquad (4.8)'$$

تتيح لنا وضع الموجة الصادرة على الشكل

$$|\psi_a^+\rangle = |\phi_a\rangle + G(Z_a)U|\psi^+\rangle \qquad (4.21)$$

وبتبديل $G(Z_a)$ بقيمتها في (4.19) وملاحظة '(4.19) و "(4.20)، نجد

$$\begin{aligned}|\psi_a^+\rangle = |\phi_a\rangle &- \frac{m}{2\pi\hbar^2}\sum_b \varphi_b(\xi)\int\overline{\varphi}_b(\xi')\frac{e^{ik_b|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}U(\vec{r}', \xi')\psi_a^+(\vec{r}', \xi')d\xi' d\vec{r}' \\ &+ \sum_{b'}\int g_{b'}^+(\vec{r}, \xi, \vec{r}', \xi')U(\vec{r}', \xi')\psi_a^+(\vec{r}', \xi')d\xi' d\vec{r}'\end{aligned} \qquad (4.21)'$$

يقابل الجمع الأول كل القنوات المفتوحة الممكنة سواء أكانت تبعثراً أو تفاعلاً، في حين يقابل الجمع الثاني القنوات المغلقة $k_{b'}^2 < 0$. وتحسب دالات غرين الجزئية $g_{b'}^+$ على غرار الدالات $g_b^+$. نكتب (4.21) بشكل صوري كما في '(4.8) في الفضاء العقدي بدليل $E_a$ كما يلي

$$|\psi_a^+\rangle = |\phi_a\rangle + [E_a + i\varepsilon - H_o]^{-1}U|\psi_a^+\rangle$$

تعرف هذه الصيغة باسم صيغة ليبمان–شفينغر.

## 4.4- حساب المقطع الفعال

نكتب من أجل المسافات الكبيرة، كما فعلنا في (2.20) $k_b|\vec{r}-\vec{r}'| = k_b r - \vec{k}_b\vec{r}'$، والشكل المقارب لـ (4.21)' على النحو التالي

$$|\psi_a^+\rangle = |\phi_a\rangle + \sum_b f_{ba}\varphi_b(\xi)\frac{e^{ik_b r}}{r} \qquad (4.21)''$$

حيث

$$f_{ba} = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\int\bar{\varphi}_b(\xi')\, e^{-i\vec{k}_b\cdot\vec{r}'}U(\vec{r}',\xi')\,\psi_a^+(\vec{r}',\xi')\,d\xi' d\vec{r}' \qquad (4.22)$$

$$= \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\langle\phi_b|U|\psi_a^+\rangle \qquad (4.22)'$$

إنها سعة الانتقال، سعة التبعثر من الحالة a إلى الحالة b، التي تعبر عن التبعثر المرن في حال $a \equiv b$

$$\varphi_a(\xi) = \varphi_b(\xi) \quad ; \quad \varepsilon_a = \varepsilon_b \quad و \quad |\vec{k}_o| = |\vec{k}_b|$$

يلزمنا لتعيين المقطع الفعال التفاضلي المقابل للانتقال من a إلى b ضرب "(4.21) على اليسار بـ $|\langle\varphi_b(\xi)|$ ثم المكاملة على كل الإحداثيات الداخلية $\xi$ لنحصل على الموجة المتبعثرة

$$e^{i\vec{k}_o\cdot\vec{r}} + f_{aa}(\theta)\frac{e^{ik_o r}}{r} \quad \text{في حال} \quad b = a$$

و

$$f_{ba}(\theta)\frac{e^{ik_b r}}{r} \quad \text{في حال} \quad b \neq a$$

لم تعد $\theta$ زاوية الانعطاف بين $\vec{k}_o$، متجهة الموجة الواردة و $\vec{k}_b'$ متجهة الموجة الصادرة ($\vec{k}_b' = k_b\frac{\vec{r}}{r}$) بل دالة تابعة للاتجاهين : $f_{ba}(\theta) = f_{ba}(\vec{k}_o, \vec{k}_b')$.

وإذاً فالمقطع الفعال التفاضلي حسب (2.22) و '(4.22) هو

$$d\sigma_{ba} = \frac{k_b}{k_o}|f_{ba}(\theta)|^2 d\Omega = \frac{m^2 k_b}{(2\pi\hbar^2)^2 k_o}|\langle\phi_b|U|\psi_a^+\rangle|^2 d\Omega \qquad (4.23)$$

إن ضرب المقطع الفعال بتدفق الجسيمات الواردة، الذي نأخذه كالمعتاد مساوياً لـ $v_a = \frac{\hbar k_o}{m}$ (أي بتنظيم الموجة الواردة بحيث تحتوي وحدة الحجوم على جسيم واحد) يعطينا عدد الجسيمات في الحالة b في عنصر الزاوية المجسمة تعريفاً. ولذا علينا معرفة كثافة الحالة النهائية في واحدة الطاقات ونرمز لها بـ $d\rho_b$ للحصول على احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b؛ لدينا

$$\frac{d\bar{p}}{dE} = p^2\frac{dp}{dE}d\Omega$$

وبما أنه يجب اختيار ثابتة التنظيم بحيث تكون كثافة التيار الصادر $\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$ فإن

$$d\rho_b = \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3 dE} d\Omega = \frac{m\hbar k_b}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega \qquad (4.24)$$

والاحتمال تعريفاً هو المقطع الفعال مضروباً بالتدفق، وباستبدال عنصر الزاوية المجسمة بالكثافة الحجمية محسوبة بالإحداثيات الكروية

$$dP_{a\to b} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle \phi_b | U | \psi_a^+ \rangle\right|^2 d\rho_b \qquad (4.25)$$

نكتب العلاقة (4.25) في تقريب بورن

$$dP_{a\to b} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle \phi_b | U | \phi_a \rangle\right|^2 d\rho_b \qquad (4.25)^B$$

حيث "عنصر المصفوفة" (4.22) في تقريب بورن هو التكامل

$$\langle \phi_b | U | \phi_a \rangle = \int \bar{\varphi}_b(\xi)\, e^{-i\vec{k}_b \cdot \vec{r}}\, U \varphi_a(\xi)\, e^{i\vec{k}_o \cdot \vec{r}}\, d\vec{r}\, d\xi$$

نكتب عنصر مصفوفة التفاعل من أجل $\vec{r}$ معينة، حيث يقع التغير على الإحداثيات الداخلية وحدها

$$U_{ba}(\vec{r}) = \int \bar{\varphi}_b(\xi)\, \varphi_a(\xi)\, U(\vec{r},\xi)\, d\xi$$

ليأخذ عنصر المصفوفة الشكل

$$\langle \phi_b | U | \phi_a \rangle = \int U_{ba}(\vec{r})\, e^{i(\vec{k}_o - \vec{k}_b)\cdot \vec{r}}\, d\vec{r}$$

## 5.4– تصادم الإلكترونات السريعة مع الذرة

لنأخذ كمثال الإلكترونات السريعة القادرة على إعطاء جزء من طاقتها لتغيير وضع إلكترونات الذرة، إثارتها بل وتأيينها. سننظر للإلكترون الصادر على أنه الإلكترون ذو السرعة الأكبر الناتج عن تفاعل إلكترونين لا على التعيين. نرمز للذرة في الحالة البدائية بـ $\psi_o$ وفي الحالة النهائية بـ $\psi_n$ وللطاقتين المقابلتين بـ $E_o$ و $E_n$. نرمز كذلك لاندفاع الإلكترون الوارد بـ $p$ والصادر بعد الاصطدام بـ $p'$. يجب بطبيعة الحال أن يتحقق الشرط

$$\frac{p'^2 - p^2}{2m} + E_n - E_o = 0$$

أي ضرب كل العلاقة بالدالة $\delta\left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} + E_n - E_o\right)$. نرمز إلى وضع إلكترونات الذرة بـ $\vec{r}_b$ $b = 1, 2, \ldots Z$ وللطاقة الكامنة بـ

$$U = \frac{Ze^2}{r} - \sum_{b=1}^{Z} \frac{e^2}{|r - r_b|}$$

حيث $\vec{r}$ وضع الإلكترون الوارد. إن $\psi_a^+ = \psi_o e^{ik_o \cdot \vec{r}}$ هي جداء متجهة حالة الذرة في الحالة البدائية (حالة القاع)، بمتجهة حالة الإلكترون الوارد، و $\phi_b = \psi_n e^{ik_b \cdot \vec{r}}$ جداء حالة الذرة النهائية ذات الطاقة المثارة n بمتجهة حالة إلكترون صادر. نكتب المقطع الفعال التفاضلي للحصول على الطاقة n ونرمز له بـ $d\sigma_n$ بجمع (4.23) على كل الإلكترونات آخذين بعين الاعتبار (4.22)

$$d\sigma_n = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2}\frac{k_b}{k_a}\sum_b\left|\iiint \overline{\psi}_n e^{-ik_b \cdot \vec{r}} U(r, r_b)\, \psi_o e^{ik_o \cdot \vec{r}} d\vec{r}\, d\tau_1 \ldots d\tau_Z\right|^2 d\Omega \qquad (4.26)$$

حيث $d\tau_1 \ldots d\tau_Z = d\tau$ هو عنصر حجم فضاء الهيئة لتوزيع Z إلكترون في الفضاء العادي (تخلينا عن الـ ' في (4.22).

نلاحظ أولاً أن $\psi_o$ و $\psi_n$ متعامدتان وبالتالي فإن التكامل على Z (الحد الأول في الكمون) يعطي الصفر، وثانياً أننا عندما نضع كما فعلنا في الفقرة 3 $\vec{q} = \vec{k}_b - \vec{k}_o$ فإن بوضع $d\vec{r} = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ التكامل $\int \frac{e^{-i\vec{q}\vec{r}}}{|r - r_b|} d\vec{r}$ ليس سوى محول فوريي لكمون في النقطة $\vec{r}$ ناتج عن توزيع شحن في الفضاء كثافتها $\rho = \delta(\vec{r} - \vec{r}_b)$ وبالتالي (انظر (3.17)) فإنه يساوي

$$\frac{4\pi e^2}{q^2} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_b} \qquad (4.27)$$

ويأخذ تعبير المقطع الفعال الشكل

$$d\sigma_n = \left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4k_b}{q^4 k_o}\left|\int \overline{\psi}_n \sum_b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_b} \psi_o d\tau\right|^2 d\Omega$$

إن $\sum_b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_b}$ هي مصفوفة الانتقال؛ ونكتب أخيراً

$$d\sigma_n = \left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4k_b}{q^4 k_o}\left|\langle \psi_n \middle| \sum_b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_b} \middle| \psi_o \rangle\right|^2 d\Omega$$

## 5. المصفوفة S

### 1.5- التمثيل الوسطي

ندرس في هذه الفقرة طريقة وضعها هايزنبرغ عام 1943 لدراسة التبعثر (Scattering و Streuung بالألمانية ومنه S) تصلح في دراسة التبعثر المرن وغير المرن كما تصلح في نظرية الحقول المكممة التي تجمع بين الميكانيك الكمومي والنسبية الخاصة. تنطلق هذه الطريقة من المزج بين تمثيل شرودينغر الذي يعبر عن التطور بتغير متجهة الحالة مع الزمن وتمثيل هايزنبرغ الذي يعبر عنه بتغير المؤثرات مع

الزمن، ولذا يقال عن هذا التمثيل المزيج إنه التمثيل الوسطي. نفرق أولاً كما فعلنا حتى الآن في كتابة الهاميلتوني بين هاميلتوني الجسيمات غير المتفاعلة – الجسيمات الحرة – ونرمز له بـ $H_o$ وهاميلتوني التفاعل، سواء أنظرنا إلى هذا التفاعل كاضطراب صغير أمام الهاميلتوني الحر أم لا؛ نرمز له بـ $H'$ ونكتب الهاميلتوني الكلي على الشكل

$$H = H_o + H' \qquad (5.1)$$

ثم نكتب مؤثر التطور الواحدي $U(t, t_o)$ على شكل جداء لمؤثرين

$$U = U_o U' \qquad (5.2)$$

أولهما هو مؤثر التطور للجسيمات الحرة يحقق المعادلة ((1.(5.4))

$$i\hbar \frac{\partial U_o}{\partial t} = H_o U_o \quad ; \quad U_o(t, t_o) = e^{-i\frac{H_o}{\hbar}(t - t_o)}$$

وثانيهما يميز التفاعل سنكتبه على شكل معادلة تكاملية على النحو التالي

**تعريف 5 :**

نعرف متجهة الحالة في التمثيل الوسطي، ونرمز لها بـ $|\psi(t)\rangle_I$، بالعلاقة

$$|\psi(t)\rangle_I = U'(t, t_o)|\psi(t_o)\rangle_S \qquad (5.3)$$

يشير الدليل S إلى شرودينغر و I إلى وسطي.

نعلم من ('(1.(5.1)

$$|\psi(t_o)\rangle_S = U^{-1}(t, t_o)|\psi(t)\rangle_S$$

أو نظراً لـ (5.2)

$$= U'^{-1}U_o^{-1}|\psi(t)\rangle_S$$

نستبدل بهذه العلاقة قيمة $|\psi(t_o)\rangle_S$ في (5.3) لنحصل على

$$|\psi(t)\rangle_I = U_o^{\dagger}|\psi(t)\rangle_S \qquad (5.3)'$$

حيث $U_o^{\dagger} = U_o^{-1}$؛ وهكذا تساوي متجهة الحالة في التمثيل الوسطي في اللحظة $t_o$ متجهة حالة شرودينغر في هذه اللحظة لأن $U_o^{\dagger}(t_o, t_o) = U^o(t_o, t_o) = I$ وتخضع لمعادلة شرودينغر التالية

$$i\hbar \frac{\partial|\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = -U_o^{\dagger}H_o|\psi(t)\rangle_S + U_o^{\dagger}i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle_S}{\partial t}$$

لأن $i\hbar\frac{\partial U_o^{\dagger}}{\partial t} = -U_o^{\dagger}H_o$؛ ثم إن $|\psi(t)\rangle_S$ تخضع لمعادلة شرودينغر المعتادة مع $H = H_o + H'$ بحيث تأخذ معادلة شرودينغر لمتجهة الحالة الوسطية الشكل

$$i\hbar \frac{\partial|\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = U_o^{\dagger}H'U_o|\psi(t)\rangle_I \qquad (5.4)$$

الزمن، ولذا يقال عن هذا التمثيل المزيج إنه التمثيل الوسطي. نفرق أولاً كما فعلنا حتى الآن في كتابة الهاميلتوني بين هاميلتوني الجسيمات غير المتفاعلة – الجسيمات الحرة – ونرمز له بـ $H_o$ وهاميلتوني التفاعل، سواء أنظرنا إلى هذا التفاعل كاضطراب صغير أمام الهاميلتوني الحر أم لا؛ نرمز له بـ $H'$

ونكتب الهاميلتوني الكلي على الشكل

$$H = H_o + H' \qquad (5.1)$$

ثم نكتب مؤثر التطور الواحدي $U(t, t_o)$ على شكل جداء لمؤثرين

$$U = U_o U' \qquad (5.2)$$

أولهما هو مؤثر التطور للجسيمات الحرة يحقق المعادلة ((1.(5.4))

$$i\hbar \frac{\partial U_o}{\partial t} = H_o U_o \quad ; \quad U_o(t, t_o) = e^{-i\frac{H_o}{\hbar}(t - t_o)}$$

وثانيهما يميز التفاعل سنكتبه على شكل معادلة تكاملية على النحو التالي

**تعريف 5 :**

نعرف متجهة الحالة في التمثيل الوسطي، ونرمز لها بـ $|\psi(t)\rangle_I$، بالعلاقة

$$|\psi(t)\rangle_I = U'(t, t_o)|\psi(t_o)\rangle_S \qquad (5.3)$$

يشير الدليل $S$ إلى شرودينغر و $I$ إلى وسطي.

نعلم من ('(1.(5.1)

$$|\psi(t_o)\rangle_S = U^{-1}(t, t_o)|\psi(t)\rangle_S$$

أو نظراً لـ (5.2)

$$= U'^{-1} U_o^{-1}|\psi(t)\rangle_S$$

نستبدل بهذه العلاقة قيمة $|\psi(t_o)\rangle_S$ في (5.3) لنحصل على

$$|\psi(t)\rangle_I = U_o^{\dagger}|\psi(t)\rangle_S \qquad (5.3)'$$

حيث $U_o^{\dagger} = U_o^{-1}$ ؛ وهكذا تساوي متجهة الحالة في التمثيل الوسطي في اللحظة $t_o$ متجهة حالة شرودينغر في هذه اللحظة لأن $U_o^{\dagger}(t_o, t_o) = U^o(t_o, t_o) = I$ وتخضع لمعادلة شرودينغر التالية

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = -U_o^{\dagger} H_o |\psi(t)\rangle_S + U_o^{\dagger} i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t}$$

لأن $i\hbar \frac{\partial U_o^{\dagger}}{\partial t} = -U_o^{\dagger} H_o$ ؛ ثم إن $|\psi(t)\rangle_S$ تخضع لمعادلة شرودينغر المعتادة مع $H = H_o + H'$ بحيث تأخذ معادلة شرودينغر لمتجهة الحالة الوسطية الشكل

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = U_o^{\dagger} H' U_o |\psi(t)\rangle_I \qquad (5.4)$$

نرمز للهاميلتوني المحول في الطرف الثاني بـ $H_I$ :

$$H_I = U_o^{\dagger} H' U_o \qquad (5.5)$$

مما يرينا أن متجهة الحالة الوسطية تخضع لمعادلة شرودينغر بهاميلتوني تفاعل، معبر عنه بتمثيل هايزنبرغ، يخضع فيه إلى معادلة هايزنبرغ ((1.(5.11)). وليس هذا هو حال هاميلتوني التفاعل فحسب وإنما لدينا

**قضية 3 :**

تخضع كل المؤثرات $A_S$ إلى معادلة هايزنبرغ في التمثيل الوسطي.

لنأخذ القيمة الوسطية لـ $A_S$ في تمثيل شرودينغر ونعبر عنها بدليل '(5.3)

$$\langle \psi(t)|A_S|\psi(t)\rangle_S = \langle \psi(t)|U_o^{\dagger} A_S U_o|\psi(t)\rangle_I$$

نرمز كما فعلنا بالنسبة للهاميلتوني 'H بـ $A_I$ إلى

$$A_I = U_o^{\dagger} A U_o$$

ولدينا بالاشتقاق

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[A_I, H_o] + \frac{\partial A_I}{\partial t} \qquad (5.6)$$

نعبر إذاً عن كل المؤثرات في تمثيل هايزنبرغ بدليل المؤثر الحر – الجزء الحر من مؤثر التطور – $U_o$ وتُخضع متجهة الحالة إلى معادلة شرودينغر بهاميلتوني التفاعل (5.5). إنه تمثيل بين بين، سميناه التمثيل الوسطي، ويُطلق عليه أيضاً اسم تمثيل التفاعل.

نكتب المعادلة التفاضلية التي يخضع لها مؤثر التطور 'U بدليل $H_I$. لدينا

$$i\hbar\frac{\partial U'}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_o^{\dagger}U = -U_o^{\dagger}H_oU + U_o^{\dagger}(H_o + H')U_oU'$$
$$= U_o^{\dagger}H'U_oU' = H_IU' \qquad (5.7)$$

نكتب هذه المعادلة التفاضلية على شكل تكاملي؛ $H_I$ تابع للزمن. مما يتيح لنا نشر 'U على شكل سلسلة (وليس كما فعلنا في ((1.(5.2)) و ((1.(5.4)) حيث لم يكن H تابعاً للزمن). لدينا

$$U'(t, t_o) = I - i\int_{t_o}^{t} d\tau_1 H_I(\tau_1)U'(\tau_1, t_o) \qquad (5.8)_I$$

نأخذ تسهيلاً للكتابة وحدات قيمة $\hbar$ فيها تساوي الواحد : تظهر $\hbar$ في هذه العلاقات في مخرج i :

$(-i)^n$ هي في الواقع $\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n$

$$U'(\tau_1, t_o) = I - i\int_{t_o}^{\tau_1} d\tau_2 H_I(\tau_2)U'(\tau_2, t_o)$$

وهكذا فالنشر من الرتبة الثانية

نرمز للهاميلتوني المحول في الطرف الثاني بـ $H_I$ :

$$H_I = U_o^\dagger H' U_o \tag{5.5}$$

مما يرينا أن متجهة الحالة الوسطية تخضع لمعادلة شرودينغر بهاميلتوني تفاعل، معبر عنه بتمثيل هايزنبرغ، يخضع فيه إلى معادلة هايزنبرغ ((1.(5.11)). وليس هذا هو حال هاميلتوني التفاعل فحسب وإنما لدينا

**قضية 3 :**

تخضع كل المؤثرات $A_S$ إلى معادلة هايزنبرغ في التمثيل الوسطي.

لنأخذ القيمة الوسطية لـ $A_S$ في تمثيل شرودينغر ونعبر عنها بدليل '(5.3)

$$\langle\psi(t)|A_S|\psi(t)\rangle_S = \langle\psi(t)|U_o^\dagger A_S U_o|\psi(t)\rangle_I$$

نرمز كما فعلنا بالنسبة للهاميلتوني $H'$ بـ $A_I$ إلى

$$A_I = U_o^\dagger A U_o$$

ولدينا بالاشتقاق

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[A_I, H_o] + \frac{\partial A_I}{\partial t} \tag{5.6}$$

نعبر إذاً عن كل المؤثرات في تمثيل هايزنبرغ بدليل المؤثر الحر – الجزء الحر من مؤثر التطور – $U_o$ ونُخضع متجهة الحالة إلى معادلة شرودينغر بهاميلتوني التفاعل (5.5). إنه تمثيل بين بين، سميناه التمثيل الوسطي، ويُطلق عليه أيضاً اسم تمثيل التفاعل.

نكتب المعادلة التفاضلية التي يخضع لها مؤثر التطور $U'$ بدليل $H_I$. لدينا

$$i\hbar\frac{\partial U'}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_o^\dagger U = -U_o^\dagger H_o U + U_o^\dagger(H_o + H')U_o U'$$

$$= U_o^\dagger H' U_o U' = H_I U' \tag{5.7}$$

نكتب هذه المعادلة التفاضلية على شكل تكاملي؛ $H_I$ تابع للزمن. مما يتيح لنا نشر $U'$ على شكل سلسلة (وليس كما فعلنا في ((1.(5.2)) و ((1.(5.4)) حيث لم يكن $H$ تابعاً للزمن). لدينا

$$U'(t, t_o) = I - i\int_{t_o}^{t} d\tau_1 H_I(\tau_1)U'(\tau_1, t_o) \tag{5.8$_1$}$$

نأخذ تسهيلاً للكتابة وحدات قيمة $\hbar$ فيها تساوي الواحد : تظهر $\hbar$ في هذه العلاقات في مخرج $i$ :

$(-i)^n$ هي في الواقع $\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n$

$$U'(\tau_1, t_o) = I - i\int_{t_o}^{\tau_1} d\tau_2 H_I(\tau_2)U'(\tau_2, t_o)$$

وهكذا فالنشر من الرتبة الثانية

نرمز للهاميلتوني المحول في الطرف الثاني بـ $H_I$ :

$$H_I = U_o^\dagger H' U_o \qquad (5.5)$$

مما يرينا أن متجهة الحالة الوسطية تخضع لمعادلة شرودينغر بهاميلتوني تفاعل، معبر عنه بتمثيل هايزنبرغ، يخضع فيه إلى معادلة هايزنبرغ ((1.(5.11)). وليس هذا هو حال هاميلتوني التفاعل فحسب وإنما لدينا

**قضية 3 :**

تخضع كل المؤثرات $A_S$ إلى معادلة هايزنبرغ في التمثيل الوسطي.

لنأخذ القيمة الوسطية لـ $A_S$ في تمثيل شرودينغر ونعبر عنها بدليل '(5.3)

$$\langle\psi(t)|A_S|\psi(t)\rangle_S = \langle\psi(t)|U_o^\dagger A_S U_o|\psi(t)\rangle_I$$

نرمز كما فعلنا بالنسبة للهاميلتوني 'H بـ $A_I$ إلى

$$A_I = U_o^\dagger A U_o$$

ولدينا بالاشتقاق

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[A_I, H_o] + \frac{\partial A_I}{\partial t} \qquad (5.6)$$

نعبر إذاً عن كل المؤثرات في تمثيل هايزنبرغ بدليل المؤثر الحر – الجزء الحر من مؤثر التطور – $U_o$وتُخضع متجهة الحالة إلى معادلة شرودينغر بهاميلتوني التفاعل (5.5). إنه تمثيل بين بين، سميناه التمثيل الوسطي، ويُطلق عليه أيضاً اسم تمثيل التفاعل.

نكتب المعادلة التفاضلية التي يخضع لها مؤثر التطور 'U بدليل $H_I$. لدينا

$$i\hbar\frac{\partial U'}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_o^\dagger U = -U_o^\dagger H_o U + U_o^\dagger(H_o + H')U_o U'$$

$$= U_o^\dagger H' U_o U' = H_I U' \qquad (5.7)$$

نكتب هذه المعادلة التفاضلية على شكل تكاملي؛ $H_I$ تابع للزمن. مما يتيح لنا نشر 'U على شكل سلسلة (وليس كما فعلنا في ((1.(5.2)) و ((1.(5.4)) حيث لم يكن H تابعاً للزمن). لدينا

$$U'(t, t_o) = I - i\int_{t_o}^{t} d\tau_1 H_I(\tau_1) U'(\tau_1, t_o) \qquad (5.8)_I$$

نأخذ تسهيلاً للكتابة وحدات قيمة $\hbar$ فيها تساوي الواحد : تظهر $\hbar$ في هذه العلاقات في مخرج i :

$(-i)^n$ هي في الواقع $\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n$

$$U'(\tau_1, t_o) = I - i\int_{t_o}^{\tau_1} d\tau_2 H_I(\tau_2) U'(\tau_2, t_o)$$

وهكذا فالنشر من الرتبة الثانية

$$U'(t,t_o) = I - i\int_{t_o}^{t} d\tau_1 H_I(\tau_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 H_I(\tau_1) H_I(\tau_2) U'(\tau_2, t_o) \quad (5.8)_2$$

وبالتكرار نحصل على السلسلة

$$U'(t,t_o) = I + \sum_{n=1}^{\infty} U'^{(n)}(t,t_o) \quad (5.9)$$

حيث

$$U'^{(n)}(t,t_o) = (-i)^n \int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{\tau_1}\cdots\int_{t_o}^{\tau_{n-1}} d\tau_1 \ldots d\tau_n H_I(\tau_1) H_I(\tau_2)\ldots H_I(\tau_n) \quad (5.10)$$

$$t > \tau_1 > \tau_2 \ldots > \tau_{n-1} > t_o$$

كما نحصل بالعودة إلى تعريف $U$ في (5.2) وتعريف $H_I$ في (5.5) على نشر $U$

$$U = U_o + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t,t_o) \quad (5.11)$$

حيث

$$U^{(n)}(t,t_o) = (-i)^n \int_{t_o}^{t}\cdots\int_{t_o}^{\tau_{n-1}} d\tau_1 \ldots d\tau_n U_o(t,t_o) U_o^{\dagger}(\tau_1,t_o) H'(\tau_1) U_o(\tau_1,t_o) U_o^{\dagger}(\tau_2,t_o) H'(\tau_2,t_o) U_o(\tau_2,t_o)\ldots \quad (5.12)$$

وبما أن $U_o(\tau_i,t_o)U_o^{\dagger}(\tau_j,t_o) = U_o(\tau_i,\tau_j)$ فإن $U^{(n)}(t,t_o)$ هو

$$U^{(n)}(t,t_o) = (-i)^n \int_{t_o}^{t}\cdots\int_{t_o}^{\tau_{n-1}} d\tau_1 \ldots d\tau_n U_o(t,\tau_1) H'(\tau_1) U_o(\tau_1,\tau_2)\ldots \quad (5.12)'$$

## 2.5- المصفوفة S

**تعريف 6 :**

نقول عن مؤثر التطور $U'(t,t_o)$ إنه مصفوفة التبعثر عندما تتناهى $t_o \to -\infty$ و $t \to \infty$؛ نعين عناصر هذه المصفوفة بين متجهتي حالة، نسمي الأولى الحالة البدائية أو الحالة الداخلة $|in\rangle$ (وباختصار $|i\rangle$) والأخرى الحالة النهائية أو الحالة الخارجة $|out\rangle$ (وباختصار $|f\rangle$) تمثلان كلاهما حالة جسيمات حرة ونكتب

$$\langle f|S|i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f|S^n|i\rangle \quad (5.13)$$

لدينا

$$\langle f|S^{(0)}|i\rangle = \langle f|i\rangle \quad (5.13)_0$$

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = -i\langle f|\int_{-\infty}^{+\infty} H_I(\tau_1)\, d\tau_1|i\rangle \quad (5.13)_1$$

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-i)^2\langle f|\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 H_I(\tau_1) H_I(\tau_2) d\tau_2|i\rangle \quad (5.13)_2$$

$\vdots \qquad \ldots$

لنفرض أن الحالتين البدائية والنهائية متجهتا حالة خاصة للهاميلتوني الحر $H_o$ تقابلهما القيمتان الخاصتان $E_i$ و $E_f$؛ لنفرض كذلك أن $H'$ مستقل عن الزمن بحيث يمكن كتابة $H_1(\tau_1)$ على الشكل

$$H_1(\tau_1) = U_o^\dagger(\tau_1) H' U_o(\tau_1)$$

وكتابة $(5.13)_1$ على الشكل

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = -i\langle f|H'|i\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E_f - E_i)\tau_1} d\tau_1$$

$$= -i2\pi\delta(E_f - E_i)\langle f|H'|i\rangle \qquad (5.13)'_1$$

ندخل من أجل حساب الحد الثاني في السلسلة المؤثر الوحدة للطيف المنفصل $I = \sum_j |j\rangle\langle j|$ (على غرار ما فعلناه في القضية 2) حيث $\langle j|$ قاعدة في الفضاء الهيلبرتي مؤلفة من المتجهات الخاصة للهاميلتوني $H_o$ : $H_o|j\rangle = E_j|j\rangle$. إلا أننا سنحصل بهذه الطريقة على جداء دالة ديراك بالدالة $\int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 e^{i(E_i - E_j)\tau_2}$ المتباعدة عندما يتناهى المتغير $\tau_2$ إلى اللانهاية. نتخلص من القطب $E_j - E_i$ حسب الطريقة التي اتبعناها بالانتقال إلى الفضاء العقدي واستبدال $(E_j - E_i - i\varepsilon)$ بـ $E_j - E_i$ حيث $\varepsilon > 0$ وهكذا تتناهى الدالة الأسية إلى الصفر عندما يسعى $\tau_2$ إلى $-\infty$ ونحصل على قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 e^{i(E_j - E_i - i\varepsilon)\tau_2} = -i\frac{e^{i(E - E - i\varepsilon)\tau_1}}{(E_j - E_i - i\varepsilon)}$$

وتأخذ $(5.13)_2$ الشكل

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = 2\pi i\delta(E_f - E_i)\sum_j \frac{\langle f|H'|j\rangle\langle j|H'|i\rangle}{E_j - E_i - i\varepsilon} \qquad (5.13)'_2$$

ونتابع بنفس الأسلوب لحساب الحدود التالية بوضع مؤثر الوحدة $I = \sum_{j'} |j'\rangle\langle j'|$، لنحصل في نهاية الأمر على الصيغة التالية من أجل $\langle f| \neq |i\rangle$ (أي من أجل $\langle i|f\rangle = 0$)

$$\langle f|S|i\rangle = -2\pi i\delta(E_f - E_i)\langle f|T|i\rangle \qquad (5.14)$$

حيث

$$\langle f|T|i\rangle = \langle f|H'|i\rangle + \sum_j \frac{\langle f|H'|j\rangle\langle j|H'|i\rangle}{E_i - E_j + i\varepsilon} + \sum_{jj'} \frac{\langle f|H'|j\rangle\langle j|H'|j'\rangle\langle j'|H'|i\rangle}{(E_i - E_j + i\varepsilon)(E_i - E_{j'} + i\varepsilon)} \qquad (5.14)'$$

ويطلق على T اسم مصفوفة الانتقال على سطح الطاقة (السطح المحدد بـ $E_i = E_j$ والذي يعبر عنه وجود التوزيعة $\delta(E_f - E_i)$ كعامل في الصيغة).

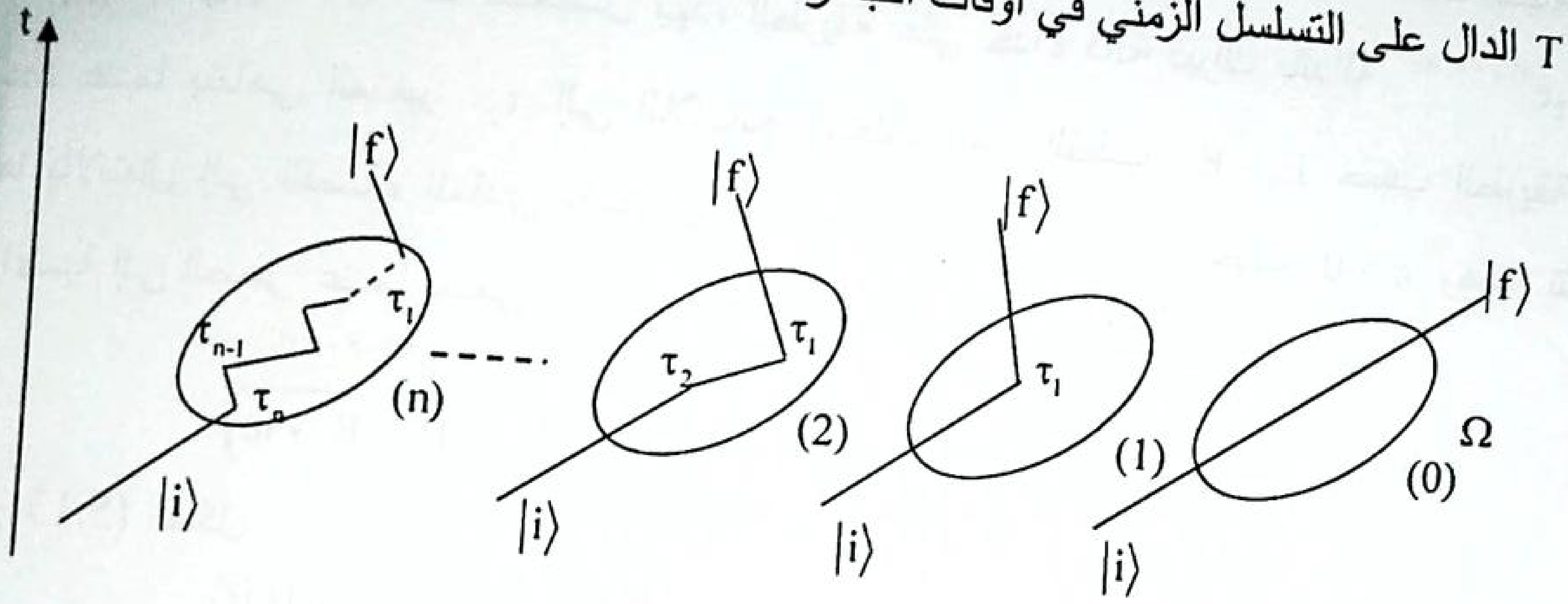
لا يحدث تغير كبير على الصيغة $(5.13)'_1$ والصيغ التي تليها عندما يكون الهاميلتوني $H'$ تابعاً للزمن: يجب في هذه الحالة وضع عنصر المصفوفة $\langle j|H'|j'\rangle = H'_{jj'}$ تحت رمز التكامل وكتابة عناصر المصفوفة على الشكل

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = -i\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 e^{i(E_f - E_i)\tau_1} H'_{fi}(\tau_1)$$

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 d\tau_2 e^{i(E_f - E_j)\tau_1} H'_{fj}(\tau_1) e^{i(E_j - E_i)\tau_2} H'_{ji}(\tau_2) \quad (5.15)$$

$$\vdots$$

يمكننا توضيح المحتوى الفيزيائي للمصفوفة S بواسطة مخططات فاينمان؛ تختلف هذه المخططات عن سابقاتها في §3.1 في كونها تعين لحظات التفاعل (التبعثر) وليس موضع التفاعل، في حقل الكمون على سبيل المثال. تعني $(5.13)_0$ أن النظمة الحرة $\langle i|$ تجتاز الكمون بدون أي تفاعل، دون أن تتبعثر لتصل إلى الحالة الحرة النهائية $\langle f|$؛ $(5.13)_1$ تعني وقوع التبعثر مرة واحدة – في اللحظة $\tau_1$ التي تأخذ كل القيم بين $-\infty$ و $+\infty$؛ و $(5.13)_2$ وقوع التبعثر مرتين في اللحظة $\tau_2$ متبوعة باللحظة $\tau_1$ $\tau_1 > \tau_2$ الخ ومنه الرمز T الدال على التسلسل الزمني في أوقات التبعثر




الشكل.9

نكتب هنا كما فعلنا في الفقرة السابقة من أجل الطيف المتصل مؤثر غرين بدليل المحلل للطيف المنفصل

$$G = (E_i + i\varepsilon - H_o)^{-1} \quad (5.16)$$

ويأخذ نشر T في '(5.14) الشكل

$$\begin{aligned} T &= H' + H'GH' + H'GH'GH' + \dots \\ &= H' + H'G(H' + H'GH' + \dots \\ &= H' + H'GT \end{aligned} \quad (5.17)$$

ومنه $(I - H'G)T = H'$

$$T = H'(I - H'G)^{-1} \quad (5.17)'$$

## 3.5- احتمال الانتقال

يتطلب حساب احتمال الانتقال من الحالة $|i\rangle$ إلى الحالة $|f\rangle$ حساب مربع العلاقة (5.14) : نعلم من نظرية التوزيعات أنه لا يمكن تعريف جداء عادي لتوزيعتين، لقياسيّ ديراك هنا. لذا نقوم بتنظيمه بكتابته على الشكل

$$\delta^2(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i) \times \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta T/2}^{+\Delta T/2} e^{i(E_f - E_i)t}dt$$

إن قيمة التكامل تساوي $\Delta T$ نظراً لأن $E_f - E_i = 0$ مما يتيح لنا تعريف احتمال الانتقال في واحدة الزمن

$$\frac{P_{f\leftarrow i}}{\Delta T} = 2\pi\delta(E_f - E_i)\left|\langle f|T|i\rangle\right|^2 \qquad (5.18)_1$$

هذا في الحالة الخاصة حيث $|f\rangle \neq |i\rangle$ أما في الحالة العامة فإننا نكتب عناصر المصفوفة S :

$$S = I - 2\pi i\delta(E_f - E_i)T$$

على الشكل

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i\delta(E_f - E_i)T_{fi}$$

حيث $\langle f|i\rangle = \delta_{fi}$، ونحصل على احتمال الانتقال بكتابة $T_{fi}$ على الشكل $ReT_{fi} + iImT_{fi}$ حيث Re و Im تشيران إلى القسم الحقيقي والتخيلي على الترتيب. ثم ضرب $S_{fi}$ بمرافقه العقدي

$$P_{f\leftarrow i} = |S_{fi}|^2 = \left|\langle f|i\rangle\right|^2 + 4\pi\langle f|i\rangle\delta(E_f - E_i)\,ImT_{fi} + (2\pi)^2\delta^2(E_f - E_i)|T_{fi}|^2 \qquad (5.19)$$

نعطي هنا أيضاً قيمة منتظمة لـ $\delta^2$ ونحصل على احتمال الانتقال في واحدة الزمن

$$\frac{P_{f\leftarrow i}}{\Delta T} = 0 + 2\langle f|i\rangle ImT_{fi} + 2\pi\delta(E_f - E_i)|T_{fi}|^2 \qquad (5.18)_2$$

كما نحصل بتقسيم $(5.18)_1$ على التدفق الوارد $\rho\bar{v}_i = \frac{\rho\bar{p}_i}{m_i}$ على الاحتمال في واحدة الزمن من أجل وحدة التدفق، أي على المقدار

$$d\sigma_{fi} = \frac{2\pi m_i}{p_i\rho}\left|\langle f|T|i\rangle\right|^2\delta(E_f - E_i) \qquad (5.20)$$

نكتب كثافة الحالة النهائية في واحدة الطاقات كما فعلنا في (4.24)؛ إنها المقدار

$$d\rho(E_f) = \frac{m_f p_f}{(2\pi\hbar)^3}d\Omega$$

ونضرب (5.20) به لنحصل على المقطع الفعال التفاضلي، ملاحظين أن $\delta(E)$ هي في الواقع $\hbar\delta(E) = \delta(E/\hbar)$، أي

$$d\sigma_{fi} = \frac{m_i m_f p_f}{(2\pi\hbar)^2 p_i}\left|\langle f|T|i\rangle\right|^2 d\Omega\delta(E_f - E_i)$$

حيث أخذنا $\rho = 1$ من أجل التدفق الوارد.

**قضية 4 : المبرهنة الضوئية**

نجمع في (5.19) احتمالات الانتقال من الحالة البدائية $|i\rangle$ إلى كل الحالات النهائية $|f\rangle$ وننظمها للواحد:

$$1 = P_{\sum_f f\leftarrow i} = 1 + \left(2\mathrm{Im}T_{ii} + 2\pi\sum_f \delta(E_f - E_i)|T_{fi}|^2\right)(2\pi)^{-1}\Delta T \qquad (5.19)'$$

حيث نظمنا $\delta(E_f - E_i)$ بـ $\frac{\Delta T}{2\pi}$.

ومنه

$$2\mathrm{Im}T_{ii} + 2\pi\sum_f \delta(E_f - E_i)|T_{fi}|^2 = 0 \qquad (5.19)''$$

إن الحد الثاني في الطرف الأول هو حسب (5.18)، احتمال الانتقال الكلي في واحدة الزمن من الحالة البدائية المحددة، $|i\rangle$، إلى كل الحالات النهائية سواء تعلق الأمر بتبعثر مرن أو غير مرن. نرمز لهذا الاحتمال بـ $P_i$ ولدينا

$$P_i = -2\mathrm{Im}T_{ii} \qquad (5.21)$$

نقسم هذا الاحتمال على التدفق $\rho\frac{p_i}{m}$ حيث $p_i$ اندفاع الحالة البدائية و $\rho = 1$ كثافة الحالة البدائية (جسيم واحد في واحدة الحجوم) لنحصل على المقطع الفعال الكلي : $\sigma_{tot}$

$$\sigma_{tot} = -2m\frac{\mathrm{Im}T_{ii}}{p_i} \qquad (5.22)$$

يمكننا كتابة هذه العلاقة بدليل سعة التبعثر $f$ كما فعلنا في الفقرات السابقة، انظر (1.17)، (2.21)، الخ. وحيث وضعنا العامل $\frac{-m}{2\pi\hbar^2}$ لتعريف سعة الانتقال؛ ولذا سنأخذ ذات العامل لكتابة سعة الانتقال $T_{ij}$ : $f_{jk} = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}T_{jk}$ . هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن عاملاً $\hbar$ موجود في كل حد من حدود الجمع على $\delta$ وهو بالتالي موجود في مخرج الطرف الثاني من (5.21)، أي أن

$$\sigma_{tot} = -2m\frac{\mathrm{Im}T_{ii}}{\hbar\hbar k_i} = \frac{4\pi \mathrm{Im}}{k_i}f_{ii} = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}f(\theta) \qquad (5.22)'$$

وهي الصيغة التقليدية للمبرهنة الضوئية في الحالة العامة : تبعثر مرن أو غير مرن.

# الفصل التاسع

## الميكانيك الكمومي النسبوي


1- معادلة كلاين – غوردن Klein-Gordon .. 397

2- معادلة ديراك ................................ 403

3- معادلة ديراك بوجود حقل خارجي ........ 418

4- ذرة الهدروجين النسبوية.......................... 430

# الفصل التاسع: الميكانيك الكمومي النسبوي

## 1. معادلة كلاين – غوردن Klein-Gordon

### 1.1- تمهيد

بينا منذ الفصل الأول أن ما يميز الميكانيك الكمومي هو الأفعال الصغيرة المتناسبة مع ثابتة بلانك $\hbar$ والتي تنطبق على واقع الأجسام المجهرية : الجزيئات والذرات ومكوناتها، أي على كل الجسيمات الأولية. رأينا أيضاً في الفصل السابع من كتاب الميكانيك أن نظرية النسبية الخاصة تصلح لدراسة الحركات التي تقارب سرعتها سرعة الضوء $V \preceq C$ وأن الميكانيك النيوتوني تقريب للميكانيك النسبوي عندما تكون الحركة بطيئة $V << C$. تنطبق النسبية الخاصة بشكل خاص على الجسيمات الأولية – الإلكترونات مثلاً – التي يمكن تسريعها بحيث تقترب سرعتها من سرعة الضوء، نظراً لصغر كتلتها. كما تنطبق بطبيعة الحال على الفوتونات التي تنتشر بالسرعة $C$. ولذا فمن اللازم وضع نظرية تضم في آن واحد الميكانيك الكمومي والنسبية الخاصة وتظهر في معادلاتها الثابتتان المميزتان لهاتين النظريتين $\hbar$ و $C$. إنها نظرية الجسيمات المجهرية بالغة السرعة. وعلينا بالتالي كتابة معادلة مسايرة التغير على غرار ما فعلناه في الكهرطيسية. إلا أن هذا وحده غير كافٍ لأن معادلة الكهرطيسية مسايرة التغير تعبر عن مقادير فيزيائية مقيسة، الشحنات والتيارات والطاقة التي نعبر عنها بدليل الحقلين الكهربائي والمغنطيسي. لابد إذاً من مقابلة هذه المقادير بمؤثرات ذاتية الترافق، أو بعبارة أخرى يجب تكميم الحقل المعبر عنه بمعادلة مسايرة التغير. وهكذا فإن النظرية المطلوبة الجامعة بين الميكانيك الكمومي والنسبية الخاصة هي نظرية الحقول المكممة الخارجة عن إطار هذا الكتاب. ثم إن مفهوم الجسيم يطرح مشكلة إضافية في النظرية الكمومية النسبية ذلك أن هذا المفهوم مرتبط بقياس الوضع بدقة فائقة. وهو أمر يمكن القيام به نظرياً في الميكانيك الكمومي العادي لأن علاقة اللاتحديد لا تمنع كون $\Delta x = 0$ وكل ما تقوله إن الاندفاع غير محدد كلياً في هذه الحالة؛ كما رأينا عملياً أن دقة قياس الوضع تتعين بقوة فصل المجهر : $\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\theta}$ وأن القياس الأدق تحققه أطوال الموجة الأقصر (إضاءة المجهر بالأشعة تحت البنفسجية مثلاً). إلا أن نظرية النسبية تفرض حداً أدنى على طول الموجة على النحو التالي : عندما نضيء الجسيم (الإلكترون) لتعيين وضعه فإن النور الذي يصل إلى العينية هو الضوء الذي أصدره الإلكترون

نحصل على أقصر طول موجة ممكن لهذا الضوء (مفعول كونتن Compton[1]) وليس الضوء الوارد عندما تتحول كل طاقة الجسيم E إلى إشعاع. ولدينا عندئذ (أكبر طاقة ممكنة له)

$$E = \frac{mC^2}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} = h\nu = h\frac{C}{\lambda} \qquad (1.1)$$

ومنه

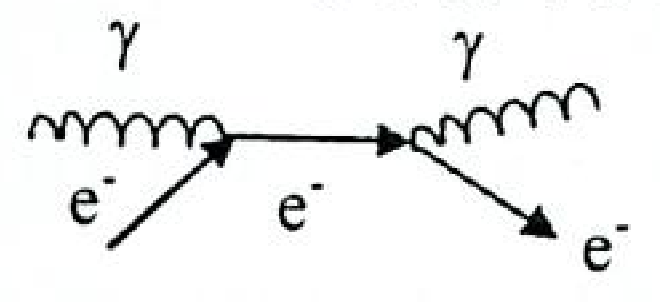
$$\lambda = \frac{h}{mC}\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \qquad (1.2)$$

وهكذا فإن رتبة دقة قياس الوضع هي $\Delta X \sim \lambda \sim \frac{h}{mC}$. تساوي $\frac{h}{mC}$ من أجل الإلكترون، على سبيل المثال، $2{,}4263.10^{-12}$م. لنعبر عن $\lambda$ بدليل طول موجة دوبري للمادة : $\lambda_m = \frac{h}{p} = \frac{h}{mV}\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$

$$\Delta X \sim \lambda = \lambda_m \frac{V}{C} \qquad (1.3)$$

---

[1] اكتسى مفعول كونتن الذي برهن عليه عام 1923 قبيل نشوء النظرية الكمومية (1925) أهمية كبرى لأنه بين بجلاء الطبيعة الجسيمية للفوتون : يصطدم فوتون بإلكترون نسبوي (نأخذ المقرن مرتبطاً بالإلكترون أي أن الإلكترون ثابت وطاقته $mC^2$) اصطداماً غير مرن، يمتص فيه الإلكترون الفوتون ويتحرك مصدراً فوتوناً آخر. نرى بسهولة من قانوني انحفاظ الاندفاع الخطي والطاقة حيث نرمز كالمعتاد بـ $P$ مثلاً إلى القيم قبل الاصطدام و $P'$ إلى هذه القيم بعد الاصطدام وبـ $\theta$ و $\varphi$ إلى زاويتي انحراف الفوتون والإلكترون على الترتيب بعد الاصطدام.




لدينا من أجل مسقطي الاندفاع الخطي

$$P_\gamma + 0 = P'_\gamma\cos\theta + P'_e\cos\varphi \qquad (1)$$

$$0 = P'_\gamma\sin\theta - P'_e\sin\varphi \qquad (1)'$$

ومن أجل الطاقة

$$h\nu + mC^2 = h\nu' + \left(P'^2_e C^2 + m^2C^4\right)^{1/2} \qquad (2)$$

نحصل من (1) و (1)' على

$$P'^2_e = P^2_\gamma + P'^2_\gamma - 2P_\gamma P'_\gamma\cos\theta \qquad (3)$$

ومن المعادلة (2) حيث نكتب $P_\gamma C$ عوضاً عن $h\nu$ على

$$P'^2_e = \left(P_\gamma - P'_\gamma\right)^2 + 2\left(P_\lambda - P'_\gamma\right)mC \qquad (4)$$

نساوي بين طرفي المعادلة (3) و(4) للتخلص من $P'^2_e$ فنجد

$$2P_\gamma P'_\gamma(1 - \cos\theta) = 2\left(P_\gamma - P'_\gamma\right)mC$$

نقسم الطرفين على $P_\gamma P'_\gamma$ ونستبدل $P_\gamma$ بـ $\frac{h}{\lambda}$ لنجد أن

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mC}(1 - \cos\theta) \qquad (5)$$

تنطبق هذه القيمة على ما تحصل عليه نظرية الحقول حسب مخطط فاينمان (من الرتبة الثانية).

التي ترينا أن تعيين الوضع مستحيل من أجل الجسيمات التي تقارب سرعتها سرعة الضوء (الجسيمات النسبوية) خلافاً لما هو عليه الحال من أجل الجسيمات البطيئة $V << C$، وذات الكتلة الكبيرة $\lambda_m << 1$. نستخلص من هذا كله أنه يستحيل في الميكانيك الكمومي النسبوي تعريف كثافة احتمال وأنه من اللازم الاستغناء عن مفهوم الجسيم ليحل محله مفهوم الحقل : حقل الإلكترون المكمم كحقل الفوتون المكمم، الخ. ومع ذلك فإننا سنستخرج في هذا الفصل المعادلة الكمومية مسايرة التغير (النسبوية) التي يخضع لها الإلكترون ومعه جسيمه المضاد البوزيترون – معادلة ديراك – وسنتابع النظر إلى الإلكترون كجسيم وليس كحقل وسننظر إلى تفاعله مع الحقل الكهرطيسي التقليدي (الكمون $\vec{A}$ و $A^o$ والحقلان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ دالات وليست مؤثرات) لأن هذا التقريب يحقق النتائج التجريبية للبنية الدقيقة لذرة الهدرجين على سبيل المثال، بالإضافة إلى الأهمية البالغة لمعادلة ديراك في تطوير النظريات الكمومية.

## 2.1– معادلة كلاين–غوردن

لنطبق مبدأ التقابل، وهو الذي أتاح لنا الانتقال من الميكانيك التقليدي إلى ميكانيك الكم على المعادلة الأساسية في النسبية – انحفاظ المتجهة رباعية الأبعاد الطاقة – الاندفاع، $\frac{E^2}{C^2} - p^2 = m^2C^2$، بأن نقابل الطاقة $\frac{E}{C}$ بالمؤثر التفاضلي $i\hbar\frac{\partial}{C\partial t}$ والاندفاع بـ $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ ونجعل المؤثر $\frac{E^2}{C^2} - p^2 - m^2C^2$ يفعل بمتجهة حالة $\psi(x)$ حيث $x = x^o, \vec{x}$ ، $x^o = Ct$. نحصل بهذه الطريقة على المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية التالية

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{C\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 - m^2C^2\right]\psi(x) = 0 \qquad (1.4)$$

إن $\left(\vec{\nabla}\right)^2 = \nabla^2$ ومنه، بالتقسيم على $\hbar^2$

$$\left[\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mC}{\hbar}\right)^2\right]\psi(x) = 0 \qquad (1.4)'$$

ونحصل بهذا الشكل على معادلة كلاين–غوردن باسم مبتكريها عام 1926. لنلاحظ أن المؤثر التفاضلي في هذه المعادلة هو الدالامبرسي

$$\square^2 = \partial_\mu \partial^\mu$$

حيث $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^o}, \vec{\nabla}\right) = \partial_\mu$ و $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_o}, -\vec{\nabla}\right) = \partial^\mu$ ، $x^o = x_o$ ، $x^i = -x_i$ $i = 1, 2, 3$، نكتب معادلة كلاين–غوردن على الشكل المختصر

$$\left[\Box^2 + \left(\frac{mC}{\hbar}\right)^2\right]\psi(x) = 0 \qquad (1.4)''$$

إن المؤثر بين المعقوفتين سلمي في فضاء مينكوفسكي، ولذا يمكن لمتجهة الحالة $\psi(x)$ أن تكون دالة سلمية أو متجهة في فضاء مينكوفسكي (بأربعة أبعاد) أو تانسوراً بـ 16 بعداً، الخ. بحيث تبقى المعادلة مسايرة التغير. إن معادلة الموجة الكهرطيسية في الفضاء – حيث لا تيارات ولا شحنات هي كما نعلم $\Box^2 \mathcal{A} = 0$ ( حيث $\mathcal{A}$ الكمون $\vec{A}$ و $A^o$) حالة خاصة من المعادلة "(1.4) عندما تكون الكتلة مساوية للصفر، وهو حال الفوتون.

**<u>ملاحظة :</u>**

أشرنا عند دراستنا للنسبية الخاصة أن للزمان نفس البعد المكاني أي أنه ليس للسرعة أبعاد ومن الأفضل بالتالي قياس السرع كنسبة مئوية من سرعة الضوء والتي نأخذها مساوية للواحد. يمكننا هنا أيضاً أخذ الفعل $\hbar$ وحدة قياس للفعل $\hbar = 1$، وكتابة الفعل بدون أبعاد : $ML^2T^{-2}T$؛ أو بتعبير آخر اعتبار بُعد الكتلة، ومعها طبعاً بُعد الطاقة $ML^2T^{-2}$ مساوياً لـ $L^{-1}$ أو لـ $M$. إن إعادة الأبعاد الثلاثة الرئيسية $M$، $L$، $T$ إلى بعد واحد أمر مهم وطبيعي كذلك. كما أنه يعيننا على كتابة العلاقات على شكل بسيط وأنيق. نكتب المعادلة الأساسية في النسبية على الشكل

$$\left(p^2 - m^2\right) = 0 \qquad (1.5)$$

حيث $p = p^o, \vec{p}$ هو المتجهة رباعية الأبعاد الطاقة–الاندفاع الخطي؛ وبما أن $\vec{p} = \vec{k}$ $(\hbar = 1)$ حيث $\vec{k}$ هو متجهة الموجة فإننا سنرمز لـ $p^o$ بـ $\omega = k^o$ ونكتب (1.5) على الشكل

$$k^{o2} = \left|\vec{k}\right|^2 + m^2 \qquad (1.5)'$$

وتأخذ معادلة غوردن الشكل

$$\left(\Box^2 + m^2\right)\psi(x) = 0 \qquad (1.4)'''$$

### 3.1– نشر متجهة الحالة $\psi(x)$

ننتقل من فضاء مينكوفسكي $x = x^o, \vec{x}$ إلى الفضاء الثنوي، فضاء الطاقة – الاندفاع الخطي $\left(k^o, \vec{k}\right)$ بواسطة محول فوريي، أي بنشر $\psi(x)$ بدليل الأمواج المستوية

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \psi(k) e^{-ikx} dk \qquad (1.6)$$

حيث عنصر الحجم في هذا التكامل الرباعي هو $dk^0dk^1dk^2dk^3$. ومع ذلك فقد أبقينا على $(2\pi)^{-3/2}$ لأننا سنكامل بعد قليل على المتغير $k^0$. نرى بسهولة أن الموجة المستوية هي متجهة خاصة للمؤثر $\partial_\mu$ (أو $\partial^\mu$) ولا تختلف عن حالة ميكانيك الكم العادي إلا بالمساواة بين الأبعاد الزمانية والمكانية: $e^{ikx} \equiv e^{ik^\mu x_\mu} \equiv e^{ik_\mu x^\mu}$؛ لدينا

$$\partial_\mu e^{ikx} = ik_\mu e^{ikx}$$

$$\partial^\mu e^{ikx} = ik^\mu e^{ikx}$$

و

$$\Box^2 e^{ikx} \equiv \partial_\mu \partial^\mu e^{ikx} = -k_\mu k^\mu e^{ikx} = -k^2 e^{ikx}$$

ونكتب معادلة كلاين–غوردن من أجل الموجة المستوية على الشكل

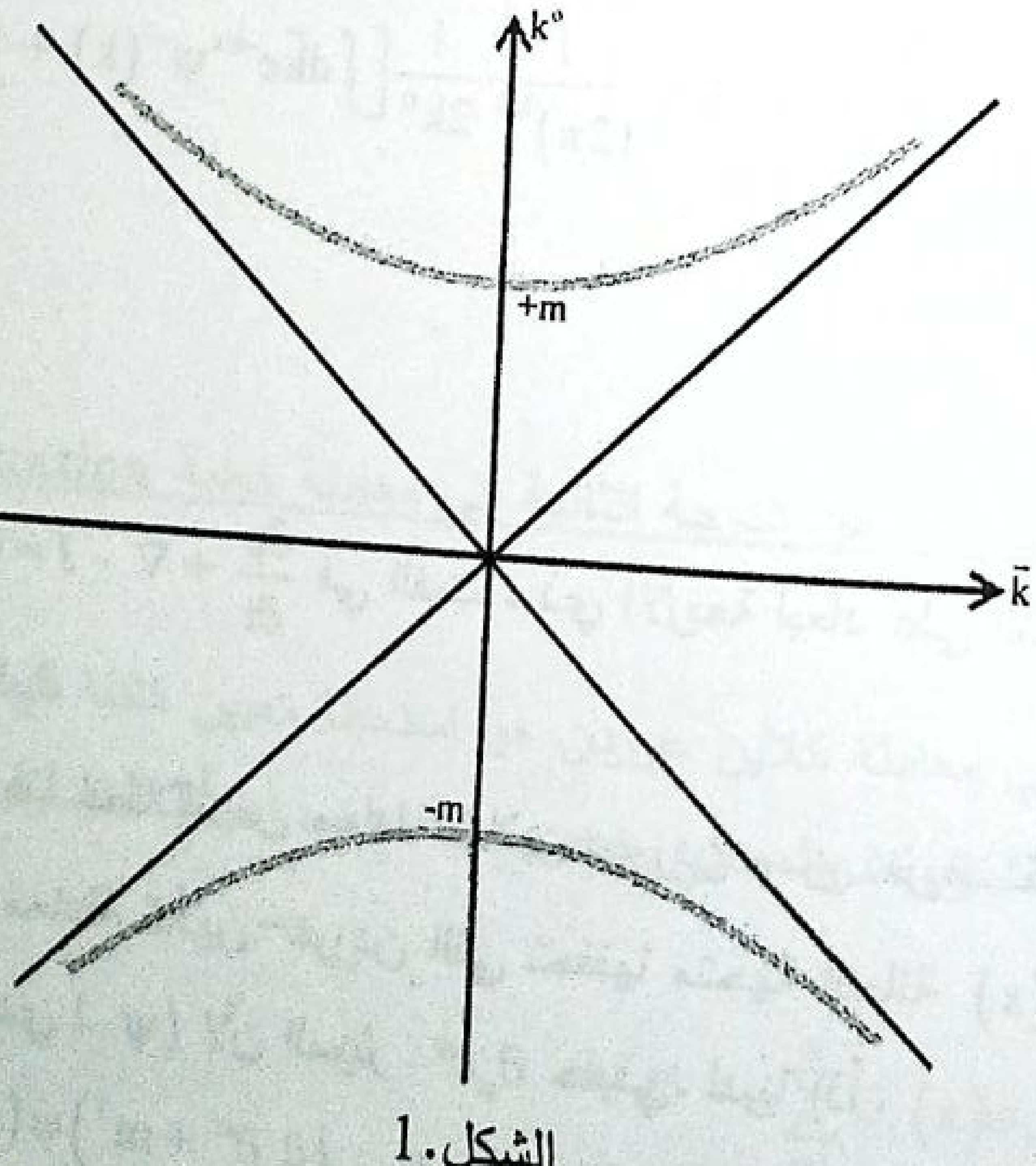
$$(k^2 - m^2)e^{ikx} = 0 \qquad (1.7)$$

لا تعني هذه المعادلة شيئاً آخر سوى معادلة انحفاظ الطاقة–الاندفاع الخطي (1.5) ولكننا نكتبها هنا لنؤكد أن التكامل (1.6) في الفضاء $k(k^0, \vec{k})$ لا يقع إلا في المناطق التي تتحقق فيها المساواة $k^2 - m^2 = 0$ أو

$$k^{02} = |\vec{k}|^2 + m^2$$

$$k^0 = \pm\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \qquad (1.8)$$

أي على فرعي مجسم قطع زائد يقابل الفرع الأول الطاقات الموجبة $k^0 > 0$ والآخر الطاقات السالبة $k^0 < 0$، الشكل 1.



الشكل 1.

وهكذا فإن معادلة كلاين غوردن – ومعادلة ديراك بعدها – لا تستثني الحلول بطاقات سالبة للجسيم الحر. نضرب المقدار تحت إشارة التكامل بـ $\delta(k^2 - m^2)$ لنبين أننا لا نكامل إلا على فرعي المجسم ونقوم بالانتقال من المتغير $\left(k = (k^o < 0, \vec{k})\right)$ على الفرع السفلي إلى المتغير $-k = |k^o|, -\vec{k}$ بحيث يصبح كلا التكاملين على الفرع العلوي $k^o > 0$، فتأخذ (1.6) الشكل

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[\int_{k^o>0} dk e^{-ikx}\psi(k)\delta(k^2 - m^2) + \int_{k^o>0} dk e^{+ikx}\psi(-k)\delta(k^2 - m^2)\right] \quad (1.9)$$

(لم يغير التحول من $-k$ إلى $+k$ من إشارة عنصر الحجم في التكامل الثاني، أربع إشارات) يقابل التكامل الثاني موجة واردة $e^{+ikx} = e^{+i(|k^o|x_o + \vec{k}\vec{x})}$، إنها تابعة لـ $x^o + \bar{x}$ (لـ $(t + \frac{\bar{r}}{c})$)، فهي آتية نحو المنبع على خلاف الأولى التابعة لـ $x^o - \bar{x}$ الصادرة عنه. وتقابل بالتالي الحل الذي استثنياه في الكهرطيسية معتبرين أن الموجة الداخلة الآتية من اللانهاية (أو بتعبير آخر أن الكمون المسبق) ليست فيزيائية. إن وجود الجسيمات المضادة غير مقبول في الفيزياء التقليدية وفي ميكانيك الكم العادي. إنه ناتج عن الميكانيك الكمومي النسبوي وعلى وجه التحديد عن نظرية الحقول المكممة التي نعتبر هذا الفصل كمدخل لها. نكامل (1.9) على المتغير $k^{o2}$ : $dk^o = \frac{dk^{o2}}{2k^o}$ بحيث يدخل التكامل المقدار $2k^o$ في المخرج ويعين قيمة $k^o$ مع الإشارة + في (1.8). نأخذ هذا التعيين بعين الاعتبار بواسطة دالة (توزيعة) هيفيسايد $\theta(k^o)$ ونعرف الموجة الصادرة بـ $\psi^+(k) = \psi(k)\theta(k^o)$ والواردة بـ $\psi^-(k) = \psi(-k)\theta(k^o)$، ويصبح النشر (1.9) على الشكل

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{2k^o}\left[\int d\vec{k}e^{-ikx}\psi^+(k) + \int d\vec{k}e^{+ikx}\psi^-(k)\right] \quad (1.10)$$

## 4.1– معادلة الاتصالية

نكتب معادلة الاتصالية $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ في الفضاء ذي الأربعة أبعاد على الشكل

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.11)$$

حيث $(J = C\rho, \vec{J})$ ونريد هنا انطلاقاً من معادلة كلاين–غوردن ومن تعريف كثافة التيار ((2.(1.16)) تحديد كثافة الاحتمال. إن معادلة كلاين–غوردن التي تحققها متجهة الحالة $\psi(x)$ تحققها أيضاً متجهة الحالة $\bar{\psi}(x)$ (المرافق العقدي لـ $\psi$) لأن المؤثر $\partial_\mu\partial^\mu$ حقيقي. لدينا إذاً

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi(x) = 0 \quad ; \quad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\bar{\psi}(x) = 0$$

نضرب هاتين المعادلتين، الأولى على اليمين بـ $\bar{\psi}(x)$ والثانية على اليسار بـ $\psi(x)$ ونطرح الحصيلتين من بعضهما

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu \psi(x)\right]\overline{\psi}(x) - \psi(x)\left[\partial_\mu \partial^\mu \overline{\psi}(x)\right] = 0$$

لا تتغير العلاقة بوضع $\partial_\mu$ خارج حدي العلاقتين، إنه يضيف ويطرح الحدين المتساويين $\partial_\mu \overline{\psi} \partial^\mu \psi$ و $\partial_\mu \psi \partial^\mu \overline{\psi}$ ويبقى

$$\partial_\mu \left[\left(\partial^\mu \psi\right)\overline{\psi} - \psi\left(\partial^\mu \overline{\psi}\right)\right] = 0$$

إنها المعادلة (1.11) : التباعد الرباعي معدوم، حده الأول $J^\circ = \overline{\psi}\partial^\circ \psi - \psi \partial^\circ \overline{\psi}$ يقابل كثافة الاحتمال وحده الثاني $\overline{\psi}\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\overline{\psi}$- كثافة التيار $\vec{J}$ عندما نضربه بالعامل $i\frac{\hbar}{2m}$ أي أن

$$J^\circ = C\rho = i\frac{\hbar}{2mC}\left(\overline{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t}\right) \qquad (1.12)$$

إنها نتيجة كارثية من وجهة نظر ميكانيك الكم النسبوي لأن معادلة كلاين-غوردن معادلة بالمشتقات الجزئية من الدرجة الثانية، أي أنه من الممكن تحديد $\psi(x)$ و $\frac{\partial \psi(x)}{\partial t}$ بشكل اعتباطي كشروط بدائية (كما في معادلة نيوتن على سبيل المثال، سوى أننا نقول في حالة المعادلات بالمشتقات الجزئية الشروط على الحدود). يمكن إذاً أن نحدد هذين المقدارين بحيث تصبح كثافة الاحتمال المحددة بـ (1.12) سالبة. أضف إلى هذا أننا عرفنا كثافة الاحتمال بدليل المتغيرات المكانية وحدها $\rho d\vec{r}$ وهو ما يتعارض مع النسبية حيث الحدث نقطة في فضاء مينكوفسكي رباعي الأبعاد، ناهيك عن مشكلة استحالة تحديد الوضع بدقة نظرياً في ميكانيك الكم النسبوي. وهكذا تظهر معادلة كلاين غوردن بوضوح عدم اتساق هذا الميكانيك ولذا فقد وقع التخلي عنها على جناح السرعة ولم تعد إلى الساحة إلا في إطار نظرية الحقول المكممة.

## 2. معادلة ديراك

### 1.2- تحويل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية إلى معادلة خطية Linearization

قلنا إن العيب الرئيسي في معادلة كلاين غوردن هو استحالة تعيين كثافة احتمال معرفة موجبة؛ ومنشأ ذلك كما رأينا هو وجود مشتق كشرط بدائي. سنضع إذاً نصب أعيننا الحصول على كثافة احتمال معرفة موجبة من الشكل

$$J^\circ = \alpha \sum_{i=1}^{N} \overline{\psi}_i(x)\psi_i(x) \qquad (2.1)$$

حيث $\alpha$ ثابتة.

أي اختيار متجهة حالة في فضاء بـ N بعداً – جداء تانسوري لـ N فضاء هيلبرتي – ووضع معادلة تفاضلية خطية بالضرورة بمركبات $\psi$، $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_N$، تؤدي إلى (2.1).

لنكتب معادلة كلاين غوردن على الشكل

$$\left(P^2 - m^2\right)\psi(x) = 0 \qquad (2.2)$$

حيث $P^2 = P_\mu P^\mu$ و $P_\mu = i\partial_\mu$، $P^\mu = i\partial^\mu$ هما المؤثران التفاضليان للطاقة – الاندفاع الخطي. لنكتب المعادلة (2.2) "صورياً" على الشكل

$$(P - m)(P + m)\psi(x) = 0 \qquad (2.2)'$$

الذي يعطينا معادلتين صوريتين هما

$$(P - m)\psi(x) = 0 \qquad (2.2)_1'$$

$$(P + m)\psi(x) = 0 \qquad (2.2)_2'$$

هاتان المعادلتان صوريتان لأن $P_\mu = i\partial_\mu$ لا يفعل إلا بمركبة واحدة من مركبات $\psi$، ولذا فمن اللازم، إذا أردنا الحصول على معادلات خطية تشترك فيها مختلف المركبات، ضرب كل مركبة من مركبات هذا المؤثر بمصفوفة – بمؤثر خطي – بـ N سطراً و N عموداً نرمز لها بـ $\gamma^\mu$ $\mu = 0, 1, 2, 3$، نسميها مصفوفات ديراك. وتأخذ المعادلتان الصوريتان الشكل الواقعي

$$\left(i\partial_\mu\gamma^\mu \mp m\right)\psi(x) = 0 \qquad (2.3)$$

سنركز انتباهنا على المعادلة الأولى (إشارة – قبل m). إنها معادلة ديراك الشهيرة التي استخلصها صاحبها عام 1928، بشكل مختلف عن المحاكمة التي اتبعناها سنعود إليه بعد قليل. لننظر إلى المعادلة التي تحققها المتجهة $\bar{\psi}$ المرافقة العقدية لـ $\psi$، مفضلين منذ الآن أخذ المرافق للمتجهة $\gamma^\mu\psi$ الذي نرمز له بـ $\left(\gamma^\mu\psi\right)^\dagger$. إنه $\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}$ حيث $\psi^\dagger$ هو السطر $\left(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots \bar{\psi}_\mu\right)$ حتى يكون للجداء معنى : جداء سطر بعمود. لدينا إذاً المعادلة المرافقة لمعادلة ديراك

$$-i\partial_\mu\left(\gamma^\mu\psi\right)^\dagger - m\psi^\dagger = 0$$

أو

$$i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} + m\psi^\dagger = 0 \qquad (2.4)$$

أي أن المتجهة المرافقة تحقق المعادلة الصورية المرافقة $(2.2)_2'$. نكتب (2.4) على الشكل المتناظر التالي :

$$\psi^\dagger(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^{\mu\dagger} + m\right) = 0 \qquad (2.4)'$$

حيث وجهنا السهم نحو اليسار للإشارة أن الاشتقاق هو على $\psi^\dagger(x)$.

إن المقدار

$$J^o = \alpha\psi^\dagger(x)\psi(x) = \alpha\sum_{i=1}^{N}\overline{\psi}_i(x)\psi_i(x)$$

(جداء السطر $\psi^\dagger$ بالعمود $\psi$) موجب معرف دوماً نرشحه ليلعب دور كثافة احتمال ونفعل كما فعلنا في معادلة كلاين غوردن : نضرب معادلة ديراك (2.3) على اليسار بـ $\psi^\dagger(x)\gamma^{o^{-1}}$ والمعادلة المرافقة (2.4) على اليمين بـ $\left(\gamma^{o\dagger}\right)^{-1}\psi(x)$ لنتخلص من الحدين بـ $\gamma^o$ و $\left(\gamma^o\right)^\dagger$ في المعادلتين، ونكتبهما على الشكل

$$i\psi^\dagger(x)\left(\partial_o\psi(x)\right) = -i\psi^\dagger(x)\gamma^{o^{-1}}\gamma^i\left(\partial_i\psi(x)\right) + m\psi^\dagger(x)\gamma^{o^{-1}}\psi(x)$$

و

$$i\left(\partial_o\psi^\dagger(x)\right)\psi(x) = -i\left(\partial_i\psi^\dagger(x)\right)\gamma^{i\dagger}\gamma^{o\dagger^{-1}}\psi(x) - m\psi^\dagger(x)\left(\gamma^{o\dagger}\right)^{-1}\psi(x)$$

يجب إذاً للحصول على معادلة اتصالية $\partial_\mu J^\mu = 0$، أولاً حذف الحدين حيث m، ويتحقق هذا إذا تطلبنا من $\gamma^o$ أن تكون ذاتية الترافق

$$\gamma^o = \gamma^{o\dagger} \tag{2.5}$$

يجب كذلك أن يكون

$$\gamma^{o-1}\gamma^i = \gamma^{i\dagger}\gamma^{o\dagger^{-1}} \qquad \text{حيث } i = 1, 2, 3 \tag{2.6}$$

$$= \left(\gamma^{o-1}\gamma^i\right)^\dagger$$

وهكذا فإن التيار رباعي الأبعاد المنحفظ هو

$$\left(J^o, \vec{J}\right) = \left(\psi^\dagger(x)\psi(x),\ \psi^\dagger(x)\gamma^{o-1}\vec{\gamma}\psi(x)\right) \tag{2.7}$$

## 2.2– مصفوفات ديراك

**<u>قضية 1</u> :**

تحقق مصفوفات ديراك علاقات المبادلة المضادة التالية

$$\left[\gamma^\mu, \gamma^\rho\right]_+ = \gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\mu = 2g^{\mu\rho}I \tag{2.8}$$

يكفي للتحقق من صحة هذه العلاقات ضرب معادلة ديراك على اليسار بـ $\left(i\partial_\mu\gamma^\mu + m\right)$ للحصول على معادلة كلاين غوردن التي انطلقنا منها. لدينا

$$\left(i\partial_\mu\gamma^\mu + m\right)\left(i\partial_\nu\gamma^\nu - m\right)\psi(x) = \left(i\partial_\nu\gamma^\nu + m\right)\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m\right)\psi(x) \equiv \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\psi(x) = 0$$

يجب بالتالي أن يساوي مجموع الطرفين الأولين ضعف الطرف الثالث، أي أن تتحقق العلاقة

$$\sum_{\mu,\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left[\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right] = 2\partial_\mu\partial_\nu g^{\mu\nu}I$$

ومنه (2.8) حيث رمزنا بـ I للمصفوفة الواحدية.

تربنا هذه العلاقة، بأخذ $\mu = \rho$، أن $(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}$، أي أن مصفوفات ديراك قلوبة inversible، ولدينا، نظراً لكون $g^{oo} = 1$ $g^{ii} = -1$ :

$$\gamma^{o^{-1}} = \gamma^o = \gamma^{o\dagger} \quad (2.9)$$

$$\gamma^{i^{-1}} = -\gamma^i$$

حيث أخذنا في العلاقة الأولى (2.5) بعين الاعتبار. أما أخذ $\rho = i$ و $\mu = 0$ في (2.8) فيرينا أن $\gamma^o\gamma^i = -\gamma^i\gamma^o$ أو

$$\gamma^{o^{-1}}\gamma^i\gamma^o = -\gamma^i \quad (2.10)$$

$$\gamma^i\gamma^o\gamma^{i^{-1}} = -\gamma^o$$

تربنا الكتابة على هذا الشكل، آخذين بعين الاعتبار أن $Tr\,abc = Tr\,cba$، أن

$$Tr\gamma^\mu = 0 \quad (2.11)$$

نرى أخيراً من (2.6)، بأخذ العلاقة الأولى في (2.9) بعين الاعتبار، أن

$$\gamma^{o-1}\gamma^i\gamma^o = \gamma^{i\dagger}$$

وبالمقارنة مع العلاقة الأولى في (2.10)، أن

$$\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad (2.12)$$

لنلاحظ أن $\gamma^o\gamma^i = -\gamma^i\gamma^o$ تعني أن

$$\gamma^o\gamma^i = \det(-I)\,\gamma^i\gamma^o$$

حيث $I$ هي المصفوفة الواحدية في الفضاء ذي $N$ بعداً. ولما كان $\det AB = \det BA$ فمن اللازم أن يكون $\det(-I) = (-1)^N = 1$ ؛ ومنه

<u>قضية 2</u> :

إن أبعاد معادلة ديراك (فضاء متجهة الحالة $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_N\end{pmatrix}$) زوجية.

أشرنا مرات عديدة إلى أن المؤثرات الخطية – التي نكتبها على شكل مصفوفات عندما نعين قاعدة الفضاء – تشكل جبراً : أي أنها تتمتع بخواص الفضاء المتجهي وبخواص الحلقة (جداء مؤثرين، جداء مصفوفتين معرف تماماً). إلا أن علاقات المبادلة المضادة تخفض عدد عناصر الجبر المستقلة خطياً – عدد الجداءات المستقلة خطياً – من عدد الأنساق Arrangement الممكنة لـ $p$ عنصراً من بين $n$ عنصراً، $p < n$، حيث $n$ هي أبعاد الفضاء المتجهي إلى عدد التوافقات الممكنة، من $\sum_p A_p^n$ إلى $\sum_p C_p^n$ إي إلى $\sum_p C_p^n = C_o^n + C_1^n + \dots C_p^n + \dots C_n^n = 2^n$ عوضاً عن $\sum_p p!C_p^n$ ومنه

**تعريف 1 :**

يطلق على جبر المؤثرات – ذي البعد n كفضاء متجهي – التي تتمتع بالخاصة (2.8) اسم جبر كليفورد Clifford. عدد العناصر المستقلة في هذا الجبر هو $2^n$ وهكذا فإن مصفوفات ديراك تشكل جبر كليفورد.

يبقى علينا أن نحدد أبعاد الفضاء، N، الذي تفعل فيه هذه المصفوفات. رأينا في القضية 2 أنه زوجي: لا يمكن لـ $\psi(x)$ أن يكون سلمياً؛ كما لا يمكن أن يتكون من عنصرين فقط لأننا رأينا أن الفضاء بمركبتين، فضاء السبينورات، يمثل زمرة الدوران $SU(2)/Z \leftrightarrow SO(3)$، إنه أول تمثيل بثقل يساوي نصف عدد صحيح ويوصف سبين الإلكترون التقليدي ((4.27).3). ولكنه لا يمثل زمرة لورانتس $SL(2,C)$[2]. لنأخذ إذاً العدد الزوجي التالي 4 : $N = 4$ وعدد المصفوفات $\gamma^3$، $\gamma^2$، $\gamma^1$، $\gamma^0$ أربعة كذلك ويتألف جبر كليفورد من $2^n = 2^N = 16$ عنصراً. إنها العناصر التالية المستقلة عن بعضها

| | | |
|---|---|---|
| $I = \frac{\gamma^\mu \gamma_\mu}{4}$ | | المؤثر الوحدة |
| $\gamma^\mu$ | $\mu = 0, 1, 2, 3$ | المصفوفات الأربع |
| $\gamma^\mu \gamma^\nu$ | $\mu < \nu$ | الجداءات الستة |
| $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho$ | $\mu < \nu < \rho$ | الجداءات الأربعة |
| $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ | | المصفوفة الوحيدة |

يمكن إعادة كل الجداءات الأخرى إلى واحدة من هذه المصفوفات بفضل علاقة المبادلة المضادة (2.8). نرمز لهذه المصفوفات على الترتيب بـ $\Gamma_1$، $\Gamma_2$ ... $\Gamma_{16} = \gamma^5$. ونتحقق بسهولة من العلاقتين التاليتين

$$\Gamma_i \Gamma_j = \pm \Gamma_k \qquad i, j, k = 1, \ldots, 16 \tag{2.13}$$

$$(\Gamma_j)^2 = \pm 1 \tag{2.14}$$

كما نتحقق، أياً كانت المصفوفة $\Gamma_i$، من وجود مصفوفة $\Gamma_j$ مضادة المبادلة معها :

$$\Gamma_i \Gamma_j = -\Gamma_j \Gamma_i \tag{2.15}$$

لدينا على سبيل المثال، إضافة إلى تضاد المبادلة بين الـ $\gamma^\mu$ :

$[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho, \gamma^\sigma]_+ = 0$ من أجل $\sigma \neq \rho \neq \nu \neq \mu$ و $[\gamma^5, \gamma^0]_+ = 0$

و $[\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\rho \gamma^\sigma]_+ = 0$ من أجل $\nu \neq \rho \neq \sigma$ و $\mu = \rho$ أو على العكس $\mu \neq \rho \neq \sigma$ و $\nu = \rho$.

لنختر من بين المصفوفات $\Gamma_j$ مضادة المبادلة مع $\Gamma_i$ المصفوفة التي يساوي مربعها الواحد $(\Gamma_j)^2 = I$، المصفوفة $\gamma^0$ مثلاً أو المصفوفة $\gamma^0 \gamma^i$ $\left(\gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^{0^2} \gamma^{i^2} = I\right)$، $i = 1, 2, 3$، فنرى، على غرار ما فعلنا في العلاقة الأولى من (2.10)، انطلاقاً من (2.15) أن

---

[2] يبرهن أنه من الممكن تمثيل $SL(2, \mathbb{C})$ بمعادلة ببعدين شريطة أن تكون الكتلة مساوية للصفر وهي معادلة فايل Weyl التي توصف النوترينو في نظرية الحقول.

$$\Gamma_j^{-1}\Gamma_i\Gamma_j = -\Gamma_i$$

وبالتالي فإن

$$Tr\Gamma_i = 0 \tag{2.16}$$

لنتأكد أخيراً أن المصفوفات الـ 16 المعطاة أعلاه مستقلة خطياً أي أن $\sum_i a_i\Gamma_i = 0 \Leftarrow a_i = 0$ من أجل كل $i$. لنضرب هذه العلاقة بـ $\Gamma_j$ لا على التعيين (مربعه $= \pm I$ حسب (2.14)) فنحصل على $0 = \pm a_j I + \sum_{i\neq j} a_i\Gamma_i\Gamma_j$، نأخذ أثر هذه العلاقة لنجد أن $a_j = 0$ أياً كان $j$ لأن $Tr\Gamma_i\Gamma_j = Tr\Gamma_k = 0$ حسب (2.13) و (2.16).

ننهي هذا الرقم بتعريف جداء متجهة رباعية $(a = a_o, \bar{a})$ من فضاء مينكوفسكي بالمتجهة الرباعية $\gamma^\mu = (\gamma^o, \bar{\gamma})$ نرمز لهذا الجداء بـ $\not{a}$ ونكتب

$$\not{a} = a^\mu\gamma_\mu = a_\mu\gamma^\mu \equiv a^o\gamma^o - \bar{a}\bar{\gamma} \tag{2.17}$$

ونبرهن العلاقات التالية :

أ-

$$\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2ab \tag{2.18}$$

نكتب

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = \sum_{\mu,\nu}\left(a_\mu b^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu + b^\nu a_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\right)$$
$$= \sum_{\mu,\nu} a_\mu b^\nu\left(\gamma^\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma^\mu\right)$$

ونستعمل علاقة المبادلة المضادة حيث القوس $2g^\mu_\nu$ ومنه الطرف الثاني $2a_\mu b^\mu = 2ab$

ب-

$$\not{a}\gamma^5 = -\gamma^5\not{a} \tag{2.19}$$

لأن $\left[\gamma^5, \gamma^\mu\right]_+ = 0$ حسب تعريف $\gamma^5$. لدينا أيضاً من التعريف (2.17)، ومن علاقة تضاد المبادلة

جـ-

$$\gamma^i\not{a}\gamma^i = \not{a} + 2a^i\gamma^i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.20}$$

$$\gamma^i\not{a}\gamma^i = \gamma^i a^o\gamma^o\gamma^i - \sum_{j\neq i}\gamma^i a^j\gamma^j\gamma^i - a^i\gamma^{i^3}$$
$$= a^o\gamma^o + \sum_{j\neq i} a^j\gamma^j\gamma^{i^2} - a^i\gamma^{i^3}$$

لأن $\gamma^i\gamma^o\gamma^i = \gamma^o$ حسب (2.9) و(2.10)

ثم إن $\gamma^{i^2} = -1$، ومنه النتيجة، بإضافة وطرح الحد بـ $j = i$ $a^i\gamma^i$

$$= a^o\gamma^o - \sum_j a^j\gamma^j + a^i\gamma^i + a^i\gamma^i$$

واضح أخيراً، $\gamma^{o^2} = I$، أن

د-

$$\not{\gamma} = \gamma^\lambda\gamma_\lambda = 4I$$

ولدينا بأخذ هذه العلاقة بعين الاعتبار :

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma_\lambda = \left(-\gamma^\mu\gamma^\lambda + 2g^{\lambda\mu}\right)\gamma_\lambda = -\gamma^\mu\not{\gamma} + 2\gamma^\mu = -2\gamma^\mu \tag{2.21}$$

ومنه

هـ- $\gamma^\lambda \not{a} \gamma_\lambda = -2\not{a}$ (2.22)

ونحصل من المتطابقة $\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\lambda = \left(-\gamma^\mu\gamma^\lambda + 2g^{\lambda\mu}\right)\gamma^\nu\gamma_\lambda = -\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma_\lambda + 2\gamma^\nu\gamma^\mu$، بكتابة الحد الأول من الطرف الثاني على نفس النحو $-\gamma^\mu\left(-\gamma^\nu\gamma^\lambda + 2g^{\nu\lambda}\right)\gamma_\lambda = 4\gamma^\mu\gamma^\nu - 2\gamma^\mu\gamma^\nu$، حيث أخذنا بعين الاعتبار (2.21)، على طرف ثان هو $2\gamma^\mu\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\gamma^\mu = 4g^{\mu\nu}$. تبين هذه المتطابقة أن

$$\sum_\lambda \gamma^\lambda \left(\sum_{\mu\nu} a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu\right)\gamma_\lambda = 4\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$$ ، أي أن

و- $\gamma^\lambda \not{a}\not{b}\gamma_\lambda = \gamma^\lambda \not{b}\not{a}\gamma_\lambda = 4ab$ (2.23)

وباتباع نفس الأسلوب نحصل من المتطابقة

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma_\lambda = \left(2g^{\mu\lambda} - \gamma^\mu\gamma^\lambda\right)\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma_\lambda = 2\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu - \gamma^\mu 4g^{\nu\sigma} = -2\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\mu$$

على

ز- $\lambda^\lambda \not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\lambda = -2\not{c}\not{b}\not{a}$ (2.24)

## 3.2- صيغة مصفوفات ديراك

علينا الآن اختيار صيغة مناسبة لمصفوفات ديراك الأربع المحققة على وجه التحديد لـ (2.8) – (2.12). ولنبدأ بـ $\gamma^o$. إن $\gamma^{o2} = I$ أي أن العناصر القطرية في $\gamma^o$ تساوي لـ 1+ أو 1- عدد العناصر 4 وبما أن $\gamma^{o-1}$ معرف ويساوي لـ $\gamma^{o+}$ فإنه من الممكن وضعها على شكل قطري ولذا سنختارها على الشكل :

$$\gamma^o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

حيث I المصفوفة القطرية 2×2.

لنلاحظ ثانياً أنه في حال N = 2 فإن مصفوفات باولي تحقق علاقات المبادلة المضادة ((4.34)'.3) كما تحقق علاقة المبادلة $\left[\sigma_i, \sigma_j\right]_- = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ ((4.32).3) و $\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. إن كتابة $\gamma^i$ على الشكل

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)'$$

يحقق كل الصفات المطلوبة من $\gamma^i$ ولدينا

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \\ -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)''$$

لأن

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

ليست هذه الصيغة لمصفوفات ديراك الوحيدة الممكنة. يكفي أن ننتقل من قاعدة إلى قاعدة أخرى في فضاء متجهة الحالة $\psi$ ذات الأربعة أبعاد بمصفوفة واحدية $U$ لننتقل من المؤثرات $\gamma^\mu$ إلى $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$. إلا أن هذه الصيغة هي الأكثر انتشاراً وتعرف باسم التمثيل الاعتيادي Standard أو تمثيل باولي لمصفوفات ديراك. هناك تمثيل آخر يعرف باسم تمثيل اليد Chiral نكتب $\gamma^0$ فيه على الشكل

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

في حين تبقى $\gamma^i$ كما في التمثيل السابق وتأخذ $\gamma^5$ الشكل

$$\gamma^5 = i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad (2.26)'$$

وهو تمثيل هام عندما تدرس قضايا السوية، قضايا التناظر بين النظمة وصورتها في المرآة. وهناك تمثيل ثالث يعرف باسم تمثيل مايورانا Majorana حيث

$$\gamma^0_M = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1_M = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2_M = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.27)$$

$$\gamma^3_M = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}$$

قلنا منذ قليل أن ديراك لم يصل إلى معادلته بوضع معادلة كلاين – غوردن على شكل خطي كما فعلنا. لقد انطلق من معادلة شرودينغر مع هاميلتوني نسبوي كتبه على شكل خطي على النحو التالي

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \equiv \left(P^2C^2 + m^2C^4\right)^{1/2}\psi$$
$$= \left(C\,\vec{\alpha}\cdot\vec{P} + \beta mC^2\right)\psi \qquad (2.28)$$

حيث $\vec{P} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$. تبين لنا هيرميتية الهاميلتوني، $H = H^\dagger$، أن $\beta = \beta^\dagger$ و $\alpha = \alpha^\dagger$. نضرب طرفي المعادلة على اليسار بـ $\beta$ لتصبح (2.28) على الشكل

$$\left(i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar C\beta\vec{\alpha}\vec{\nabla} - \beta^2 mC^2\right)\psi = 0$$

أو

$$\left(i\hbar\beta\frac{\partial}{C\partial t} + i\hbar\beta\vec{\alpha}\vec{\nabla} - \beta^2 mC\right)\psi = 0 \qquad (2.28)'$$

إنها معادلة ديراك (2.3) :

$$= \left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m\right)\psi = 0$$

حيث وضعنا $\hbar = C = 1$، شريطة أن تتحقق العلاقات التالية

$$\beta = \gamma^{o} \quad \text{و} \quad \beta^{2} = I \quad ، \quad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} \qquad (2.28)''$$

وبالفعل فإن

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{الهيرميتية}$$

و

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad (2.29)$$

تحققان التقابل بين التمثيل الاعتيادي وبين هذا التمثيل، تمثيل ديراك. لنلاحظ أن الخاصتين $\beta = \beta^{\dagger}$ و $\alpha = \alpha^{\dagger}$ اللتين تحققهما مصفوفات ديراك الأصلية تقابلان تماماً الخاصتين (2.9) و (2.10) أياً كانت طريقة المحاكمة : هاميلتوني هيرميتي هنا و $J^{o}$ معرف موجب ومعادلة اتصالية هناك. لدينا من "(2.28) و (2.29)

$$\vec{\gamma}^{\dagger} = (\beta\vec{\alpha})^{\dagger} = \vec{\alpha}^{\dagger}\beta^{\dagger} = \vec{\alpha}\beta = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\vec{\gamma}$$

وهي العلاقة (2.12) الناتجة عن (2.9) و (2.10).

## 4.2- حل معادلة ديراك

أطلقنا على الفضاء الذي تفعل فيه مصفوفات باولي الممثلة لـ $SU(2)$ فضاء السبينورات.

**تعريف 2 :**

نطلق على الفضاء ذي أربعة أبعاد الذي تفعل فيه مصفوفات ديراك والتي حصلنا عليها بمضاعفة مصفوفات باولي بشكل غير قابل للاختزال اسم الفضاء مزدوج السبينورات bispinor.

تعبر كتابة $\vec{\gamma}$ على شكل معاكس للقطرية على عدم قابلية للاختزال وتسمح لنا بكتابة المتجهة مزدوجة السبين على شكل سبينين منفصلين

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \cdots \\ \chi \end{pmatrix} \qquad (2.30)$$

حيث $\phi$ هو السبينور $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ و $\chi$ السبينور $\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ (وهو أمر غير ممكن في تمثيل مايورانا على سبيل المثال).

تسمح لنا الكتابة على هذا الشكل بوضع معادلة ديراك في الفضاء الثنوي (فضاء الطاقة الاندفاع) على الشكل

$$(\not{k} - m)\psi(k) = 0 \qquad (2.31)$$

حيث كتبنا محول فوريي لـ $\psi(x)$ على الشكل

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ikx}\psi(k)\,dk = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i(k^o x^o - \vec{k}\cdot\vec{x})}\psi(k)\,dk$$

وتأخذ معادلة ديراك بفضل الكتابة مزدوجة السبينورات شكل معادلتين خطيتين متجانستين بـ $\phi(k)$ و $\chi(k)$.

$$\left[k^o\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} - \sum_i k^i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\phi(k)\\ \chi(k)\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases}(k^o - m)\phi(k) - k^i\sigma^i\chi(k) = 0\\ -(k^o + m)\chi(k) + k^i\sigma^i\phi(k) = 0\end{cases} \qquad (2.32)$$

إن الشرط اللازم لكي يكون لهذه النظمة حل غير تافه $\chi = \phi = 0$، هو أن يكون معين الأمثال مساوياً للصفر:

$$\begin{vmatrix} k^o - m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -(k^o + m)\end{vmatrix} = -(k^o - m)(k^o + m) + (\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = 0 \qquad (2.33)$$

لكن

$$(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = \sum_{ij}k^ik^j\sigma^i\sigma^j = \frac{1}{2}\sum_{ij}k^ik^j(\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) = \frac{1}{2}\sum_{ij}k^ik^j[\sigma^i, \sigma^j]_+ = \frac{1}{2}\sum_{i,j}k^ik^j 2\delta^{ij}$$

أي

$$(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2 \qquad (2.34)$$

وهكذا فإن قيمة المعين هي $-k^{o^2} + m^2 + |\vec{k}|^2$ وتساوي الصفر من أجل قيمتين للطاقة $k^o = \pm\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$. سنأخذ لتحديد السبينور المزدوج ذي المركبات الأربع أربعة حلول اعتباطية هي $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ من أجل $\phi$ أولاً و $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ من أجل $\chi$ ثانياً ونعين في كل مرة قيمة السبينور الآخر من أجل قيمتي الطاقة. سنضع إشارة + لتبيان أن الحل ذو طاقة موجبة وإشارة – عندما تكون الطاقة سالبة، ونكتب المعادلة الثانية في (2.32) في حالة الطاقة الموجبة

$$\chi(k) = \frac{\bar{k} \cdot \bar{\sigma}}{k^o + m}\phi(k) \qquad (2.35)_+$$

ونكتب المعادلة الأولى في حالة الطاقة السالبة على الشكل

$$\phi(k) = \frac{\bar{k} \cdot \bar{\sigma}}{-(|k^o| + m)}\chi(k) \qquad (2.35)_-$$

ونحصل على هذا الشكل على الحلول الأربعة الممكنة

$$\left\{\begin{aligned} \psi^1_+(k) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \frac{\bar{k} \cdot \bar{\sigma}}{k^o + m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} \quad ; \quad \psi^2_+(k) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \frac{\bar{k} \cdot \bar{\sigma}}{k^o + m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} \\ \psi^1_-(k) &= \begin{pmatrix} \frac{\bar{k} \cdot \bar{\sigma}}{-(|k^o| + m)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} \quad ; \quad \psi^2_-(k) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{k} \cdot \bar{\sigma}}{-(|k^o| + m)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} \end{aligned}\right. \qquad (2.36)$$

لنلاحظ أن نظيم كل من هذه الحلول الأربعة $\psi^{\dagger}(k)\psi(k)$ هو

$$\left(1 + \frac{(\bar{k} \cdot \bar{\sigma})^2}{(k^o + m)^2}\right)^{1/2} = \frac{2|k^o|}{|k^o| + m}$$

ولذا يجب ضرب $\psi$ بـ $\left(\frac{|k^o| + m}{2|k^o|}\right)^{1/2}$ حتى ننظمها للواحد.

نعلم من جهة أخرى أن متجهتي القاعدة $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ في فضاء السبينورات هما متجهتان خاصتان للمؤثر $\sigma^3$ تقابلهما القيمتان $\pm 1/2$، مسقطا السبين على المحور الثالث؛ نستخلص من ذلك أن الحلين $\psi^1_{\pm}(k)$ يقابلان السبين $+1/2$ والحلين $\psi^2_{\pm}(k)$ السبين $-1/2$.

ولذا سندخل في الفضاء ذي الأبعاد الأربعة، فضاء السبينورات المزدوجة المؤثر المتجهي

$$\vec{\Sigma} = -i\gamma^o\gamma^5\vec{\gamma} = \begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \qquad (2.37)$$

ذا المركبات الهيرميتية $\Sigma^i$ $i = 1, 2, 3$، لأن $\sigma^i$ هيرميتية، مربع المركبة $(\Sigma^i)^2 = I$ وقيمها الخاصة هي $\pm 1$. كما تحقق علاقات المبادلة التي تحققها $\sigma^i$ (4.32).3

$$\left[\Sigma^i, \Sigma^j\right] = 2i\varepsilon^{ijk}\Sigma^k \qquad (2.38)$$

فمن الطبيعي والحال هذه أن

**تعريف 3 :**

نسمي المؤثر $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ مؤثر العزم الزاوي للسبين في الفضاء ذي الأربعة أبعاد – فضاء السبينورات المزدوجة.

**قضية 3 :**

إن العزم الزاوي الكلي منحفظ في الميكانيك الكمومي النسبوي ولكن هذا لا ينطبق على مركبات العزم الزاوي السبيني أو العزم الزاوي المداري منفردة.

لدينا في الواقع علاقة مبادلة لا تساوي الصفر بين $\Sigma^i$ $i = 1, 2, 3$ وهاميلتوني ديراك $H = \left(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2\right)$. إن

$$\left[\frac{\hbar}{2}\Sigma^i,\ H\right] = \frac{\hbar}{2}\sum_{j=1}^{3}\left[\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0 & \sigma^j\\ \sigma^j & 0\end{pmatrix}\right]p^j$$

وحسب ((3.(4.32) التي ذكرنا فيها أعلاه

$$= i\hbar C\varepsilon^{ijk}\alpha_k p_j = -i\hbar C\left(\vec{\alpha} \times \vec{p}\right)^i \tag{2.39}$$

كتبنا $\alpha_k$ و $p_j$ في الأسفل لنبين أن الجمع هو على $k$ و $j$ و $i \neq j \neq k$ أي على $\alpha_k p_j - p_j\alpha_k$ التي ليست سوى المركبة $i$ للجداء المتجهي $(\vec{\alpha} \times \vec{p})$. نبرهن بنفس الشكل عندما نكتب مركبة العزم الزاوي على المحور $i$ على الشكل $\frac{i}{\hbar}L^i = \varepsilon^{ijk}r_j p_k$ ونحسب مبادلها مع $\sum_i \alpha^i p^i$، أو بالانتقال ببساطة من تعريف $\frac{\partial}{\partial x^j}$ $r_k$ - $\frac{\partial}{\partial x^k}$ $\frac{i}{\hbar}L^i = r_j$ أن

$$\left[L^i, H\right] = i\hbar C\left(\vec{\alpha} \times \vec{p}\right)^i \tag{2.40}$$

نستنتج القضية من جمع هاتين العلاقتين

$$\left[\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L}, H\right] = 0$$

حيث $J = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L}$ هو العزم الزاوي الكلي.

لنلاحظ أن $\left[\Sigma^i, L^j\right] = 0$ من أجل كل $i, j = 1, 2, 3$، حسب تعريف $\vec{L}$.

**تعريف 4 :**

يطلق على مسقط مؤثر العزم الزاوي للسبين (محسوباً بوحدات $\hbar$) على اتجاه الحركة اسم مؤثر اللولبية Helicity، ونرمز له بـ $s(k)$. لدينا

$$s(k) = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{k}}{2\left|\vec{k}\right|} \tag{2.41}$$

وهكذا فإننا إذا اخترنا المحور الثالث $(z)$ منطبقاً على اتجاه حركة الجسيم فيأخذ $s(k)$ الشكل المبسط

**تعريف 3 :**

نسمي المؤثر $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ مؤثر العزم الزاوي للسبين في الفضاء ذي الأربعة أبعاد – فضاء السبينورات المزدوجة.

**قضية 3 :**

إن العزم الزاوي الكلي منحفظ في الميكانيك الكمومي النسبوي ولكن هذا لا ينطبق على مركبات العزم الزاوي السبيني أو العزم الزاوي المداري منفردة.

لدينا في الواقع علاقة مبادلة لا تساوي الصفر بين $\Sigma^i$ $i = 1, 2, 3$ وهاميلتوني ديراك $H = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)$. إن

$$\left[\frac{\hbar}{2}\Sigma^i,\ H\right] = \frac{\hbar}{2}\sum_{j=1}^{3}\left[\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0 & \sigma^j\\ \sigma^j & 0\end{pmatrix}\right]p^j$$

وحسب ((3.(4.32)) التي ذكرنا فيها أعلاه

$$= i\hbar C\varepsilon^{ijk}\alpha_k p_j = -i\hbar C\left(\vec{\alpha}\times\vec{p}\right)^i \qquad (2.39)$$

كتبنا $\alpha_k$ و $p_j$ في الأسفل لنبين أن الجمع هو على $k$ و $j$ و $i$ أي على $k \neq j \neq i$ $\alpha_k p_j - p_j\alpha_k$ التي ليست سوى المركبة $i$ للجداء المتجهي $(\vec{\alpha}\times\vec{p})$. نبرهن بنفس الشكل عندما نكتب مركبة العزم الزاوي على المحور $i$ على الشكل $\frac{i}{\hbar}L^i = \varepsilon^{ijk}r_j p_k$ ونحسب مبادلها مع $\sum_i \alpha^i p^i$، أو بالانتقال ببساطة من تعريف $\frac{i}{\hbar}L^i = r_j\frac{\partial}{\partial x^k} - r_k\frac{\partial}{\partial x^j}$ أن

$$\left[L^i, H\right] = i\hbar C\left(\vec{\alpha}\times\vec{p}\right)^i \qquad (2.40)$$

نستنتج القضية من جمع هاتين العلاقتين

$$\left[\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L},\ H\right] = 0$$

حيث $J = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L}$ هو العزم الزاوي الكلي.

لنلاحظ أن $\left[\Sigma^i, L^j\right] = 0$ من أجل كل $i, j = 1, 2, 3$، حسب تعريف $\vec{L}$.

**تعريف 4 :**

يطلق على مسقط مؤثر العزم الزاوي للسبين (محسوباً بوحدات $\hbar$) على اتجاه الحركة اسم مؤثر اللولبية Helicity، ونرمز له بـ $s(k)$. لدينا

$$s(k) = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{k}}{2\left|\vec{k}\right|} \qquad (2.41)$$

وهكذا فإننا إذا اخترنا المحور الثالث $(z)$ منطبقاً على اتجاه حركة الجسيم فيأخذ $s(k)$ الشكل المبسط

$$s(k) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

ليعطينا من جديد الحلول $\psi_{\pm}^{1}(k)$ ذات ذات السبين $\frac{1}{2}$ و $\psi_{\pm}^{2}(k)$ ذا السبين $-\frac{1}{2}$ حسبما تكون $\vec{k}\cdot\vec{\sigma} = \pm|\vec{k}|$ وفق (2.34). نلخص ما سبق بالجدول التالي

| الطاقة | موجبة : $+k^o$ | | سالبة : $-k^o$ | |
|---|---|---|---|---|
| السبين $s(k) = \frac{1}{2}\sigma^3$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\psi^1$ } $\phi$ | 1 | 0 | $\frac{-\lvert\vec{k}\rvert}{\lvert k^o\rvert+m}$ | 0 |
| $\psi^2$ } $\phi$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{+\lvert\vec{k}\rvert}{\lvert k^o\rvert+m}$ |
| $\psi^3$ } $\chi$ | $\frac{\lvert\vec{k}\rvert}{k^o+m}$ | 0 | 1 | 0 |
| $\psi^4$ } $\chi$ | 0 | $\frac{-\lvert\vec{k}\rvert}{k^o+m}$ | 0 | 1 |
| التسمية | $\psi_{+}^{1}$ | $\psi_{+}^{2}$ | $\psi_{-}^{1}$ | $\psi_{-}^{2}$ |

**ملاحظة :**

تكمن أهمية كتابة معادلة ديراك على صيغة مزدوجة، مؤلفة من سبينورين، في إمكانية إهمال أحد هذين السبينورين بالنسبة للآخر في حالة الاندفاع الخطي الصغير، أي في حالة الانتقال من الحالة النسبية إلى الحالة الاعتيادية التي نسميها هنا أيضاً الكمومية التقليدية. لنفرض إذاً أن $\vec{k} \to 0$، نكتب الطاقة $k^o$ عندئذ على الشكل

$$k^o = \pm m\left(1 + \frac{|\vec{k}|^2}{m^2}\right)^{1/2} = \pm\left(m + \frac{|\vec{k}|^2}{2m}\right)$$

نهمل الطاقة الحركية $E_c = \frac{|\vec{k}|^2}{2m}$ أمام الكتلة m (لا ننسى أنها $mC^2$) لتأخذ $k^o$ الشكل

$$k^o \simeq \pm m$$

ولنحسب في حالة الطاقة الموجبة النسبة $\frac{\|\chi\|^2}{\|\phi\|^2}$ حسب العلاقة $(2.35)_+$. لدينا

$$\frac{\|\chi\|^2}{\|\phi\|^2} = \frac{|\bar{k}|^2}{(k^o + m)^2} \approx \frac{E_c}{2m} << 1 \qquad (2.43)$$

لنلاحظ أن نظيم $\phi$ هو نظيم $\psi$ ذات الأبعاد الأربعة عملياً ويساوي إذاً $\left(\frac{k^o + m}{2k^o}\right)^{1/2}$ كما رأينا أي أنه يساوي للواحد تقريباً $(k^o \simeq m)$ وبالتالي فإن النسبة أعلاه هي مربع نظيم السبينور المهمل $\chi$.

هذا في حال الطاقة الموجبة، أما في حال الطاقة السالبة فنطبق -(2.35) لنجد أن السبينور $\phi$ هو المهمل أمام السبينور $\chi$.

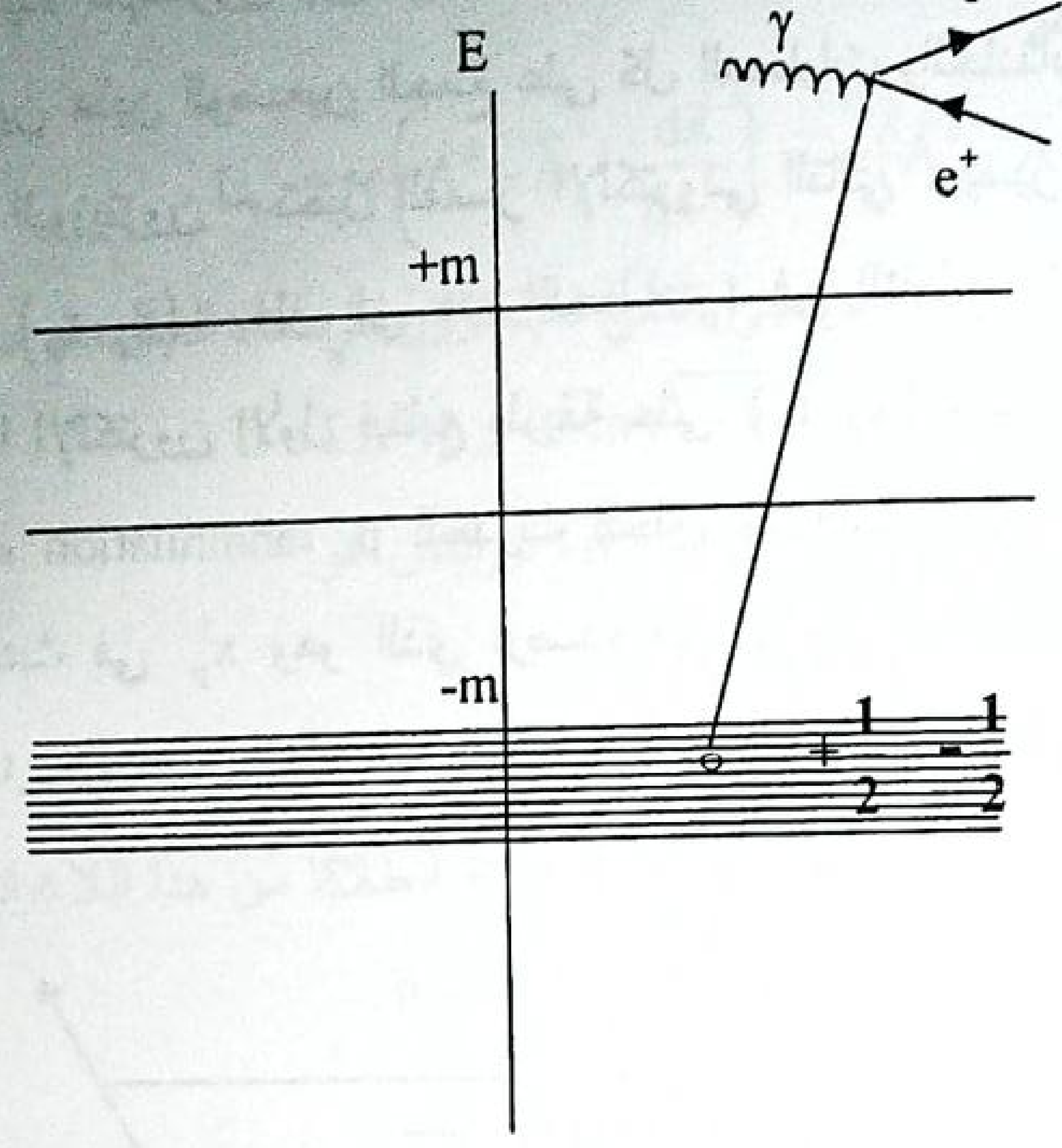
## 5.2- تفسير الحالات ذات الطاقات السالبة

نرى مما سبق أنه، خلافاً لما هو عليه الحال في الفيزياء التقليدية ولما اقترحه شرودينغر، يستحيل إهمال الموجات الواردة (الطاقات السالبة) واعتبارها غير فيزيائية وذلك لسببين جوهريين؛ أولهما أن احتمال الانتقال بين حالات مختلفة في إشارة طاقتها لا يساوي الصفر، وثانيهما أن استبعاد الطاقات السالبة يجعل من المستحيل كتابة متجهة حالة بأربعة أبعاد – مزدوجة السبينور ويعيدنا إلى التمثيل ببعدين أي إلى تمثيل زمرة الدورانات $SO(3) \leftrightarrow SU(2)/Z_2$ كما رأينا أو إلى تمثيل زمرة لورانتس المكافئة لـ $SL(2,\mathbb{C})$ : $SO(3,1) \leftrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ ولكن من أجل جسيم عديم الكتلة؛ إن أول تمثيل سبينوري ممكن لزمرة لورانتس في فضاء السبينورات لجسيم كتلوي (فيرميوني لأن السبين = $\frac{1}{2}$) هو التمثيل مزدوج السبينور.

يجب إذاً إعطاء معنى لمفهوم الطاقة السالبة، وهذا ما حاول ديراك فعله بأن تخيل مستويات الطاقة الموجبة على شكل اتصال (مستمر) Continuum بدءاً بطاقة دنيا هي طاقة السكون m $(mC^2)$، وتخيل مستويات الطاقة السالبة على نفس النحو بدءاً بطاقة عظمى هي -m وعرف الخواء بأنه امتلاء كل مستويات الطاقة السالبة : إنه بحر فيرميونات (إلكترونات) سالبة ويوجد في كل مستوى من هذه المستويات إلكترونان فقط أحدهما سبينه $+\frac{1}{2}$ والآخر $-\frac{1}{2}$ حسب مبدأ الاستبعاد لباولي. وهكذا فإن إدخال إلكترون ما لن يكون إلا في مستوى طاقة موجب نظراً لامتلاء مستويات الطاقة السالبة. نستطيع بتوفير طاقة كافية للخواء – إلى بحر الإلكترونات –، $2mC^2$ على الأقل السماح لأحد إلكترونات البحر بمغادرة البحر والوصول إلى منطقة الطاقات الموجبة مخلفاً وراءه ثقباً (hole) في المنطقة السالبة. يبدو هذا الثقب لنا كنقص في شحنة البحر السالبة، وبالتالي على شكل شحنة موجبة وطاقة موجبة فهو إذاً رصود نطلق عليه اسم البوزيترون : لا يختلف عن الإلكترون إلا من حيث إشارة الشحنة الموجبة (Posit). وهكذا فقد تنبأ ديراك بوجود البوزيترون، الجسيم المضاد للإلكترون بضعة أعوام قبل اكتشاف هذا الأخير عام 1932

وقبل نشوء نظرية الحقول المكممة في ثلاثينات القرن الماضي وتطورها إلى نظرية متسقة بعد حوالي ربع قرن من نشوئها.

ولكن كيف نخلق الثقب، كيف نحدث البوزيترون ؟ يكفي أن نحدث حقلاً كهرطيسياً عالي الطاقة $\hbar\omega \geq 2m_eC^2$ لنحدث زوجاً مؤلفاً من الكترون وبوزيترون، الشكل.2.




الشكل.2

أتى فاينمان بتفسير آخر يعتمد على الانتقال من الموجات الصادرة $f(\bar{x}-t)$ إلى الموجات الواردة (الطاقة السالبة) $f(\bar{x}+t)$ بالقول إن هذا الانتقال لا يعني سوى تغيير إشارة الزمن. ما هي نتيجة قلب الزمن في معادلات الحركة في نظرية النسبية الخاصة ؟ نعلم من الميكانيك النسبوي أن معادلة الحركة رباعية الأبعاد تكتب على الشكل، (((I.(7.(3.21 وما بعدها

$$g = mC^2\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dp}{ds}$$

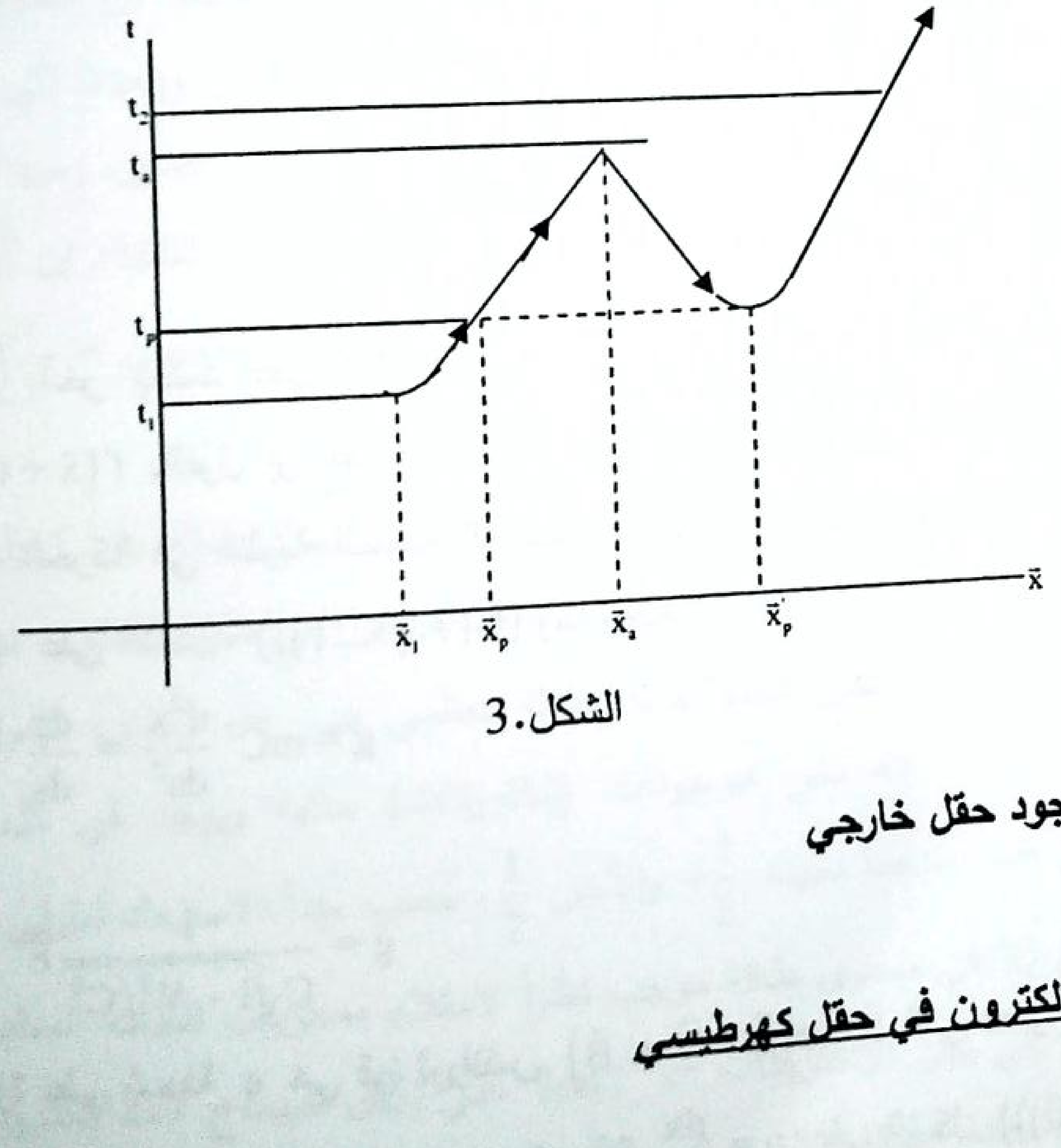
وأن

$$\vec{g} = \frac{1}{C\sqrt{1 - V^2/C^2}}\vec{F}$$

وأخيراً أن $\vec{F}$ المؤثرة على شحنة e هي قوة لورانتس $\vec{F} = e\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$ التي نعبر عنها بدليل التانسور من الرتبة الثانية $F_{\mu\nu}$ ونكتب معادلة الحركة بدليل السرعة $u = \frac{dx}{ds}$ على الشكل (((III.(4.(1.10

$$g^\mu = mC^2\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = e\frac{dx^\nu}{ds}F^\mu_\nu \qquad \nu, \mu = 0, 1, 2, 3 \qquad (2.44)$$

إن تغيرات إشارة الزمن لا تغير المشتق الثاني ولكنها تغير المشتق الأول (السرعة $\frac{dx^{\nu}}{ds}$) ولذا فلابد لكي تبقى العلاقة (2.44) صحيحة من تغيير إشارة الشحنة أيضاً. وهكذا فإن الإلكترون المتحرك في اتجاه معاكس للزمان، نحو الماضي إن صح التعبير، يبدو لنا كبوزيترون يتحرك في الاتجاه النظامي والطبيعي للزمن. تطرأ تحولات عديدة للإلكترون بين وضعين ولحظتين مختلفتين $(\bar{x}_1, t_1)$ و $(\bar{x}_2, t_2)$ ويجب لحساب احتمال الانتقال بين هذين الوضعين الجمع على كل المسارات والحادثات الممكنة. يمكن لتوضيح مفهوم الجسيم المضاد – البوزيترون – تخيل المسار الإلكتروني التالي : يسير الإلكترون بشكل اعتيادي بين النقطتين $(\bar{x}_1, t_1)$ و $(\bar{x}_p, t_p)$. يخلق في هذه اللحظة $t_p$ في النقطة $\bar{x}'_p$ زوج مؤلف من إلكترون وبوزيترون، الشكل.3، أما الإلكترون الأول فيتابع طريقة حتى $(\bar{x}_a, t_a)$ حيث يلتقي بالبوزيترون فيعدمان بعضهما (a ترمز للفناء annihilation، p للحدوث للخلق production) ولا يبقى في نهاية المطاف سوى الإلكترون الذي حدث في $x'_p$ وهو الذي نرصده في $(\bar{x}_2, t_2)$. أما البوزيترون الذي خلق في $(\bar{x}'_p, t_p)$ وانعدم في $(\bar{x}_a, t_a)$ فيبدو على شكل إلكترون يسير في الاتجاه المعاكس للزمن من $t_a$ نحو $t_p$، $t_p < t_a$




الشكل.3

## 3. معادلة ديراك بوجود حقل خارجي

### 1.3– هاميلتوني الإلكترون في حقل كهرطيسي

نعلم أن فعل الجسيم الحر (I.7§2.3) هو

$$S_\ell = -m\int ds = -m\int dx^{o}\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}} \equiv -m\int dx^{o}\sqrt{1-v^2} \qquad (3.1)$$

حيث أخذنا $C = 1$ كما في الفقرة السابقة.

نعلم أيضاً أن المقدار السلمي $dxA$ حيث $A$ هو الكمون رباعي الأبعاد يشكل لاغرانجي الحقل الكهرطيسي، ولذا نكتب الفعل الذي يشتق منه التفاعل بين الإلكترون والحقل الكهرطيسي الخارجي على الشكل

$$S_{int} = -e\int dxA = \int dx^{\circ} L_{int} \qquad (3.2)$$

حيث لاغرانجي التفاعل هو

$$L_{int} = -e\left(A^{\circ} - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dx^{\circ}}\right) = -e\left(A^{\circ} - \vec{A} \cdot \vec{v}\right) \qquad (3.3)$$

و $\vec{v}$ سرعة الجسيم. وهكذا فإن اللاغرانجي الكلي للإلكترون في هذا الحقل هو مجموع اللاغرانجيين

$$L = L_{\ell} + L_{int} = -m\sqrt{1 - v^2} - e\left(A^{\circ} - \vec{A} \cdot \vec{v}\right) \qquad (3.4)$$

رأينا من جهة أخرى أن الكمون الذي تشتق منه قوة لورانتس هو

$$U = e\left(A^{\circ} - \vec{A} \cdot \vec{v}\right)$$

بحيث يأخذ اللاغرانجي الكلي الشكل المعتاد : طاقة حركية ناقص طاقة كامنة.

ونكتب المتجهة الرباعية الاندفاع – الطاقة، $P_o = H, \vec{P}$ انطلاقاً من هذا اللاغرانجي لنجد

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} + e\vec{A} = \vec{P}_{\ell} + e\vec{A} \qquad (3.5)$$

حيث $\vec{P}_{\ell}$ هو الاندفاع الحر، والطاقة (الهاميلتوني)

$$H = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{m v^2}{\sqrt{1 - v^2}} + e\vec{A} \cdot \vec{v} + m\sqrt{1 - v^2} + e\left(A^{\circ} - \vec{A} \cdot \vec{v}\right) \qquad (3.6)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} + eA^{\circ}$$

نرى أن مربع الحد الأول في هذه الطاقة ليس سوى

$$\frac{m^2}{1 - v^2} = \left|\vec{P}_{\ell}\right|^2 + m^2 \qquad (3.6)'$$

وبأخذ (3.5) بعين الاعتبار فإنه

$$\frac{m^2}{1 - v^2} = \left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 + m^2 \qquad (3.6)''$$

وهكذا فإن الهاميلتوني هو

$$H = \sqrt{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 + m^2} + eA^{\circ} \qquad (3.7)$$

سنكتب هذا الهاميلتوني على شكل خطي انطلاقاً من معادلة شرودينغر، كما فعلنا بالنسبة للإلكترون الحر

$$\vec{P} = \frac{1}{i}\vec{\nabla} \quad , \quad i\frac{\partial \psi}{\partial x^{\circ}} = \left[\left(\vec{P} - e\vec{A}\right) \cdot \vec{\alpha} + \beta m + eA^{\circ}\right]\psi \qquad (3.8)$$

نضرب الطرفين على اليسار بـ $\beta = \gamma^0$ ونأخذ بعين الاعتبار العلاقة بين $\vec{\alpha}$ و $\vec{\gamma}$، "(2.28)"، لنجد معادلة ديراك التي توصف حركة الإلكترون في حقل كهرطيسي

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi(x) = 0 \tag{3.9}$$

حيث

$$\not{\partial} = \partial^0\gamma^0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{\gamma} \quad \text{و} \quad \not{A} = A^0\gamma^0 - \vec{A}\cdot\vec{\gamma} = A_\mu\gamma^\mu$$

لنلاحظ أننا حصلنا على نظرية تفاعل الإلكترون مع حقل كهرطيسي $A$ باستبدال $\vec{P}$ بـ $\vec{P} - e\vec{A}$ وإضافة $-eA^0$ أو بشكل آخر باستبدال المؤثر التفاضلي $i\partial_\mu$ بالمؤثر $(i\partial_\mu - eA_\mu)$. ولقد أشرنا إلى الأمر نفسه في حالة الإلكترون اللانسبوي.

## 2.3- معادلة باولي : التقريب اللانسبوي لمعادلة ديراك

نكتب حل المعادلة (3.9) $\psi(x)$ على شكل مزدوج السبينورات

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\phi(x)\\ \chi(x)\end{pmatrix}$$

ونحصل على المعادلتين المقترنتين التاليتين

$$\begin{cases}(P^0 - eA^0 - m)\phi(x) - (\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}\chi(x) = 0\\ -(P^0 + m - eA^0)\chi(x) + (\vec{P} - e\vec{A})\vec{\sigma}\phi(x) = 0\end{cases} \tag{3.10}$$

نتبع نفس المحاكمة التي قادتنا إلى (2.43) ودعتنا إلى إهمال السبينور $\chi(k)$ أمام $\phi(k)$، إهمال المركبة الصغيرة كما يسمونها أمام المركبة الكبيرة :

$$\chi(x) = \frac{(\vec{k} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}}{k^0 + m - eA^0}\phi(x) \tag{3.11}$$

نهمل الطاقة الحركية $\frac{|\vec{k}|^2}{2m}$ أمام طاقة السكون $k^0 = m$، $(mC^2)$ في الواقع، نهمل كذلك الطاقة الكهربائية الساكنة $eA^0 << m$ والاندفاع الحر المعرف بـ (3.5)

$$|\vec{k}_\ell| = |\vec{k} - e\vec{A}| = \frac{mv}{\sqrt{1 - v}} << 1 \tag{3.12}$$

وهكذا فإننا لن ننظر في (3.10) إلا إلى المركبة الكبيرة $\phi(x)$، أي أننا سنكتب معادلة وحيدة بعد تبديل $\chi(x)$ بقيمتها في المعادلة الثانية. ونحصل على

$$\left[((\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma})(P^0 + m - eA^0)^{-1}((\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}) + eA^0\right]\phi(x) = (P^0 - m)\phi(x) \tag{3.13}$$

نضرب الطرفين على اليسار بـ $\beta = \gamma^{o}$ ونأخذ بعين الاعتبار العلاقة بين $\vec{\alpha}$ و $\vec{\gamma}$، "(2.28)، لنجد معادلة ديراك التي توصف حركة الإلكترون في حقل كهرطيسي

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0 \qquad (3.9)$$

حيث

$$\partial\!\!\!/ = \partial^{o}\gamma^{o} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\gamma} \quad \text{و} \quad A\!\!\!/ = A^{o}\gamma^{o} - \vec{A}\cdot\vec{\gamma} = A_{\mu}\gamma^{\mu}$$

لنلاحظ أننا حصلنا على نظرية تفاعل الإلكترون مع حقل كهرطيسي $A$ باستبدال $\vec{P}$ بـ $\vec{P} - e\vec{A}$ وإضافة $-eA^{o}$ أو بشكل آخر باستبدال المؤثر التفاضلي $i\partial_{\mu}$ بالمؤثر $(i\partial_{\mu} - eA_{\mu})$. ولقد أشرنا إلى الأمر نفسه في حالة الإلكترون اللانسبوي.

## 2.3– معادلة باولي : التقريب اللانسبوي لمعادلة ديراك

نكتب حل المعادلة $(3.9)$ $\psi(x)$ على شكل مزدوج السبينورات

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}$$

ونحصل على المعادلتين المقترنتين التاليتين

$$\begin{cases} (P^{o} - eA^{o} - m)\phi(x) - (\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}\chi(x) = 0 \\ -(P^{o} + m - eA^{o})\chi(x) + (\vec{P} - e\vec{A})\vec{\sigma}\phi(x) = 0 \end{cases} \qquad (3.10)$$

نتبع نفس المحاكمة التي قادتنا إلى $(2.43)$ ودعتنا إلى إهمال السبينور $\chi(k)$ أمام $\phi(k)$، إهمال المركبة الصغيرة كما يسمونها أمام المركبة الكبيرة :

$$\chi(x) = \frac{(\vec{k} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}}{k^{o} + m - eA^{o}}\phi(x) \qquad (3.11)$$

نهمل الطاقة الحركية $\frac{|\vec{k}|^{2}}{2m}$ أمام طاقة السكون $k^{o} = m$، $(mC^{2})$ في الواقع، نهمل كذلك الطاقة الكهربائية الساكنة $eA^{o} << m$ والاندفاع الحر المعرف بـ $(3.5)$

$$|\vec{k}_{\ell}| = |\vec{k} - e\vec{A}| = \frac{mv}{\sqrt{1 - v}} << 1 \qquad (3.12)$$

وهكذا فإننا لن ننظر في $(3.10)$ إلا إلى المركبة الكبيرة $\phi(x)$، أي أننا سنكتب معادلة وحيدة بعد تبديل $\chi(x)$ بقيمتها في المعادلة الثانية. ونحصل على

$$\left[((\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma})(P^{o} + m - eA^{o})^{-1}((\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}) + eA^{o}\right]\phi(x) = (P^{o} - m)\phi(x) \qquad (3.13)$$

ننشر المحلل $(P^o + m - eA^o)^{-1}$ من أجل القيمة $k^o$ للمؤثر $P^o$ ونكتبه نظراً لصغر $eA^o$ أمام m على الشكل

$$\frac{1}{k^o + m - eA^o} \equiv \frac{1}{2m\left(1 - \frac{eA^o}{2m}\right)} = \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{eA^o}{2m} + \left(\frac{eA^o}{2m}\right)^2 + \dots\right) \tag{3.14}$$

بحيث تأخذ المعادلة (3.13) في تقريب أولي، $\frac{eA^o}{2m} << 1$، الشكل

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2 + eA^o\right\}\phi(x) = \left(P^o - m\right)\phi(x) \tag{3.15}$$

إن المؤثر $P^o - m$ ، $\left(P^o - mC^2\right)$ هو مؤثر الطاقة اللانسبوي، نرمز لقيمته الخاصة بـ E. يجب إذاً أن ينطبق الطرف الأيسر على الهاميلتوني اللانسبوي الذي سنرمز له بـ $H_{n.r}$. برهنا ((3.(4.34)) أن $\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + i\vec{\sigma}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. لنأخذ من هذه العلاقة $\vec{P} - e\vec{A} = \vec{a} = \vec{b}$ و $\vec{P} = \frac{1}{i}\vec{\nabla}$ ؛ لدينا

$$\left(\vec{P} - e\vec{A}\right) \times \left(\vec{P} - e\vec{A}\right) \equiv ie\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = ie\vec{B}$$

حيث $\vec{B}$ الحقل المغنطيسي المشتق من الكمون المتجهي $\vec{A}$. وبالتالي فإن

$$\left[\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2 = \left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 - e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

وهكذا فإن الهاميلتوني هو

$$H_{n.r} = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + eA^o \tag{3.16}$$

ونحصل على معادلة باولي اللانسبوية بسبينور واحد

$$\left(\frac{1}{2m}\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + eA^o\right)\phi(x) = E\phi(x) \tag{3.17}$$

نتبين صحة القاعدة : استبدال $\vec{P}$ بـ $\vec{P} - e\vec{A}$ في حساب الطاقة الحركية عندما يقع التفاعل بين الإلكترون والحقل الكهرطيسي. إن الحد الثاني في الهاميلتوني حيث أعدنا كتابة $\hbar$ في الجداء مع $\vec{\sigma}$ هو حد التفاعل المغنيطيسي بين العزم المغنطيسي للإلكترون $\vec{M} = \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}$ ، $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m}$ هو مغناتون بور، والحقل المغنطيسي $\vec{B}$. أما $eA^o$ فهو الطاقة الكهربائية الراكدة.

لابد من الإشارة هنا إلى أن هذه المعادلة التي استخرجناها كتقريب لانسبوي لمعادلة ديراك قد وضعت من قبل باولي عام 1927، قبل معادلة ديراك، كمعادلة بمركبتين تأخذ بعين الاعتبار وجود قيمتين خاصتين ممكنتين للعزم الزاوي الصميمي للإلكترون، وبالتالي العزم المغنطيسي المتناسب معه : $\vec{M} = g\mu_B\frac{\vec{\sigma}}{2}$، حيث g ثابتة لاندي المساوية لـ 2 من أجل السبين (و 1 من أجل العزم الزاوي المداري). هذا في حين يبدو وجود العزم الزاوي الصميمي والقيم التي يأخذها كنتيجة طبيعة لمعادلة ديراك. يبدو الأمران طبيعيين من وجهة نظر تمثيل الزمر التي اعتمدناها في هذا الكتاب : تمثيل زمرة الدورانات

$SU(2)/Z_2 \leftrightarrow SO(3)$ في الفضاء الإقليدي العادي بأول عدد نصف صحيح، ثقل التمثيل يساوي $\frac{1}{2}$،

أما تمثيل زمرة لورانتس $SL(2,\mathbb{C}) \leftrightarrow SO(3,1)$ فيعرف بإعطاء عددين موجبين $(j, j')$ يأخذا قيماً صحيحة أو نصف صحيحة وأبعاد فضاء التمثيل هي $(2j+1)(2j'+1)$. لا نريد الدخول في التفاصيل مكتفين بالقول هنا إن التمثيل مزدوج السبينورات هو الجمع المباشر لتمثيلين : $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

أولهما تمثيل لسبينور وثانيهما تمثيل لسبينور متناسب مع المرافق العقدي لسبينور عادي $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$، إنه على وجه التحديد $i\bar{\varepsilon}\begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 \\ \bar{\xi}^2 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \bar{\xi}^2 \\ -\bar{\xi}^1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{pmatrix}$، حيث $\varepsilon$ هو التانسور المتري مضاد التناظر ((3.(4.38))، نسميه السبينور المنقط ونرمز له بـ $\dot{\xi}$.

ولذا وضعنا النقطة على شكل مساير التغيير. نعرف السبينور المنقط مضاد التغيير

$$\dot{\xi} = -i\begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 \\ \bar{\xi}^2 \end{pmatrix}$$

نكتب السبينور المزدوج لديراك على الشكل $\begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}$، سبينور مضاد التغيير غير منقط وآخر منقط. ولدينا من أجل أي عنصر $A$ من الزمرة $SL(2,\mathbb{C})$، أي من أجل أي عنصر من زمرة لورانتس (انظر القضية 8 في الفصل الثالث)

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \dot{\eta}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{\dagger -1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}$$

ويمكن البرهان أن السبينوريين $\phi$ و $\chi$ يكتبان على الشكل

$$\phi = \frac{\xi + \dot{\eta}}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \chi = \frac{-\dot{\eta} + \xi}{\sqrt{2}}$$

## 3.3- التقريب النسبوي لمعادلة ديراك، تحولات فولدي–ويتيوزن Foldy-Wouthuysen

### أ- المؤثرات الزوجية والفردية

حصلنا في الرقم السابق على التقريب اللانسبوي لمعادلة ديراك، على معادلة باولي بإهمال المركبة الصغيرة $\chi(x)$ أمام المركبة الكبيرة $\phi(x)$ وذلك بأن توقفنا في النشر (3.14) عند الحد الأول

$$\frac{1}{k^0 + m - eA^0} \simeq \frac{1}{2m}$$

نريد الآن الذهاب في هذا التقريب إلى القوة الثالثة بـ $\frac{1}{2m}$ : $\left(\frac{1}{2m}\right)^3$ لنحصل على معادلة تقريبية نسبوية لمعادلة ديراك تأخذ بعين الاعتبار التفاعل بين العزمين الزاوي المداري والزاوي الصميمي (السبين)

للإلكترون، المسمى اختصاراً تفاعل السبين–المدار، وسنعتمد الطريقة التي اتبعها هذان المؤلفان عام 1950 للتخلص من المركبة الصغيرة. ننطلق من الملاحظة أن المصفوفات القطرية لا تمزج المركبات على نقيض المصفوفات القطرية المضادة التي تمزجها ورأينا مثالاً على ذلك مؤثر السوية (§1.6).(4). سنعمم هذا على فضاء السبينورات المزدوجة ونضع

**تعريف 5 :**

نقول عن مؤثر $P$ إنه زوجي في هذا الفضاء إذا كان لا يقرن السبينورين $\phi$ و $\chi$، أي إذا أمكن كتابته على شكل قطري

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

حيث $A$ و $B$ مصفوفتان $2\times 2$ ونقول عن هذه الكتابة إنها كتابة بالجملة. كما نقول عن مؤثر $O$ إنه فردي في هذا الفضاء إذا كان يربط بين السبينورين $\phi$ و $\chi$، أي إذا أمكن كتابته مع شكل قطري مضاد بالجملة

$$O = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

إن جداء مصفوفتين مضادتي القطرية مصفوفة قطرية أي أن جداء مؤثرين فرديين مؤثر زوجي.

إن $\gamma^o$ في التمثيل الاعتيادي، تمثيل باولي الذي اعتمدناه، مؤثر زوجي في حين $\gamma^i$ $i = 1, 2, 3$ مؤثرات فردية. نرى بسهولة أن

$$P = \gamma^o P \gamma^o \quad ، \quad \left[\gamma^o, P\right]_- = 0 \qquad (3.18)$$

و

$$O = -\gamma^o O \gamma^o \quad ، \quad \left[\gamma^o, O\right]_+ = 0 \qquad (3.19)$$

ينتج عن هذا أنه من الممكن تحليل أي مؤثر إلى مجموع مؤثرين أحدهما زوجي والآخر فردي

$$Q = \frac{1}{2}\left(Q + \gamma^o Q \gamma^o\right) + \frac{1}{2}\left(Q - \gamma^o Q \gamma^o\right) = P + O$$

إن جداء القوس الأول على اليمين واليسار بـ $\gamma^o$ لا يغير القوس بينما يضرب القوس الثاني بـ -1 نتيجة هذا الجداء.

من الواضح أن وجود مؤثر زوجي $P$ على $\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} |\phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix}$ يعطينا سعة الانتقال التالية

$$\langle\psi|P|\psi\rangle = \langle\phi|\langle\chi|P\begin{pmatrix} |\phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix} = \langle\phi|P|\phi\rangle + \langle\chi|P|\chi\rangle$$

وتهمل السعة الثانية أمام السعة الأولى من أجل $\chi = \frac{1}{m^k}$ $k = 1, 2, 3, 4...$ حسب التقريب المرغوب به.

### ب- تحول الهاميلتوني

علينا إذاً إجراء تحول على المتجهة $|\psi\rangle$ : $|\psi'\rangle = D|\psi\rangle$ وعلى الهاميلتوني $H$ ونشر التحول على الهاميلتوني على شكل سلسلة بـ $\frac{1}{m}$ لا تحتفظ إلا بالمؤثرات الزوجية. نعلم أنه من الضروري أن يكون المؤثر $D$ واحدياً $D^{-1} = D^{\dagger}$ حتى يبقى الجداء السلمي والنظيم على وجه الخصوص، منحفظاً. كما نعلم أن المؤثرات $A$ تتحول إلى $A' = DAD^{-1}$. ترينا معادلة شرودينغر[3] لمتجهة الحالة $|\psi\rangle$ :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left(D^{-1}|\psi'\rangle\right) = D^{-1}H'DD^{-1}|\psi'\rangle = D^{-1}H'|\psi'\rangle$$

ومنه معادلة شرودينغر لمتجهة الحالة $|\psi'\rangle$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \left(-iD\frac{dD^{-1}}{dt} + H'\right)|\psi'\rangle = \mathcal{H}'|\psi'\rangle \qquad (3.20)$$

حيث

$$\mathcal{H}' = DHD^{-1} - iD\frac{dD^{-1}}{dt} \qquad (3.20)'$$

نكتب المؤثر $D$ على شكل أسي لنشره على شكل سلسلة، $e^{iS}$، $S$ مؤثر ذاتي الترافق لأن $D$ واحدي؛ و $S$ تابع للزمن طبعاً.

**<u>قضية 4</u> :**

نكتب $DHD^{-1}$ على الشكل

$$F(1) = DHD^{-1} = e^{iS}He^{-iS} = H + \frac{i}{1!}[S, H] + \dots\frac{i^n}{n!}\left[S, \left[S\dots S[S, H]\right]\dots\right] + \dots \qquad (3.21)$$

و $iD\frac{dD^{-1}}{dt}$ على الشكل

$$iD\frac{dD^{-1}}{dt} = \dot{S} + \frac{i}{2}\left[S, \dot{S}\right] - \frac{1}{6}\left[S, \left[S, \dot{S}\right]\right] + \dots \qquad (3.22)$$

نكتب للبرهان على العلاقة الأولى المؤثر التابع لوسيط $\lambda$

---

[3] لا ننسى أنها تبقى صحيحة في النظرية النسبية ولكنها ليست مسايرة التغيير، على غرار معادلات ماكسويل الأربع التي تبقى صحيحة كذلك والتي وضعناها على شكل مساير التغيير باللجوء إلى الكمون ذي الأبعاد الأربعة.

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S} H e^{-i\lambda S}$$

وننشره نظراً لكونه تحليلي بـ $\lambda$ على الشكل

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} F^{(n)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \qquad (1)$$

لدينا

$$F^{(1)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = i\left(Se^{i\lambda S}He^{-i\lambda S} - e^{i\lambda S}He^{-i\lambda S}S\right)\Big|_{\lambda=0} = i\,e^{i\lambda S}[S, H]e^{-i\lambda S}\Big|_{\lambda=0} \qquad (2)$$

وبالتكرار

$$F^{(2)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = (i)^2 e^{i\lambda S}\big[S, [S, H]\big]e^{-i\lambda S}\Big|_{\lambda=0} \qquad (3)$$

$$F^{(n)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = (i)^n e^{i\lambda S}\Big[S, \big[S, \ldots, \big[S, [S, H]\big]\ldots\big]e^{-i\lambda S}\Big|_{\lambda=0} \qquad (4)$$

ونحصل على العلاقة (3.21) بأخذ $\lambda = 1$

$$F(1) = DHD^{-1} = e^{iS}He^{-iS} = H + \frac{i}{1!}[S, H] + \ldots \frac{i^n}{n!}\Big[S, \big[S \ldots S[S, H]\big]\ldots\Big] + \ldots$$

أما العلاقة (3.22) فنبرهنها بكتابة الجداء

$$i\left(I + iS + \frac{(iS)^2}{2!} + \frac{(iS)^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 - iS + \frac{(iS)^2}{2!} - \frac{(iS)^3}{3!} - \ldots\right)^{\cdot}$$

حيث . تشير إلى اشتقاق $S$ بالنسبة للزمن. نكتب الاشتقاق على شكل متناظر

$$\left(S^2\right)^{\cdot} = \frac{S\dot{S} + \dot{S}S}{2}$$

$$\left(S^3\right)^{\cdot} = \frac{\dot{S}SS + S\dot{S}S + SS\dot{S}}{3}$$

الخ.

نرى بسهولة أن الحدود الأولى في الجداء أعلاه تعطي (3.22).

نختار $S$ متناسباً مع $\frac{1}{m}$ ونتوقف في نشر (3.21) عند الحدود من الرتبة الثالثة بـ $S$ وبمشتقه $\dot{S}$ كما نختار $S$ فردياً أيضاً. لدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' = H + i[S, H] - \frac{1}{2}\big[S, [S, H]\big] - \frac{i}{6}\Big[S, \big[S, [S, H]\big]\Big] \\ + \frac{1}{24}\Big[S, \Big[S, \big[S, [S, H]\big]\Big]\Big] - \dot{S} - \frac{i}{2}[S, \dot{S}] + \frac{1}{6}\big[S, [S, \dot{S}]\big]\end{aligned} \qquad (3.23)$$

حيث $H$، هاميلتوني ديراك في حال وجود حقل كهرطيسي متفاعل مع الإلكترون، هو ذلك الذي حصلنا عليه في (3.8)، نعيد كتابته هنا بدليل $\gamma$ :

$$H = \left(\vec{P} - e\vec{A}\right)\gamma^{o}\vec{\gamma} + eA^{o}I + m\gamma^{o} \qquad (3.24)$$

لنلاحظ أن وجود الحد m في الهاميلتوني هو الذي جعلنا نمدد النشر إلى الرتبة الرابعة بـ S في نشر $\mathcal{H}$ كي نتمكن من التوقف عند الرتبة الثالثة بـ $\frac{1}{m}$. ونقوم الآن باختيار S مناسب يخلصنا من المؤثرات الفردية في الهاميلتوني، ثم تكرار عملية تغيير القاعدة إن اقتضى الأمر :

إن المؤثر

$$\mathcal{O} = \left(\vec{P} - e\vec{A}\right)\gamma^{o}\vec{\gamma} = \left(\vec{P} - e\vec{A}\right) \cdot \vec{\alpha} \tag{3.25}$$

الذي يظهر في الهاميلتوني مؤثر فردي، نظراً لتضاد التبادل بين $\gamma^{o}$ و $\vec{\gamma}$، وهو في ذات الوقت مضاد الهيرميتية : $\mathcal{O}^{\dagger} = -\mathcal{O}$ ؛ نجعله هيرميتياً بضربه بـ i- على سبيل المثال، $(-i\mathcal{O})^{\dagger} = i\mathcal{O}^{\dagger} = -i\mathcal{O}$ ونأخذ مولد تحول $|\psi\rangle$، S على الشكل

$$S = \frac{-i\gamma^{o}\mathcal{O}}{2m} \tag{3.26}$$

الذي يرينا على الفور أننا نتخلص في الهاميلتوني من المؤثر الفردي $\mathcal{O}$ في التقريب صفر في $\frac{1}{m}$

$$\mathcal{H}_{o}' = H + i\left[S, H\right] = \mathcal{O} + eA^{o}I + m\gamma^{o} + i\left[\frac{-i\gamma\mathcal{O}}{2m}, m\gamma^{o}\right] \tag{3.27}$$

ذلك أن

$$\left[\frac{1}{2}\gamma^{o}\mathcal{O}, \gamma^{o}\right] = -\frac{2\mathcal{O}}{2}$$

وهذا ما يبرر اختيار S على هذا الشكل.

لنكتب الآن مختلف حدود النشر في (3.23) مستعينين بالعلاقات التالية

$$\left[\gamma^{o}\mathcal{O}^{n}, \mathcal{O}\right] = 2\gamma^{o}\mathcal{O}^{n+1} \quad \text{من اجل اي عدد صحيح } n \tag{1}$$

$$\left[\mathcal{O}^{n}, \gamma^{o}\mathcal{O}\right] = \begin{cases} -2\gamma^{o}\mathcal{O}^{n+1} & \text{من اجل } n \text{ فردي} \\ 0 & \text{من اجل } n \text{ زوجي} \end{cases} \tag{2}$$

$$\left[\gamma^{o}\mathcal{O}^{n}, \gamma^{o}\mathcal{O}\right] = \begin{cases} 2\mathcal{O}^{n+1} & \text{من اجل } n \text{ زوجي} \\ 0 & \text{من اجل } n \text{ فردي} \end{cases} \tag{3}$$

وهي علاقات سهلة البرهان نظراً لسهولة التبادل بين $\mathcal{O}$ و $\gamma^{o}$ : $\mathcal{O}^{n}\gamma^{o} = (-1)^{n}\gamma^{o}\mathcal{O}^{n}$

لدينا في التقريب $\frac{1}{m}$، حيث سمينا $eA^{o}I = \varepsilon$

$$i\left[S, H\right] = i\left[\frac{-i\gamma^{o}\mathcal{O}}{2m}, m\gamma^{o} + \mathcal{O} + \varepsilon\right] = -\mathcal{O} + \frac{\gamma^{o}\mathcal{O}^{2}}{m} + \frac{\gamma^{o}}{2m}\left[\mathcal{O}, \varepsilon\right] \tag{3.28}$$

وفي التقريب $\frac{1}{m^{2}}$، بأخذ هذه العلاقة بعين الاعتبار

$$\frac{i^{2}}{2!}\left[S, \left[S, H\right]\right] = -\frac{\gamma^{o}\mathcal{O}^{2}}{2m} - \frac{\mathcal{O}^{3}}{2m^{2}} - \frac{1}{8m^{2}}\left[\mathcal{O}, \left[\mathcal{O}, \varepsilon\right]\right] \tag{3.29}$$

لن نضع الحد الأخير في الطرف الثاني لحساب التقريب التالي بـ $\frac{1}{m^3}$ لأنه من الشكل $\frac{1}{m^3}$ على الأقل نظراً لوجود $eA^{\circ}$ فيه؛ نأخذ إذاً الحدين الأولين في (3.29) ونحصل على

$$\frac{i^3}{3!}\left[S, \left[S, \left[S, H\right]\right]\right] = \frac{\mathcal{O}^3}{6m^2} - \frac{\gamma^{\circ}\mathcal{O}^4}{6m^3} \tag{3.30}$$

وهنا أيضاً سنستغني عن الحد الثاني في التقريب التالي لأنه سيعطي $\frac{1}{m^4}$، ولدينا

$$\frac{i^4}{4!}\left[S, \left[S, \left[S\left[S, H\right]\right]\right]\right] = \frac{\gamma^{\circ}\mathcal{O}^4}{24m^3} \tag{3.31}$$

لنحسب الآن الحدود الثلاثة الأخيرة في (3.23) مع ملاحظة أن $\dot{\mathcal{O}}$ فردي أيضاً. لدينا

$$\dot{S} = \frac{-i\gamma^{\circ}\dot{\mathcal{O}}}{2m} \tag{3.32}$$

$$\left[S, \dot{S}\right] = \frac{1}{4m^2}\left[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}\right] \tag{3.33}$$

$$\left[S, \left[S, \dot{S}\right]\right] = \frac{-i}{8m^3}\left[\gamma^{\circ}\mathcal{O}^2, \dot{\mathcal{O}}\right] = \frac{-i}{8m^3}\left[\mathcal{O}^2, \gamma^{\circ}\dot{\mathcal{O}}\right] = 0 \tag{3.34}$$

نجمع أخيراً المقادير التي حصلنا عليها في (3.24) و (3, 34-27) للوصول إلى محوّل H :

$$\mathcal{H}' = \gamma^{\circ}m + \varepsilon + \frac{\gamma^{\circ}\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} - \frac{\gamma^{\circ}\mathcal{O}^4}{8m^3} + \frac{\gamma^{\circ}}{2m}\left[\mathcal{O}, \varepsilon\right] - \frac{1}{8m^2}\left[\mathcal{O}, \left[\mathcal{O}, \varepsilon\right]\right] + \frac{i\gamma^{\circ}\dot{\mathcal{O}}}{2m} - \frac{i}{8m^2}\left[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}\right] \tag{3.35}$$

لم تنته مهمتنا لأنه لا يزال في هذا المحوّل مؤثرات فردية هي القوى الفردية لـ $\mathcal{O}$ و $\dot{\mathcal{O}}$. نسمي مجموع هذه المؤثرات الفردية التي نريد التخلص منها $\mathcal{O}'$ ونكتب $\mathcal{H}'$ على الشكل الذي كتبنا عليه H، مجموع مؤثرات زوجية ومؤثر فردي

$$\mathcal{H}' = \gamma^{\circ}m + \mathcal{O}' + \varepsilon' \tag{3.36}$$

حيث

$$\mathcal{O}' = \frac{\gamma^{\circ}}{2m}\left[\mathcal{O}, \varepsilon\right] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\gamma^{\circ}\dot{\mathcal{O}}}{2m} \tag{3.37}$$

و

$$\varepsilon' = \frac{\gamma^{\circ}\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\gamma^{\circ}\mathcal{O}^4}{8m^3} + \varepsilon - \frac{1}{8m^2}\left[\mathcal{O}, \left[\mathcal{O}, \varepsilon\right]\right] - \frac{i}{8m^2}\left[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}\right] \tag{3.38}$$

ونتبع من جديد خطوة خطوة ما فعلناه من أجل H، نحوّل $|\psi\rangle$ بمصفوفة $D'$ نكتبها على الشكل $e^{iS'}$ ونختار $S'$ متناسباً مع $\mathcal{O}'$ كما في (3.26)

$$S' = \frac{-i\gamma^{\circ}\mathcal{O}'}{2m} \tag{3.26'}$$

لن نأخذ إلا المقادير من القوة 1- بـ m، $S'$ متناسب مع $\frac{1}{m^2}$ ولذا لن نأخذ في النشر (3.23) إلا المبادل $\left[S', \mathcal{H}'\right]$ و $\dot{S}'$ ونكتب

$$\mathcal{H}'' = \mathcal{H}' + i\left[S', \mathcal{H}'\right] - \dot{S}' = \gamma^{\circ}m + \varepsilon' + \frac{\left[\gamma^{\circ}\mathcal{O}', \varepsilon'\right]}{2m} + \frac{i\gamma^{\circ}\dot{\mathcal{O}}'}{2m} \tag{3.23'}$$

حيث أعدم المبادل بين $S'$ و $m\gamma^\circ$ الحد $O'$ في $\mathcal{H}'$ كما في (3.27).

إن الحدين الأخيرين في الطرف الثاني فرديان، نرمز لمجموعهما كما في (3.37) بـ $O''$ ونتخلص منه بالقيام بتحول ثالث لـ $\psi$ بمصفوفة $D''$ ونختار $S''$ مع $O''$ كما في (3.26)، '(3.26)

$$O'' = \frac{[\gamma^\circ O', \varepsilon']}{2m} + \frac{i\gamma^\circ \dot{O}'}{2m} \quad ; \quad S'' = \frac{-i\gamma^\circ O''}{2m} \tag{3.26''}$$

إن $S''$ متناسب مع $\frac{1}{m^3}$ ولذا فلن نحتاج إلى أي مبادل في نشر $\mathcal{H}'''$ ماعدا تبادل $S''$ مع $O''$ الذي يعدم المؤثر الفردي $O''$؛ وهكذا فإن

$$\mathcal{H}''' = \gamma^\circ m + \varepsilon' + O'' + \frac{1}{2m}\left[\gamma^\circ O'', \gamma^\circ m\right] = \gamma^\circ m + \varepsilon' \tag{3.23''}$$

### جـ- حساب المؤثر $\varepsilon'$

حسبنا $O^2$ في الرقم السابق الذي قادنا عندما نسقطه على المركبة الكبيرة إلى معادلة باولي، إلى التقريب اللانسبوي لمعادلة ديراك ووجدنا (نعود لكتابة $\hbar = 1$ كما في كل هذا الرقم)

1) $$\frac{O^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left\{-e\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2\right\}$$

يظهر $O^4$ بالمعامل $m^{-3}$ في الهاميلتوني ولذا وجب إهمال كل العناصر الموجودة فيه المتناسبة مع $m^{-1}$ أي كل الطاقات الكامنة ولا يبقى فيه إلا $P^4$

2) $$[O, \varepsilon] = \alpha \cdot \left(\vec{P} - e\vec{A}\right)\varepsilon - \varepsilon\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{P} - e\vec{A}\right) = \vec{\alpha} \cdot \vec{P}\varepsilon = -ie\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\right)A^\circ$$

لا ينتج عن التبادل بين $O$ و $\varepsilon$ سوى فعل المؤثر $\vec{P}$ على $\varepsilon$ $(\varepsilon = eA^\circ)$.

كما أن اشتقاق $O$ بالنسبة للزمن هو اشتقاق الكمون المتجه $\vec{A}$ و

$$i\dot{O} = -ie\,\vec{\alpha} \cdot \dot{\vec{A}}$$

إن مجموع هذين الحدين هو

$$-i\vec{\alpha}\left(\vec{\nabla}A^\circ + \dot{\vec{A}}\right) = i\vec{\alpha}\vec{E}$$

حيث $\vec{E}$ هو الحقل الكهربائي، وتبادل هذا المجموع مع $\frac{1}{8m^2}O$ هو التبادل بين $\vec{P}$ و $\vec{E}$ ويعطينا

3) $$\frac{1}{8m^2}\left[O, [O, \varepsilon] + i\dot{O}\right] = \frac{ie}{8m^2}\left[\vec{\alpha} \cdot \vec{P}, \vec{\alpha} \cdot \vec{E}\right] = \frac{ie}{8m^2}\sum_{i,j}\left[\alpha^i\alpha^j P^i E^j - \alpha^j\alpha^i E^j P^i\right]$$
$$= \frac{ie}{8m^2}\sum_{i,j}\left[\alpha^i\alpha^j \frac{1}{i}\frac{\partial E^j}{\partial x^i} + \alpha^i\alpha^j P^i E^j - \alpha^j\alpha^i E^j P^i\right]$$

وبما أن $\alpha^i\alpha^j$ مؤثر زوجي وكذلك المؤثر $\left[\alpha^i, \alpha^j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$ فإننا سنأخذ فعل المؤثر 3) على المركبة الكبيرة، لقد كان هذا الهدف الأول من التحولات التي قمنا بها، ونكتب 3) بالنسبة لهذه المركبة على الشكل

$$\frac{ie}{8m^2}\sum_{i,j}\left\{\sigma^i\sigma^j\frac{1}{i}\frac{\partial E^j}{\partial x^i} + 2i\varepsilon_{ijk}\sigma^k E^j P^i\right\} \qquad (3'$$

وبما أن $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma^k$ فإن $i = j$ يعطينا $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ في الحد الأول و $i \neq j$ يعطينا مركبة الجداء المتجهي $\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_k$ مضروباً بـ $\sigma_k$، ومن الواضح أن الحد الثاني هو جداء مختلط ولدينا أخيراً

$$\frac{1}{8m^2}\left[O, [O, \varepsilon] + i\dot{O}\right] = \frac{e}{8m^2}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + i\vec{\sigma}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) + 2\left(\vec{E}\times\vec{P}\right)\cdot\vec{\sigma}\right] \qquad (3''$$

## د- حدود الهاميلتوني النسبوي الفاعل بالسبينور $\phi(x)$

تتحول $\gamma^0$ إلى I، المصفوفة الوحدة $2\times2$، وكل المؤثرات زوجية. نكتب "(3.23) بعد حسابنا (3.38) بدليل 1) و '3) وأخذ $O^4 \simeq P^4$، على الشكل

$$\mathcal{H}''' = \left(m + \frac{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{P^4}{8m^3}\right)I + \left\{eA^0 - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - \frac{e}{8m^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right\}I$$
$$- \frac{ie}{8m^2}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}\left(\vec{E}\times\vec{P}\right) \qquad (3.39)$$

يعيدنا هذا الهاميلتوني إلى هاميلتوني باولي إذا أهملنا كل ما هو بـ $\frac{1}{m^2}$، $\frac{1}{m^3}$ وأهملنا طاقة السكون m.

لنلاحظ أن مجموع الحدين الأولين في القوس الأول ليس سوى الطاقة الحركية النسبية

$$m\left(1 + \frac{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2}{2m^2}\right) = m\left(1 + \frac{\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2}{m^2}\right)^{1/2} = \left[m^2 + \left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2\right]^{1/2}$$

أي أن $\frac{P^4}{8m^3}$ هو تصحيح لهذه الطاقة الحركية النسبية. أما القوسان الأخيران فيعبران عن التفاعل بين العزم السبيني والعزم المداري. نأخذ لتوضيح ذلك حالة حقل كهربائي ناتج من شحنة نقطية، نواة الذرة مثلاً، متناسب مع $\frac{1}{r}$ وذي تناظر كروي $A^0 \sim \frac{1}{r}$، يتفاعل مع الإلكترون

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial A^0}{\partial r}$$

ولدينا $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}A^0 = 0$ ولا يبقى إلا القوس الأخير

$$-\frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{P}\right) = \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial A^0}{\partial r}\left(\vec{r}\times\vec{P}\right)\cdot\vec{\sigma} \qquad (3.40)$$
$$= \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial A^0}{\partial r}\vec{L}\cdot\vec{\sigma}$$

حيث $\vec{L}$ العزم الزاوي المداري للإلكترون و $\frac{e\vec{\sigma}}{2m}$ $(\hbar = 1)$ عزمه المغنطيسي المتناسب مع السبين.

يساوي هذا الحد الصفر عندما يكون $\vec{L} = 0$ أي عندما الإلكترون في الحالة s. تتفق العلاقة (3.40) مع المحاكمة التقليدية مع فارق بسيط هو وجود العامل $\frac{1}{2}$ الإضافي في هذه العلاقة : تتأثر شحنة e سرعتها $\vec{v}$ بحقل كهربائي $\vec{E}$ $(\vec{B} = 0)$ كما لو كانت في حقل مغنطيسي $\vec{B}' = -\vec{v} \times \vec{E}$ ((I.7.(4.19)) مع $C = 1$ و $\frac{v^2}{C^2} = 0$، وهكذا فإن طاقة التفاعل بين هذا الحقل $\vec{B}'$ والعزم المغنطيسي الناتج عن السبين $\frac{e\vec{\sigma}}{2m}$ هو

$$-\frac{e\vec{\sigma}}{2m} \cdot \vec{B}' = \frac{e\vec{\sigma}}{2m^2}\left(\vec{P} \times \vec{E}\right)$$

وهو الحد (3.40) مضروباً بـ 2.[4]

## 4. ذرة الهدروجين النسبوية

### 1.4– النشر بدليل الدالات التوافقية الكروية

سنكتب لدراسة ذرة الهدروجين النسبوية متجهة الحالة $\psi$ بدليل المتغيرات الكروية $(r, \theta, \varphi)$ على غرار ما فعلناه في الفصل الثالث في الدراسة العادية، أي بدليل جداء متجهة $f(r)$ تابعة للوضع بمتجهة تابعة للزاويتين، بدالة توافقية كروية $Y(\theta, \varphi)$. رأينا أن متجهة الحالة في الحالة اللانسبوية تتعين بإعطاء ثلاثة أعداد كمومية n، $\ell$، m يعين العدد الأول، الرئيسي، الطاقة والثاني العزم الزاوي المداري $L^2 = \ell(\ell + 1)$، والثالث المغنطيسي، مسقط هذا العزم على اتجاه معين ويأخذ $(2\ell + 1)$ قيمة، ولدينا العلاقة التالية بين $\ell$ و n ((3.(3.14)):

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell + 1) = n^2$$

[4] سبب الاختلاف أن المحاكمة التقليدية تنظر إلى المقرن المرتبط بالإلكترون كمقرن غاليلي وليس كمقرن دوار كما هو في الواقع؛ وقد أثار توماس الانتباه منذ عام 1926 إلى هذا الزلل في المحاكمة التقليدية. يبقى أن نضيف أن الإلكترون ليس بالضرورة في حالة يكون فيها السبين $\pm\frac{1}{2}$. إذ يمكن أن يوجد في حالة مزيجة (أي أن يكون مستقطباً جزئياً كما يقال). انظر لتفصيل أوسع كتاب Landau -Lifchitz المجلد الرابع Relativistic Quantum Theory §41.

إن الاختلاف بين الدراسة العادية والنسبوية هو : أولاً أن متجهة الحالة هنا هي حل لمعادلة ديراك، إنها متجهة بأربعة أبعاد كتبناها على شكل سبينور مزدوج $\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$، وثانياً أن العزم الزاوي لم يعد مقتصراً على العزم المداري وحده وإنما أصبح مجموع العزم المداري والسبين.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{4.1}$$

وأن المقادير المنحفظة لم تعد $L^2$ و $L_z$ وإنما $J^2$ و $J_z$.

نرى أيضاً أن العدد $\ell$ هو الذي يعين سوية الحالة (زوجيتها أو فرديتها) لأن الانتقال من $\vec{x}$ إلى $-\vec{x}$ يحول المتغيرين الزاويين $\theta$ و $\varphi$ إلى $\pi - \theta$ و $\varphi + \pi$ ولا يؤثر على المتغير $r \in [0, \infty]$ وأن سوية $P_\ell^m(x)$، $(x = \cos\theta)$، هي $\ell - m$ حسب تعريف $P_\ell^m$ $(3.(1.40)''')$ وسوية $e^{im\varphi}$ هي $m$ وبالتالي فإن سوية $Y_{\ell m}$ المعرفة بـ $(3.(1.45))$ هي $\ell$

$$Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \tag{4.2}$$

سنبرهن في ملحق هذا الفصل أن مؤثر السوية $\mathscr{P}$ الفاعل في فضاء السبينورات المزدوجة متناسب مع $\gamma^o$ وبالتالي فإن

$$\psi'(x^o, -\vec{x}) = \mathscr{P}\psi(x^o, \vec{x}) = \mathscr{P}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi(x)\\ -\chi(x)\end{pmatrix}$$

ينتج عن ذلك أنه من اللازم لكي لا تتغير متجهة الحالة بفعل هذا المؤثر أن يكون للسبينورين $\phi$ و $\chi$ سويتان مختلفتان، أي عددان كموميان مداريان $\ell$ و $\ell'$ يفترقان عن بعضهما بـ $\pm 1$، فإذا كان الأول زوجياً، ولم يتأثر بالتالي بالانتقال من $\vec{x}$ إلى $-\vec{x}$، فإن الثاني فردي وتتخلص من إشارة الناقص نتيجة الانتقال، والعكس بالعكس طبعاً. لذا سندخل العدد الكمومي التالي $\varpi$ الذي يأخذ إحدى القيمتين $\pm 1$ ونكتب

$$\ell' = \ell + \varpi$$

$$j = \ell + \frac{\varpi}{2} = \ell' - \frac{\varpi}{2} \tag{4.3}$$

تتيح هذه الكتابة إعطاء القيمة $(-1)^{j-\frac{\varpi}{2}}$ لمؤثر السوية $\mathscr{P}$ : إنها $(-1)^{j-\frac{\varpi}{2}} = (-1)^\ell$ من أجل $\phi$؛ وهي إشارة $-\chi$ من أجل $\chi$ $(-1)^{j-\frac{\varpi}{2}} = (-1)(-1)^{\ell'}$ كذلك، ونكتب

$$\mathscr{P}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = (-1)^{j-\frac{\varpi}{2}}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

يأخذ مسقط العزم الزاوي الصميمي القيمتين $\pm\frac{1}{2}$ في كل سبينور ولذا سنكتب الدالات التوافقية الكروية الأربع $\Omega$، المسماة أيضاً السبينورات الكروية، من أجل $\varpi = 1$ على الشكل

$$\begin{cases} \Omega_{j=\ell+1/2,\ell,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} & Y_{\ell,m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} & Y_{\ell,m+1/2} \end{pmatrix} \sim \phi \\ \Omega_{j=\ell'+1/2,\ell',m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} & Y_{\ell',m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j+m-1}{2j+2}} & Y_{\ell',m+1/2} \end{pmatrix} \sim \chi \end{cases} \qquad (4.5)[5]$$

يقابل $m \mp \frac{1}{2}$ في السبينور الكروي قيمة السبين $\pm \frac{1}{2}$ بحيث يكون مسقط العزم الزاوي الكلي $J_z$ مساوياً لـ m ومنحفظاً مثله مثل مربع العزم الزاوي $J^2$ ذي القيمة الخاصة $j(j+1)$.

نحصل على العلاقة بين السبينين الكرويين بجعل r تتناهى إلى اللانهاية فيأخذ السبينوران $\phi$ و $\chi$ شكل موجات مستوية تعبر عن حركة إلكترون حر، رأينا العلاقة بينهما $(2.40)_\pm$ التي نكتبها على الشكل

$$\chi(k) = \frac{\pm|\vec{k}|\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\sigma}}{k^\circ + m}\phi(k)$$

نرمز لمتجهة الوحدة $\frac{\vec{r}}{r}$ بـ $\vec{n}$ ونكتب العلاقة الناتجة بين السبينورين الكرويين :

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma}\, \Omega_{j,\ell,m} = a\Omega_{j,\ell',m} \qquad (4.6)$$

حيث a ثابتة تعينها بسهولة مقارنة الطرفين من أجل $m = \frac{1}{2}$ و $\vec{n}$ في اتجاه المحور z. إن

$$Y_{\ell_m}(\theta = 0) = i^{\ell}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

و

$$a = (i)^{\ell'-\ell} \qquad (4.7)$$

## 2.4– الحركة في حقل مركزي

سنكتب المعادلتين (3.10) في هذه الحالة، $\vec{A} = 0$، على الشكل

$$(E - m - U)\phi(x) = (\vec{P} \cdot \vec{\sigma})\chi(x) \qquad (4.8)_1$$

$$(E + m - U)\chi(x) = (\vec{P} \cdot \vec{\sigma})\phi(x) \qquad (4.8)_2$$

حيث وضعنا E عوضاً عن $P^\circ$ والطاقة الكامنة الكهربائية $U = eA^\circ$.

نكتب $\phi$ و $\chi$ على الشكل

---

[5] لا نعين أمثال التوافقيات الكروية هنا، يمكن للقارئ الراغب في تعيينها العودة إلى كتاب لاندو–ليفشيتز Quantum Mechanics (المجلد الثالث) ص. 504 حل مسألة الفقرة 106.

$$\begin{cases}\phi(x) = f(r)\Omega_{j\ell m} \\ \chi(x) = cg(r)\Omega_{j\ell' m}\end{cases} \tag{4.8'}$$

نكتب الطرف الثاني في $(4.8)_1$ بدليل $\Omega_{j\ell m}$ مستعملين العلاقة (4.6) فنحصل على

$$(\vec{P}\cdot\vec{\sigma})\chi = (\vec{P}\cdot\vec{\sigma})\frac{(\vec{r}\cdot\vec{\sigma})}{r}g(r)\frac{c}{a}\Omega_{j,\ell,m} \tag{1}$$

والعودة إلى المتطابقة ((3.(4.34)) التي استعملناها في الفقرة 3 أعلاه، نجد

$$(\vec{P}\cdot\vec{\sigma})\chi = \frac{c}{a}\left\{(\vec{P}\cdot\vec{r}) + i\vec{\sigma}(\vec{P}\times\vec{r})\right\}\frac{g(r)}{r}\Omega_{j,\ell,m}$$

$$= \frac{c}{a}\left\{-i(\vec{\nabla}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}) - i\vec{\sigma}\cdot(\vec{r}\times\vec{P})\right\}\frac{g(r)}{r}\Omega_{j,\ell,m} \tag{2}$$

ومنه نظراً لكون $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$ ، $\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ و $\vec{\nabla}(ab) = a\vec{\nabla}b + b\vec{\nabla}a$

$$(\vec{P}\cdot\vec{\sigma})\chi = \frac{-ic}{a}\left(\frac{3g(r)}{r} + \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\nabla}g - \frac{g}{r} + \frac{g}{r}\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right)\Omega_{j,\ell,m} \tag{3}$$

لكن

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{L} = 2\vec{L}\cdot\vec{S} = J^2 - L^2 - S^2 = j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}$$

ونظراً لـ (4.3) فإن

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{L} = -1 + \varpi\left(j+\frac{1}{2}\right) \tag{4.3'}$$

نكتب إذاً مضروب $\Omega_{j\ell m}$ على الشكل

$$\frac{-ic}{a}\left(g' + \frac{2g}{r} + \frac{g}{r}\left(-1 + \varpi(j+\frac{1}{2})\right)\right) = \frac{-ic}{a}\left(g' + \frac{g}{r}(1-x)\right) \tag{4.9}$$

حيث $g'$ هو مشتق $g$ بالنسبة لـ $r$ و

$$x = -\varpi\left(j+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases}-\left(j+\frac{1}{2}\right) & \varpi = 1 \text{ من أجل } j = \ell + \frac{1}{2} \\ j + \frac{1}{2} & \varpi = -1 \text{ من أجل } j = \ell - \frac{1}{2}\end{cases} \tag{4.10}$$

نختار قيمة الثابتة $c$ بحيث يكون $-\frac{ic}{a} = -1$ أي

$$c = (-1)^{(1+\ell-\ell')/2} \tag{4.11}$$

وأخيراً

$$(\vec{P}\cdot\vec{\sigma})\chi = -\left(g' + \frac{g}{r}(1-x)\right)\Omega_{j\ell m}$$

نضع هذا المقدار في الطرف الثاني من $(4.8)_1$ فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$(E - m - U)f = -g' - \frac{1-x}{r}g \qquad (4.12)_1$$

نقوم بنفس العملية في $(4.8)_2$ فنحصل، آخذين بعين الاعتبار (4.6) للتعبير عن $\Omega_{j\ell m}$ بدليل $\Omega_{j\ell' m}$، على

$$(\vec{P}\cdot\vec{r})\phi = \frac{(\vec{P}\cdot\vec{\sigma})\frac{(\vec{r}\cdot\vec{\sigma})}{r}f(r)\frac{a}{c}}{\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{\sigma}}{r}\right)^2}\Omega_{j\ell' m}$$

مع فارقين، الأول أن $-i\frac{a}{c}$، المساوي للواحد، يساوي المخرج 1 ونحصل على معادلة مماثلة لـ $(4.12)_1$ يحل محل $-i\frac{c}{a}$ المساوي لناقص واحد، والفارق الثاني أن $\varpi$ من أجل $\ell$ هي $-\varpi$ من أجل $\ell'$ وبالتالي فإن $\chi$ في هذه الحالة تساوي لـ $-\chi$ المعرفة بـ (4.10). لدينا إذاً

$$(E + m - U)g = f' + \frac{1+x}{r}f \qquad (4.12)_2$$

لنلاحظ أن E و m والمقدار المتناسب مع $\frac{1}{r}$ تصبح مهملة في حال كمون مركزي مختلف عن الكمون الكولومبي $U(r) \sim r^{-n}$ ؛ $n \neq 1$ وتأخذ المعادلتان $(4.12)_{1,2}$ الشكلين المبسطين

$$g' - Uf = 0 \qquad (4.12)'_1$$

$$f' + Ug = 0 \qquad (4.12)'_2$$

نشتق هاتين المعادلتين مرة ثانية، نستبدل في المعادلة الأولى $f'$ بقيمتها في $(4.12)'_2$ ونهمل $U'$ المضروبة بـ f أمام $U^2$ ($r^{-n-1} << r^{-2n}$ من أجل $r \to 0$) فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بـ g، ونفعل الشيء نفسه في المعادلة الثانية؛ ونكون قد فككنا الارتباط بين f و g :

$$\begin{cases} g'' + U^2 g = 0 \\ f'' + U^2 f = 0 \end{cases} \qquad (4.13)$$

يمكننا أن نأخذ حلاً للمعادلة الأولى من الشكل $g = a\cos\left(\int U(r)dr + \delta\right)$ حيث a ثابتة؛ يجب أن يكون حل المعادلة الثانية من الشكل $f = a\sin\left(\int U(r)dr + \delta\right)$ لكي تتحقق المعادلتان $(4.12)'$ أيضاً. δ ثابتة إعتباطية لأننا لا نتطلب شيئاً من الدالتين الاهتزازيتين في جوار النقطة $r = 0$. إن عدم وجود أي شرط عندما $r \to 0$ يعني أن طيف f و g طيف متصل؛ وكونه متصلاً يشير إلى ابتعاد باقة الموجة بمرور الزمن عن أي منطقة في الفضاء[6]. هذا في حالة $|E| > m$. أما عندما تكون الطاقة أصغر من m فإنه

---

[6] نعلم طبعاً أن دالة موجة الطيف المتصل لا تنتمي إلى الفضاء الهيلبرتي. إلا أن ما نقوله هنا هو إن النظمة الكمومية تبتعد عن المنطقة المحددة من الفضاء التي توجد فيها حتى ولو كان احتمال الوجود متقاربا : $\int|\psi(r)|^2 dr$ يساوي مقداراً منتهياً، ذلك أن $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|\psi(r)|^2 dt = 0$ حيث تشير r إلى المنطقة التي توجد فيها النظمة والتكامل على زمن كبير بالقدر الكافي.

يستحيل على الجسيم الابتعاد عن المنطقة التي يوجد فيها، ولا يمكنه في هذه الحالة إلا الاتجاه نحو النقطة O، مبدأ الإحداثيات وموضع النواة – مركز الكمون : نقول عندئذ إن الجسيم يسقط على المركز؛ إن وجود حل يبقى فيه الجسيم مستقراً في حقل كمون متناسب مع $r^{-n}$، $n \neq 1$، مستحيل.

## 3.4- حل المعادلتين القطرتيين في حقل كمون كولومبي

لا تختلف طريقة إيجاد الحل عما فعلناه في دراسة ذرة الهدروجين : دراسة الحل المنتهي في جوار النقطة صفر المتناسب مع قوى r، والحل العام : كثير حدود مضروب بدالة أسية تضمن تناهيه نحو الصفر من أجل r كبيرة جداً وإيجاد عوامل كثير الحدود بطريقة بدائية أو باللجوء إلى الدالات فوق الهندسية المتدنية، وأخيراً أخذ العلاقة التي تربط الدالتين g و f ببعضهما بعين الاعتبار. سنكتب على وجه التحديد المعادلتين (4.12) على الشكل

$$(gr)' - \frac{x}{r}(gr) + (E - m - U)(fr) = 0 \qquad (4.14)_1$$

$$(fr)' + \frac{x}{r}(fr) - (E + m - U)(gr) = 0 \qquad (4.14)_2$$

ونكتب الكمون الكولومبي بدليل ثابتة البنية الدقيقة $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o} = \frac{1}{137}$ $(\hbar = c = 1)$، والعدد الذري Z. $U = -\frac{Z\alpha}{r}$. نهمل في جوار النقطة صفر $(r = 0)$ الحد $E \pm m$ أمام الكمون U لتأخذ المعادلتان الشكل

$$\begin{cases} (fr)' + \frac{x}{r}fr - \frac{Z\alpha}{r}gr = 0 \\ (gr)' - \frac{x}{r}gr + \frac{Z\alpha}{r}fr = 0 \end{cases} \qquad (4.15)$$

ونبحث عن حلين بذات القوة لـ r، نظراً لتشابه المعادلتين

$$gr = br^{\gamma} \quad , \quad fr = ar^{\gamma} \qquad (4.16)$$

ويعطينا استبدال هاتين القيمتين في المعادلتين السابقتين العلاقة بين الثابتتين a و b

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma - x}{-Z\alpha} = \frac{Z\alpha}{\gamma + x} \qquad (4.17)$$

وبالتالي القوة $\gamma$

$$\gamma^2 = x^2 - (Z\alpha)^2 \qquad (4.18)$$

ونميز حالتين

1) $(Z\alpha)^2 < x^2$، $\gamma$ عدد حقيقي، نأخذه موجباً للإبقاء على حل متقارب في جوار الصفر وتتحدد العلاقة بين f و g :

$$ar^{\gamma-1} = f = \frac{Z\alpha}{\gamma + x} g \quad , \quad \gamma = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2} \qquad (4.16)_1$$

2) $x^2 < (Z\alpha)^2$، $\gamma$ عدد تخيلي بحت ونحصل على الحلين الاهتزازيين في جوار النقطة صفر

$$f = \frac{a}{r} e^{\pm i|\gamma| Log r} \quad , \quad g = \frac{b}{r} e^{\pm i|\gamma| Log r} \qquad (4.16)_2$$

وهما حلان ينتميان إلى الطيف المتصل ويؤديان كما أشرنا أعلاه إلى السقوط على المركز وهما بالتالي غير مقبولين. هذا يعني أن الحقل الكولومبي غير مقبول في نظرية ديراك في حالة تحقق الشرط 2). إنه مقبول في حالة الشرط 1) وحده؛ وبما أن $x^2 \geq 1$ تعريفاً فإن الشرط يعني أن $Z < \frac{1}{\alpha} = 137$ : لا يمكن وجود ذرات عددها الذري $Z > 137$ في إطار نظرية ديراك. وهي ذرات لا وجود لها في الطبيعة، وإن كان هذا الوجود ممكن نظرياً على الأقل لأن الكمون على مسافة قصيرة جداً من النواة يختلف عن الكمون الكولومبي المقبول عندما ننظر إلى النواة كنقطة، ولكنه غير مقبول في حال النويات الكبيرة. هذا من أجل الحل في جوار الصفر أما في الحالة العامة فنضع $\rho = 2\sqrt{m^2 - E^2} \cdot r$ ونبحث كما قلنا عن حلين من الشكل

$$(4.19) \quad \begin{cases} f = \sqrt{m + E}\, e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} \left(a_o + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) & a_o \neq 0 \\ g = -\sqrt{m - E}\, e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} \left(b_o + b_1\rho + b_2\rho^2 + \ldots\right) & b_o \neq 0 \end{cases}$$

اللذين يسمحان لنا، عندما نستبدل بهذا النشر المقادير المقابلة في (4.14)، بالحصول على سلسلة من المعادلات تحدد أولاها قيمة $\gamma$ التي نحصل عليها بنفس الطريقة التي أوصلتنا إلى (4.18). تحدد لنا نظرية الدالات فوق الهندسية شرط توقف كثيري الحدود عند قوة منتهية. إن رتبة كثير الحدود $n_r$ هي العدد الكمومي القطري المعطى بالعلاقة

$$(4.20) \quad \gamma - \frac{Z\alpha E}{\sqrt{m^2 - E^2}} = -n_r \quad ; \quad n_r = \begin{cases} 0, 1, 2 \ldots & \text{من أجل } x < 0 \\ 1, 2, 3 \ldots & \text{من أجل } x > 0 \end{cases}$$

ولدينا، بأخذ $\gamma$ التي حصلنا عليها في (4.18)، صورة أخرى لهذه العلاقة تتيح لنا القيام بالتقريب

$$(4.21) \quad \frac{E}{m} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(\gamma + n_r)^2}\right]^{-1/2} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(\sqrt{x^2 - (Z\alpha)^2} + n_r\right)^2}\right]^{-1/2}$$

نريد إبداء ملاحظتين قبل البدء بحساب هذا التقريب، تخص الأولى الطيف المتصل حيث يصبح الجذر $\sqrt{m - E}$ تخيلياً، نأخذه على الشكل $-i\sqrt{|m - E|}$

$$(4.20)' \quad -n_r = \gamma - \frac{Z\alpha E}{-i\left(E^2 - m^2\right)^{1/2}} = \gamma - \frac{-i Z\alpha E}{|\vec{k}|}$$

وتخص الثانية تنظيم متجهة حالة ديراك $\int |\psi|^2 dr = 1$. إن الدالات التوافقية الكروية التي أخذناها منظمة ولذا فالتنظيم يقع على $f$ و $g$ فقط

$$\int_0^\infty \left(f^2 + g^2\right) r^2 dr = 1$$

وهو أمر ليس بالسهل لأنه يقتضي معرفة السلوك المقارب للدالات فوق الهندسية المتدنية بدليل الدالات $\Gamma$ سواء تعلق الأمر بالطيف المتصل أو المنفصل. لن نقوم بهذه الدراسة هنا ونحيل القارئ المهتم إلى المراجع[7].

## 4.4- البنية الدقيقة لمستويات طاقة ذرة الهدرجين

سنفترض كما فعلنا في دراسة ذرة الهدرجين اللانسبوية (وكما فعلنا في الميكانيك التقليدي في دراسة حركة الأرض حول الشمس) أن النواة ثابتة ونحسب بالتقريب الحد الثاني تحت القوة $-\frac{1}{2}$ الوارد في (4.21) ولنرمز له بـ $X$.

لدينا، بنشر $(1-u)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}u$ من أجل $u$ صغيرة، ثم بإهمال الحد بـ $(Z\alpha)^4$ عند أخذ المربع وأخيراً بنشر $\frac{1}{1-v} \simeq 1 + v$ من أجل $v$ صغيرة

$$X = \frac{(Z\alpha)^2}{\left(\sqrt{x^2 - (Z\alpha)^2} + n_r\right)^2} \simeq \frac{(Z\alpha)^2}{\left(|x|\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{x^2}\right) + n_r\right)^2}$$

$$\simeq \frac{(Z\alpha)^2}{|x| + n_r} \frac{1}{\left(|x| + n_r\right)\left(1 - \frac{(Z\alpha)^2}{|x|\left(|x| + n_r\right)}\right)} \simeq \frac{(Z\alpha)^2}{|x| + n_r}\left(\frac{1}{|x| + n_r} + \frac{(Z\alpha)^2}{|x|\left(|x| + n_r\right)^2}\right) \quad (1)$$

حيث يعني إهمال الحد بـ $(Z\alpha)^4$ عند أخذ المربع أننا أهملنا في حساب $X$ الحدود بـ $(Z\alpha)^6$. سنتابع إهمالنا لهذه الحدود في حساب مربع $X$ أعلاه ونكتبه على الشكل

$$X^2 \simeq \frac{(Z\alpha)^4}{\left(|x| + n_r\right)^4} \quad (2)$$

ونكتفي بنشر $(1+X)^{-1/2}$ في (4.21) بالحدود الثلاثة الأولى $1 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2$ لنحصل أخيراً على

$$\frac{E}{m} = 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2\left(|x| + n_r\right)^2}\left\{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(|x| + n_r\right)}\left[\frac{1}{|x|} - \frac{3}{4\left(|x| + n_r\right)}\right]\right\} \quad (4.22)$$

نرمز بـ $n$ مجموع العددين $|x|$ و $n_r$، الذي يأخذ القيم الصحيحة 1، 2، 3..

$$n = |x| + n_r = j + \frac{1}{2} + n_r \quad (4.23)$$

[7] انظر على وجه الخصوص Landau- Lifchitz الفقرتين 35، 36 من المجلد الرابع.

إن الحد الأول في حساب E في (4.22) بعد حد الطاقة الكتلوية هو $E_o = -m\dfrac{(Z\alpha)^2}{2n^2}$ وهو الحد الذي أعطتناه نظرية ذرة الهدرجين اللانسبوية ويسمح لنا بمقابلة n المعرفة في (4.23) بالعدد الكمومي الرئيسي. أما الحدان الباقيان بـ $(Z\alpha)^4$ فيقابلان التصحيح النسبوي الذي نكتبه آخذين بعين الاعتبار (4.10) و (4.23) على الشكل

$$\Delta E = -\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) \quad (4.22)'$$

لنعد إلى الهاميلتوني (3.39) الفاعل بالسبينور $\phi$ لإيجاد العناصر المنتجة لهذا التصحيح. لدينا هنا $\vec{A} = 0$ و

$$eA_o = -\frac{Z\alpha}{r}$$

والحقل الكهربائي

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A_o \quad ; \quad 4\pi Z\alpha\delta^3(r) = -e\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = +e\nabla^2 A_o \; [8]$$

وهكذا فالهاميلتوني هو انطلاقاً من (3.39) و (3.40) ومن العلاقتين السابقتين

$$\mathcal{H} = m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} - \frac{Z\alpha}{r} + \frac{Z\alpha\pi}{2m^2}\delta^3(r) + \frac{Z\alpha}{2m^2r^3}\vec{L}\cdot\vec{S} \quad (4.24)$$

نكتب معادلة شرودينغر اللانسبوية

$$H\psi = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi = E_o\psi$$

على الشكل

$$P^2\psi = 2m\left(E_o + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi \quad (4.25)$$

حيث يبقى في (4.24) بغض النظر عن حد الكتلة m ثلاثة حدود اضطراب، نحسب قيمها الوسطية مستعينين من أجل الاضطراب الأول (بـ $P^4$) بالعلاقة (4.25). لدينا

$$(4.26) \quad \langle P^4\rangle = 4m^2\left\langle\left(E_o + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2\right\rangle = 4m^2\left(E_o^2 + 2E_o\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle Z\alpha + (Z\alpha)^2\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle\right)$$

وتُحسب القيم الوسطية لقوى r $r^k$ حيث k موجبة أو سالبة انطلاقاً من التعريف

---

[8] رأينا أن قياس ديراك $\delta(r)$ يعين الشحنة النقطية المتمركزة في نقطة المبدأ، بحيث تصبح معادلة ماكسويل الأولى $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$ مساوية لـ $4\pi Z\alpha(r)$ في الوحدات التي استعملناها $\hbar = c = 1$ و $\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi}$ وهي علاقة متسقة مع $\nabla^2 A_o$ لأن نظرية التوزيعات ترينا أن $\nabla^2\frac{1}{r} = -(n-2)S^n\delta^n(r)$ في الفضاء $R^n$ حيث $S^n$ سطح الكرة ذات الشعاع 1، وفي $R^3$ سطح الكرة هو $4\pi$ : $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(r)$.

$$<r^k> = \int r^k R_{n\ell}^2(r)\, r^2 dr$$

حيث $R_{n\ell}$ الدالة القطرية – دالة فوق الهندسية المتدنية –، والنتيجة بالنسبة للقوى 1-، 2-، 3- هي

$$\begin{cases} <\frac{1}{r}> = \frac{mZ\alpha}{n^2} \\ <\frac{1}{r^2}> = \frac{(mZ\alpha)^2}{n^3\left(\ell + \frac{1}{2}\right)} \\ <\frac{1}{r^3}> = \frac{(mZ\alpha)^3}{n^3\ell\left(\ell + \frac{1}{2}\right)(\ell + 1)} \end{cases} \quad (4.27)$$

وهكذا فإن الاضطراب الأول هو

$$-\frac{<P^4>}{8m^3} = -\frac{E_o^2}{2m}\left\{-3 + \frac{4n}{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}\right\} \quad (4.28)$$

والاضطراب الأخير بـ $\frac{1}{r^3}$ مع $2\vec{L}\cdot\vec{S} = -1 + \varpi\left(j + \frac{1}{2}\right)$ نظراً لـ '(4.3). أما الاضطراب الثاني، الثابتة $\frac{Z\alpha\pi}{2m^2}$ مضروبة بـ $<\delta^3(r)>$، فلا يختلف عن الصفر إلا من أجل $\psi(0)$ ونعلم أن

$$\begin{cases} \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z\alpha m}{n}\right)^{3/2} & \text{من أجل } \ell = 0 \\ = 0 & \text{من أجل } \ell \neq 0 \end{cases}$$

وهكذا فإن تصحيح الطاقة هو مجموع القيم الوسطية لهذه المؤثرات الثلاثة، بكتابة $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ من أجل $\varpi = \pm 1$، هو

$$\Delta E = -\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^3}\left\{\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right\} \quad (4.29)$$

وهي العلاقة التي حصلنا عليها في '(4.22) والتي تأخذ بعين الاعتبار تفاعل العزم المغنطيسي الناتج عن السبين مع العزم المغنطيسي الناتج عن حركة الإلكترون – عن عزمه المداري –، ويطلق على $\Delta E$ هذه اسم البنية الدقيقة.

ترفع هذه الطاقة التدني جزئياً لاحتوائها على حد بالعزم الزاوي الكلي، فهي تفرق على سبيل المثال من أجل $n = 2$ و $\ell = 1$ بين $^2P_{1/2}$ و $^2P_{3/2}$. ولكنها لا تزيل التدني الناتج عن عدم تعيين اتجاه السبين

$\pm\frac{1}{2}$ والناتج بالتالي عن $\ell$، $\ell = j \pm \frac{1}{2}$ إلا من أجل القيمة العظمى لـ j من أجل n معطاة. إن $j_{max} = \ell_{max} + \frac{1}{2} = n - 1 + \frac{1}{2}$ ويستحيل في هذه الحالة أن يأخذ العزم المداري $\ell$ القيمة $j + \frac{1}{2}$. لكن هذا التقريب لا يفرق بين حالتين لهما نفس العدد الكمومي الرئيسي n ونفس العزم الزاوي الكلي j : لـ $^2s_{1/2}$ و $^2p_{1/2}$ ذات القيمتين n و j وبالتالي نفس الفرق النسبوي بالطاقة حسب (4.29).

لدينا بصورة عامة الجدول التالي حيث استعملنا الرموز الطيفية التي استعملناها في الفصل الثالث

| $\ell$ | j | n | |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $^1s_{1/2}$ |
| $j - \frac{1}{2} = 0$<br>$j + \frac{1}{2} = 1$<br>1 | $\frac{1}{2}$<br>$\frac{3}{2}$ | 2 | $^2p_{3/2}$ $\underbrace{^2p_{1/2}\ ^2s_{1/2}}$ |
| $j - \frac{1}{2} = 0$<br>$j + \frac{1}{2} = 1$<br>$j - \frac{1}{2} = 1$<br>$j + \frac{1}{2} = 2$<br>2 | $\frac{1}{2}$<br>$\frac{3}{2}$<br>$\frac{5}{2}$ | 3 | $^3d_{5/2}$ $\underbrace{^3d_{3/2}\ ^3p_{3/2}}$ $\underbrace{^3p_{1/2}\ ^3s_{1/2}}$ |

حيث أشرنا بتفريعة إلى المستويات التي لم يُزل تدنيها حسب (4.29). وهو أمر مخالف للواقع إذ أظهرت القياسات التي قام بها لامب وروذرفورد Lamb, Rutherford عام 1947 وجود فرق بالطاقة بين المستويين $^2s_{1/2}$ و $^2p_{1/2}$ يعرف باسم انزياح لامب، يزيل التدني الذي لا يلحظه التقريب (4.29). ويبين في ذات الوقت قصور نظرية ديراك. لابد إذاً كما ألمحنا إلى ذلك من تكميم الحقل الكهرطيسي، من التعامل مع مركبات الحقل كمؤثرات، أي اللجوء إلى نظرية الحقول المكممة وعلى وجه التخصيص إلى الإلكتروديناميك الكمومية. تبين هذه النظرية أن انزياح لامب ناتج عن ترجحات الحقل الكهرطيسي: استقطاب الخواء وإعادة تنظيم كتلة الإلكترون والعزم غير النظامي للإلكترون – الفرق g - 2 – وتعطي الفرق بين $^2s_{1/2}$ - $^2p_{1/2}$ المساوي (بالتواتر $\frac{E}{\hbar}$) 1057 مليون دورة في الثانية.

# ملحق الفصل التاسع

نعيد في مطلع هذا المحلق نسخ ملحقي الفصلين الخامس والسابع من كتاب الميكانيك التقليدي والنسبوي I لكي يبقى الموضوع متكاملاً.

## ملحق الفصل الخامس من المجلد الأول

**نظرية الزمر**

الزمرة هي الزوج المؤلف من مجموعة $G$ ومن قانون تركيب $(x, y) \to xy$ على عناصر $G$ يحقق الشروط التالية

a) إنه تجميعي $(xy)z = x(yz)$ أياً كانت العناصر $x, y, z \in G$

b) يوجد عنصر حيادي نرمز له بـ $e$ يحقق $xe = ex = x$ أياً كان العنصر $x \in G$

c) يوجد مقلوب لكل عنصر في $G$ : يقابل كل عنصر $x$ عنصر آخر نرمز بـ $x^{-1}$ يحقق العلاقة $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

**مثال :** لتكن $X$ مجموعة ما، نسمي تبديلاً أي تطبيق تقابلي (bijectif) على $X$ (لا يقابل أي عنصر من $X$ في التبديل إلا عنصراً واحداً فقط). نرمز لمجموعة التبديلات بـ $\zeta(X)$، وليكن $f$ و $g$ عنصرين من $\zeta(X)$. إن $f \circ g$، حيث $\circ$ ترمز إلى التطبيق المركب $f(g(x))$، هو عنصر من $\zeta(X)$. التطبيق المركب تجميعي والتطبيق الحيادي هو $I(x) = x$؛ ولكل تطبيق تطبيق عكسي، لأننا فرضنا أنه تقابلي، نرمز له بـ $f^{-1}$ : $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I(x)$. نسمي الزمرة $\zeta(X)$ زمرة التحولات الهندسية لعناصر (نقاط) $X$. كما تسمى أيضاً بالزمرة المتناظرة. وإذا كانت عناصر $X$ معدودة، عدد عناصرها $n$، فالزمرة هي زمرة التبديلات لـ $n$ عدداً.

**التشاكل (Homomorphisme)**

نسمي أي تطبيق $f$ لزمرة $G$ في زمرة أخرى $G'$ يحقق العلاقة

$$f(xy) = f(x)\,f(y)$$

تشاكلاً (رمزنا هنا بنفس الرمز لقانوني التركيب في $G$ و $G'$)

لدينا من التعريف

$$f(x) = f(xe) = f(x)\,f(e)$$

وبالتالي

$$f(e) = e'$$

كذلك

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$

ذلك أن

$$f(e) = f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = e'$$

من جهة ولأن

$$f(xx^{-1}) = f(x)\, f(x^{-1}) = f(x^{-1})\, f(x)$$

أي أن $f(x^{-1})$ هي مقلوب $f(x)$.

**مثال :** نرمز بـ $R_+$ إلى زمرة الأعداد الحقيقية، حيث قانون التركيب هو الجمع والعنصر الحيادي 0، وبـ $R\backslash 0$ إلى زمرة الأعداد الحقيقية حيث قانون التركيب هو الضرب والعنصر الحيادي 1. نعرف التشاكل بين $R_+$ و $R\backslash 0$ بالعلاقة

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)$$
$$f(0) = 1$$

ذلك أن

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x)\, f(-x) = f(x)\, f^{-1}(x) = 1$$

فإذا فرضنا أن f دالة متصلة ولها مشتق (من الصف $C^1$) وأخذنا مشتق العلاقة الأولى بالنسبة للمتغير y وجعلنا $y = 0$ فإننا نحصل على الدالة الأسية $f'(x) = f(x) f'(0)$

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{حيث} \quad f'(0) = a$$

### التمثيل الخطي (Representation)

نسمي التشاكل $\varphi$ بين زمرة ما G والزمرة $\zeta(X)$ تمثيلاً لـ G. ونقول إنه إنجاز (réalisation) لـ G إذا كان التشاكل متبايناً (injectif)؛ إنه تشاكل تقابلي – يسميه البعض تماكلاً – (isomorphisme) بين G وصورة G في $\zeta(X)$ : $\varphi(G) \leftrightarrow G$.

لنفرض الآن أن لـ X بنية فضاء متجهي (خطي) (vectoriel/linear)، في هذه الحالة $\zeta(X)$ هي مجموعة التطبيقات الخطية القلوبة لـ X في X (أي أنها زمرة المؤثرات الخطية القلوبة لـ X) ونرمز لها بـ $GL(X)$. نقول عن التشاكل بين G و $GL(X)$ إنه تمثيل خطي لـ G في الفضاء المتجهي X.

$GL(X)$ هي مجموعة المصفوفات المربعة $(s \times s)$ حيث s عدد أبعاد الفضاء المتجهي X، والتي يختلف معينها عن الصفر، حتى يكون لها مقلوب : التطبيق الحيادي I هو المصفوفة القطرية $a_{ii} = 1$ و $a_{ij} = 0$ من أجل $i \neq j$.

إن $X$ في كل الفصل الخامس هو الفضاء الإقليدي $R^3$ و $GL(R^3)$ مجموعة المصفوفات القلوبة $(3\times3)$.

### ثنوي الفضاء المتجهي (dual) الفضاءات الإقليدية وشبه الإقليدية

يمكن كتابة أي تطبيق خطي للفضاء المتجهي $X$ في حقل الأعداد السلمية $K$، $\phi: X \to K$ على الشكل

$$\phi(x) = \phi(x^j e_j) = x^j \phi(e_j) \quad (1)$$

حيث $x^j$ هي مركبات المتجهة $x \in X$ في متجهات القاعدة $e_1 \dots e_s$ و $s$ هي عدد أبعاد الفضاء $X$؛ ضمرنا أشارة الجمع $\sum_{j=1}^{s}$ متعارفين على أن وجود نفس الدليل $j$ في الأعلى والأسفل يعني الجمع على كل العناصر $j \in [1, s]$. تشكل مجموعة هذه التطبيقات الخطية لـ $X$ في $K$ فضاءً متجهياً له نفس أبعاد $X$ نسميه الفضاء الثنوي لـ $X$ أو ثنوي $X$ ونرمز له بـ$X'$. نرمز لمتجهات القاعدة في $X'$ بالرمز $\varepsilon^1 \dots \varepsilon^s$، وهي تطبيقات خطية لـ $X$ في $K$، ونُعرفها بالعلاقة $\varepsilon^j(e_i) = \delta^j_i$ ونكتب $\phi$ على الشكل $\phi_i \varepsilon^i$، حيث $\phi_i$ هي مركبات المتجهة $\phi \in X'$ في القاعدة $\varepsilon$. وتصبح العلاقة (1) على الشكل

$$\phi(x) = \phi(x^j e_j) = x^j \phi(e_j) = x^j \phi_i \varepsilon^i(e_j) = x^j \phi_i \delta^i_j = x^i \phi_i = \langle x, \phi \rangle \quad (2)$$

(الجمع على كل من الدليلين $i$ و $j$ لوجود كليهما في الأعلى والأسفل).

أي أننا كتبنا التطبيق الخطي $\phi(x)$ لـ $X$ في $K$ على شكل مجموع جداء مركبات $x$ بمركبات $\phi$. ونسمي التطبيق الخطي جداءاً داخلياً. إن $X$ و $X'$ متشاكلان تقابلياً ولذا فمن الممكن تحويل أي تطبيق لـ $X \times X \to K$، كالجداء السلمي لمتجهتين $(x, y)$ مثلاً، إلى تطبيق لـ $X \times X' \to K$، أي إلى جداء داخلي بأن نقابل إحدى المتجهتين $y \in X$ بـ $y' \in X'$ وذلك بتطبيق مؤثر خطي $G$ عليها $Gy = y'$، $G: X \to X'$. نكتب مركبات $y'$ في القاعدة $\varepsilon$ على الشكل $y_i$ بحيث يكتب الجداء

$$(x, y) = \langle x, Gy \rangle = x^i y_i \quad (3)$$

يسمى المؤثر $G$ عادة بالتانسور المتري، وهي مصفوفة مربعة $s \times s$ كل عناصرها معدومة ماعدا العناصر القطرية التي تساوي $\pm1$. فإذا كانت كلها مساوية للواحد فالفضاء أقليدي لأن طول أي متجهة $x$ فيه، وهو $(x, x) = x^i x_i = \sum_{i=1}^{s} x^{i^2}$، موجب دوماً. وإذا كانت بعض العناصر، $m$ عنصراً مثلاً، تساوي لـ $(-1)$ فطول المتجهة $(x, x) = x^i x_i = \sum_{i=1}^{s-m} x^{i^2} - \sum_{j=s-m+1}^{s} x^{j^2}$ موجب أو سالب وقد يساوي صفراً والفضاء شبه إقليدي توقيعه $m$. إن فضاء نظرية النسبية الخاصة، كما سنرى في الفصل السابع، فضاء شبه إقليدي بأربعة أبعاد توقيعه 1.

يمكن التحول من متجهة $x$ إلى متجهة $x'$، $x, x' \in X$، بتطبيق مؤثر ما $A \in GL(X)$ :

$$x' = Ax$$

أي

$x'^j = A^j{}_i\, x^i$ الجمع على كل الـ i و j ثابتة أي أننا نجمع على كل عناصر الصف j (j ترمز للصف و i للعمود).

يمكن في حالة وجود تطبيق خطي $\phi \in X'$ إجراء التحول على $\phi$ عوضاً عن إجرائه على x للحصول على نفس النتيجة، أي أننا نريد أن يتحقق

$$\phi(x') = \phi'(x)$$

أي

$$\phi_j x'^j = A^j{}_i \phi_j x^i = \phi'_i x^i$$

أو

$$\phi'_i = A^j{}_i \phi_j$$ (هنا العمود i هو الثابت)

إذا أردنا أن يكون الجمع على كل عناصر الصف فيجب أخذ منقول المصفوفة ونرمز لها بـ $\tilde{A}$

$$\phi'_i = \tilde{A}_i{}^j \phi_j$$

$$\phi' = \tilde{A}\,\phi \quad (4)$$

## زمر التناظر

ليكن لدينا المؤثر $D_g \in GL(X)$ ممثلاً خطياً للزمرة G : يقابل كل عنصر $g \in G$ المصفوفة $s \times s$ : $D_g \in GL(X)$. لننظر كيف يتحول الجداء السلمي لمتجهتين من X نتيجة تطبيق هذا المؤثر. لدينا من (3)

$$(D_g x,\ D_g y) = \langle D_g x,\ G D_g y\rangle$$

ومن (4)

$$= \langle x,\ \tilde{D}_g G D_g y\rangle$$

فإذا أردنا أن يبقى الجداء السلمي ثابتاً، منحفظاً بالزمرة G، أي منحفظاً بالتمثيل الخطي للزمرة في X، أي مساوياً لـ (x, y)

$$(D_g x,\ D_g y) = \langle x,\ Gy\rangle$$

فيجب أن يتحقق الشرط

$$\langle x,\ \tilde{D}_g G D_g y\rangle = \langle x,\ Gy\rangle$$

أي

$$\tilde{D}_g G D_g = G \quad (5)$$

تصبح هذه العلاقة في الفضاء الإقليدي حيث التانسور المتري $G = I$ على الشكل $\tilde{D}_g D_g = I$ أي $D_g^{-1} = \tilde{D}_g$، وهو تعريف الزمرة العمودية؛ والزمرة هي زمرة الدورانات إذا اشترطنا أن يكون معينها مساوياً للواحد، وهي زمرة لورنتس في حالة الفضاء غير الإقليدي، فضاء مينكوفسكي ذي الأربعة أبعاد والتوقيع 1.

نقول عن زمرة ما إنها زمرة تناظر إذا نتج عن تمثيلها الخطي انحفاظ مقادير معينة. وهكذا فزمرة الدورانات هي زمرة تناظر في الفضاء الإقليدي الفيزيائي (ثلاثة أبعاد) وزمرة لورانتس زمرة تناظر في فضاء النسبية الخاصة شبه الإقليدي ذي الأربعة أبعاد (ثلاثة أبعاد مكانية وبعد زماني).

يمكن، على العكس أحياناً، الانطلاق من المقادير المنحفظة، غير المتغيرة، والبحث عن زمرة التناظر التي تحقق ذلك.

## زمرة التناظر في الفضاء التآلفي (Affine)

لنذكر أننا نسمي فضاءً تآلفياً الفضاء المكون من نقاط ومتجهات، على وجه التحديد إنه جداء مجموعة غير خالية من النقاط، P، في فضاء متجهي على K، E، أبعاده منتهية وتطبيق $E \times P \to P$ نرمز له بـ $(\vec{h}, p) \to \vec{h} + p$ يحقق الموضوعتين التاليتين

i) $\quad (\vec{h} + \vec{k}) + p = \vec{h} + (\vec{k} + p)$ ؛ $\vec{0} + p = p \quad (6)$، من أجل أي متجهتين $\vec{h}, \vec{k} \in E$ وأي نقطة $p \in P$.

وضعنا السهم على عناصر E لتمييزها عن النقاط التي نرمز لها بالحروف العادية.

ii) يوجد من أجل أي نقطتين $(a, b) \in P$ متجهة وحيدة $\vec{h} \in E$ تحقق العلاقة

$$\vec{h} + a = b \quad (7)$$

تعرف هذه العلاقة الانسحابات في P وتبين أن أبعاد P تساوي أبعاد E كما أنها تسمح لنا بمطابقة P مع E بواسطة التطبيق التقابلي (7). نكتب المتجهة $\vec{h}$ على الشكل

$$\vec{h} = b - a = \overline{ab} \quad (8)$$

ونقول إن a هو مبدأ المتجهة $\vec{h}$ و b نهايتها.

نستخلص بسهولة علاقة شال $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = (b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$. إنها القضية 1 في الفصل الثاني.

إن الفضاء الإقليدي $R^n$ فضاء تآلفي عندما لا نأخذ بعين الاعتبار بنيته المترية: المسافة بين النقاط وطول المتجهات.

تصبح هذه العلاقة في الفضاء الإقليدي حيث التانسور المتري $G = I$ على الشكل $\tilde{D}_g D_g = I$ أي $D_g^{-1} = \tilde{D}_g$، وهو تعريف الزمرة العمودية؛ والزمرة هي زمرة الدورانات إذا اشترطنا أن يكون معينها مساوياً للواحد، وهي زمرة لورنتس في حالة الفضاء غير الإقليدي، فضاء مينكوفسكي ذي الأربعة أبعاد والتوقيع 1.

نقول عن زمرة ما إنها زمرة تناظر إذا نتج عن تمثيلها الخطي انحفاظ مقادير معينة. وهكذا فزمرة الدورانات هي زمرة تناظر في الفضاء الإقليدي الفيزيائي (ثلاثة أبعاد) وزمرة لورانتس زمرة تناظر في فضاء النسبية الخاصة شبه الإقليدي ذي الأربعة أبعاد (ثلاثة أبعاد مكانية وبعد زماني).

يمكن، على العكس أحياناً، الانطلاق من المقادير المنحفظة، غير المتغيرة، والبحث عن زمرة التناظر التي تحقق ذلك.

## زمرة التناظر في الفضاء التآلفي (Affine)

لنذكر أننا نسمي فضاءً تآلفياً الفضاء المكون من نقاط ومتجهات، على وجه التحديد إنه جداء مجموعة غير خالية من النقاط، P، في فضاء متجهي على K، E، أبعاده منتهية وتطبيق $E \times P \to P$ نرمز له بـ $(\vec{h}, p) \to \vec{h} + p$ يحقق الموضوعتين التاليتين

i) $(\vec{h} + \vec{k}) + p = \vec{h} + (\vec{k} + p)$ ؛ $\vec{0} + p = p$ (6)، من أجل أي متجهتين $\vec{h}, \vec{k} \in E$ وأي نقطة $p \in P$.

وضعنا السهم على عناصر E لتمييزها عن النقاط التي نرمز لها بالحروف العادية.

ii) يوجد من أجل أي نقطتين $(a, b) \in P$ متجهة وحيدة $\vec{h} \in E$ تحقق العلاقة

$$\vec{h} + a = b \quad (7)$$

تعرف هذه العلاقة الانسحابات في P وتبين أن أبعاد P تساوي أبعاد E كما أنها تسمح لنا بمطابقة P مع E بواسطة التطبيق التقابلي (7). نكتب المتجهة $\vec{h}$ على الشكل

$$\vec{h} = b - a = \overline{ab} \quad (8)$$

ونقول إن a هو مبدأ المتجهة $\vec{h}$ و b نهايتها.

نستخلص بسهولة علاقة شال $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = (b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$. إنها القضية 1 في الفصل الثاني.

إن الفضاء الإقليدي $R^n$ فضاء تآلفي عندما لا نأخذ بعين الاعتبار بنيته المترية : المسافة بين النقاط وطول المتجهات.

ليكن لدينا $r$ نقطة في $P$ $p_1, p_2 \dots p_r$ و $r$ عدداً $w_1, w_2 \dots w_r$ تخضع للشرط التالي $\sum_{i=1}^{r} w_i = 1$.

ولتكن $p_o$ نقطة لا على التعيين في $P$. نسمي مركز ثقل النقاط $p_1, p_2 \dots p_r$ ذات الكتل $w_1, w_2 \dots w_r$ النقطة $q$ المعرفة بالعلاقة

$$q = \sum_i (p_i - p_0)w_i + p_0 \quad (9)$$

ونكتب اختصاراً $q = \sum_i p_i \cdot w_i$.

نرى بسهولة أن مركز الثقل $q$ لا يتوقف على اختيار النقطة $p_o$، مبدأ المتجهات $p_i - p_o = \overline{p_o p_i}$. وهذا ما رأينا في ("(1.23).2).

نقول عن تطبيق $f$ لـ $P$ في $P$ يحقق العلاقة

$$f(q) = f(\sum_{i=1}^{r} p_i \cdot w_i) = \sum_{i=1}^{r} f(p_i) \cdot w_i = q' \quad (10)$$

إنه تطبيق تآلفي. إنه التطبيق الذي يقابل مركز ثقل النقاط $p_i$ بمركز ثقل النقاط $p_i' = f(p_i)$. وكل انسحاب تطبيق تآلفي لأننا رأينا أن الانسحاب $p_o' - p_o$ لا يغير مركز الثقل.

يبرهن، عندما نختار مبدأ في الفضاء التآلفي، أن كل تطبيق تآلفي هو تطبيق خطي $A : E \to E$، متبوع بانسحاب $\bar{a}$. نرمز لهذا التطبيق بـ $(A, \bar{a})$ أي أن

$$(A, \bar{a})\bar{h} = A\bar{h} + \bar{a} \quad (11)$$

تشكل هذه التطبيقات زمرة نسميها الزمرة التآلفية، قانون الضرب فيها هو

$$(A', \bar{a}') \circ (A, \bar{a}) = (A'A, A'\bar{a} + \bar{a}') \quad (12)$$

ومقلوب العنصر $(A, \bar{a})$ هو

$$(A^{-1}, -A^{-1}\bar{a}) \quad (13)$$

ذلك أن

$$(A^{-1}, -A^{-1}\bar{a})(A, \bar{a}) = (A^{-1}A, A^{-1}\bar{a} - A^{-1}\bar{a}) = (I, \bar{0})$$

نقول عن شكلين $X$ و $X'$، عن مجموعتين جزئيتين من نقط $P$، إنهما متناظران إذا وجد عنصر من الزمرة التآلفية يحول نقاط $X$ إلى نقاط $X'$. ونُعرف الهندسة التآلفية بأنها دراسة التناظر (التكافؤ) بفعل عناصر الزمرة التآلفية على المجموعات الجزئية في $P$.

يمكن على سبيل المثال، القول إن كل المثلثات متكافئة لأنه من الممكن إيجاد تطبيق تآلفي يحول نقاط المثلث الأول إلى نقاط المثلث الثاني. وهكذا فكل المثلثات متكافئة مع المثلث متساوي الأضلاع؛ مركز ثقل هذا المثلث هو نقطة تلاقي منصفاته وبما أن التطبيق التآلفي يحفظ مركز الثقل فإن منصفات المثلث، أياً كان تتلاقى في نقطة واحدة.

ليكن لدينا $r$ نقطة في $P$ $p_1, p_2 \dots p_r$ و $r$ عدداً $w_1, w_2 \dots w_r$ تخضع للشرط التالي $\sum_{i=1}^{r} w_i = 1$.

ولتكن $p_o$ نقطة لا على التعيين في $P$. نسمي مركز ثقل النقاط $p_1, p_2 \dots p_r$ ذات الكتل $w_1, w_2 \dots w_r$ النقطة $q$ المعرفة بالعلاقة

$$q = \sum_i (p_i - p_0)w_i + p_0 \quad (9)$$

ونكتب اختصاراً $q = \sum_i p_i \cdot w_i$.

نرى بسهولة أن مركز الثقل $q$ لا يتوقف على اختيار النقطة $p_o$، مبدأ المتجهات $\overline{p_o p_i} = p_i - p_o$. وهذا ما رأينا في ("(1.23)،2).

نقول عن تطبيق $f$ لـ $P$ في $P$ يحقق العلاقة

$$f(q) = f(\sum_{i=1}^{r} p_i \cdot w_i) = \sum_{i=1}^{r} f(p_i) \cdot w_i = q' \quad (10)$$

إنه تطبيق تآلفي. إنه التطبيق الذي يقابل مركز ثقل النقاط $p_i$ بمركز ثقل النقاط $(p_i' = f(p_i)$. وكل انسحاب تطبيق تآلفي لأننا رأينا أن الانسحاب $p_o' - p_o$ لا يغير مركز الثقل.

يبرهن، عندما نختار مبدأ في الفضاء التآلفي، أن كل تطبيق تآلفي هو تطبيق خطي $A : E \rightarrow E$، متبوع بانسحاب $\bar{a}$. نرمز لهذا التطبيق بـ $(A, \bar{a})$ أي أن

$$(A, \bar{a})\bar{h} = A\bar{h} + \bar{a} \quad (11)$$

تشكل هذه التطبيقات زمرة نسميها الزمرة التآلفية، قانون الضرب فيها هو

$$(A', \bar{a}') \circ (A, \bar{a}) = (A'A, A'\bar{a} + \bar{a}') \quad (12)$$

ومقلوب العنصر $(A, \bar{a})$ هو

$$(A^{-1}, -A^{-1}\bar{a}) \quad (13)$$

ذلك أن

$$(A^{-1}, -A^{-1}\bar{a})(A, \bar{a}) = (A^{-1}A, A^{-1}\bar{a} - A^{-1}\bar{a}) = (I, \bar{0})$$

نقول عن شكلين $X$ و $X'$، عن مجموعتين جزئيتين من نقط $P$، إنهما متناظران إذا وجد عنصر من الزمرة التآلفية يحول نقاط $X$ إلى نقاط $X'$. ونُعرف الهندسة التآلفية بأنها دراسة التناظر (التكافؤ) بفعل عناصر الزمرة التآلفية على المجموعات الجزئية في $P$.

يمكن على سبيل المثال، القول إن كل المثلثات متكافئة لأنه من الممكن إيجاد تطبيق تآلفي يحول نقاط المثلث الأول إلى نقاط المثلث الثاني. وهكذا فكل المثلثات متكافئة مع المثلث متساوي الأضلاع؛ مركز ثقل هذا المثلث هو نقطة تلاقي منصفاته وبما أن التطبيق التآلفي يحفظ مركز الثقل فإن منصفات المثلث، أياً كان تتلاقى في نقطة واحدة.

إن ما عرضناه هنا لا يعدو كونه تطبيقاً لما قاله فليكس كلاين Felix Klein في خطابه الشهير، الذي أصبح يعرف ببرنامج إرلانكن (ERLANGEN)، عام 1872 : "لتتجرد الآن عن الشكل المحسوس لأنه غير ذي أهمية من وجهة النظر الرياضية لكي لا نرى الفضاء إلا كعدد ما من الكائنات متعددة الأبعاد... ليكن لدينا هذا العدد من الكائنات (لنقل مجموعة من النقاط في فضاء أبعاده s كما في مثلينا) وزمرة تحولات له (الممثلة بمصفوفة هنا)؛ لندرس نظرية المنحفظات بالنسبة لهذه الزمرة".

## زمرة لي Lie

نقول عن زمرة G إنها زمرة طوبولوجية عندما يكون التطبيقان $(g,h) \to gh$ لـ $G \times G$ في G و $g \to g^{-1}$ لـ G في G تطبيقين متصلين. رأينا أن عناصر الزمرة $GL(n,r)$ مثلاً تكتب على شكل مصفوفة بعدد ما من الوسطاء، بمتجهة a مثلاً تنتمي إلى $R^m$ $(m \le n^2)$. لتكن a المتجهة التي تعين عنصر الزمرة g و b المتجهة التي تعين عنصر الزمرة h. يجب إذاً أن يكون التطبيق الذي يعرف gh متصلاً $\phi(a,b)$، نرمز لهذا التطبيق بـ $a, b \xrightarrow{\phi} (ab)$ وكذلك التطبيق f الذي يعرف $a^{-1}$ ونرمز له بـ $a \xrightarrow{f} f(a)$ $(a^{-1})$. نقول عن الزمرة إنها زمرة لي إذا كانت الدالتان $\phi$ و f من الصنف $C^{\infty}$: قابلتين للتفاضل إلى اللانهاية.

رأينا أن عنصراً ما من زمرة الدوران في الفضاء الإقليدي العادي $GL(R^3)$، على سبيل المثال، يعين بثلاثة وسطاء فقط هي زوايا أولر التي تشكل بواسطتها متجهة في $R^3$ هي مساقط $\vec{\omega}$ على المحاور الثلاثة : $m = 3$ بينما تتعين المصفوفة بـ $m^2 = 9$.

## الإحداثيات القانونية

يمكن كتابة أي عنصر A من زمرة لي في جوار العنصر الواحدي $e = I$ على شكل دالة أسية وذلك بجعل A تابعاً للوسيط t وكتابته على الشكل

$$A(t) = I + tX + \frac{t^2}{2!} + \ldots = e^{tX} \quad (14)$$

لدينا طبعاً

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = X \quad (15)$$

نسمي المصفوفة X اللوغاريتم النيبري لـ A : $X = LnA$ ، عناصرها هي $\left.\frac{da^i_j}{dt}\right|_{t=0}$ حيث $a^i_j$ عناصر المصفوفة A. يمكن التعبير عن خواص A بعلاقات يحققها X فعندما يكون معين A مساوياً للواحد فإن هذا المعين ونرمز له بـ det من أجل $t = 0$

$$\frac{d}{dt}(\det A)\Big|_{t=0} = TrX = 0$$

حيث $TrX$ تعني أثر المصفوفة : مجموع عناصرها القطرية. ذلك أن $\det A$ الثابت يساوي في جوار $I$

$$\det A(t) = \det(I + tX) = \det I + tTrX + 0(t^2)$$

ونقصد بـ $0(t^2)$ المقادير المتناهية في الصغر بـ $t^2$.

أما خاصة العمودية $\tilde{A} = A^{-1}$ فتعني أن $A^{-1} = e^{-tX}$ تساوي في جوار $I$

$A^{-1} = I - tX = I + t\tilde{X}$ لأن $\tilde{A} = e^{t\tilde{X}}$ حسب العلاقة (14)

و $$\tilde{X} = -X \quad (16)$$

وتصبح خاصة العمودية في الفضاء غير الإقليدي $\tilde{A}GA = G$ في جوار $I$ على الشكل

$$(I + t\tilde{X})G(I + tX) = G$$

أو بإهمال ما هو من الدرجة الثانية بـ $t^2$

$$\tilde{X}G = -GX \quad (16)'$$

نلاحظ أن التطبيق الأسي $X \to e^{tX} = A$ ليس تقابلياً بالضرورة من أجل كل عناصر الزمرة. نقول عن زمرة لي $G$ إنها أسية إذا أمكن كتابة كل عناصر الزمرة على الشكل الأسي (14).

**الزمرة الجزئية بوسيط واحد**

نقول عن عناصر من زمرة ما $G$ إنها تشكل زمرة جزئية بوسيط واحد $t$ ينتمي إلى المجال $]-\alpha, +\alpha[$ إذا وجد تشاكل بين الزمرة الجمعية لـ $R$ وعناصر $G$ أي

$$\left.\begin{aligned} g(t_1 + t_2) &= g(t_1)g(t_2) \\ g(0) &= e = (I) \\ g(-t) &= g^{-1}(t) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

من أجل $t \in ]-\alpha, \alpha[$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي صغير بما فيه الكفاية.

رأينا أن الدورانات في مستو حول محور ما تحقق هذه الخاصة وأنها تبادلية

$$g(t_1)g(t_2) = g(t_1 + t_2) = g(t_2 + t_1) = g(t_2)g(t_1)$$

يمكن كتابة عناصر الزمرة الجزئية بوسيط واحد على شكل أسي. ذلك أن اشتقاق العلاقة التالية بالنسبة لـ $t_1$

$$g(T) = g(t + t_1) = g(t)g(t_1)$$

يعطينا

$$\frac{dg(T)}{dT}\,\frac{dT}{dt_1} = g(t)\frac{dg(t_1)}{dt_1}$$

وبجعل $t_1 = 0$ نحصل على

$$\frac{dg(t)}{dt} = g(t)g'(0)$$

حيث استعملنا الخاصة الأولى في (17) وتعريف المشتق.

$$\frac{dg(t)}{g(t)} = g'(0)dt$$

ومنه

$$g(t) = e^{tg'(0)} = e^{tX} \quad (18)$$

حيث سمينا $X$ المصفوفة $g'(0)$.

عندما تتحدد الزمرة بـ $m$ وسيط مستقل، $m$ عدد عناصر المصفوفة المستقلة عن بعضها، فإن لدينا $m$ زمرة جزئية بوسيط واحد بحيث يمكن كتابة الصفر $g \in G$ على الشكل

$$g = e^{t_1X^1 + t_2X^2 + \dots t_n X^m} = g(t_1 \dots t_m) \quad (18)'$$

نسمي المصفوفات $X^1$، ... $X^m$ المستقلة عن بعضها مولدات الزمرة.

**مثال :** إن أبسط مثال يمكن إعطاؤه لتعيين مولد لزمرة جزئية هو زمرة الانسحابات $T$ على الدالات بمتغير واحد $r$. نعرف الانسحاب على الدالة $f(r)$ بإضافة مقدار ثابت $a$ للمتغير $r$

$$g_a f(r) = f(r+a) \quad (19)$$

واضح أن هذا التعريف يحقق صفات الزمرة الجزئية بوسيط واحد (17) :

$$g_{a_1+a_2} f(r) = f(r + a_1 + a_2) = g_{a_2}(fr + a_1) = g_{a_2} g_{a_1} f(r)$$

$$g_o f(r) = 1 \cdot f(r)$$

$$g_a \cdot g_{-a} = 1 f(r) \qquad ; \qquad g_{-a} = g_a^{-1}$$

إن مولد هذه الزمرة الجزئية بالوسيط $a$ هو تعريفاً، من أجل $a$ صغيرة، حسب (19).

$$(1 + aX) f(r) = f(r) + a\frac{\partial f}{\partial r}$$

ومنه

$$X = \frac{\partial}{\partial r} \quad (20)$$

ونكتب عناصر زمرة الانسحابات $T$ بوسيط واحد على الشكل

$$g = e^{a\frac{\partial}{\partial r}} \quad (21)$$

هذا عندما يكون الانسحاب ببعد واحد – على فضاء منطبق على حقل الأعداد السلمية، أما عندما يكون على فضاء $R^n$ مثلاً $r = (r^1 \dots r^n)$ ؛ $a = (a^1 \dots a^n)$ ؛ فإن $f(r+a) = f(r^1 + a^1, \dots, r^n + a^n)$ الانسحاب $g$ محدد عندئذ حسب '(18) و (20) على الشكل

$$g = e^{a^1\frac{\partial}{\partial r^1} + a^2\frac{\partial}{\partial r^2} + \dots a^n\frac{\partial}{\partial r^n}} \quad (21)'$$

سنحدد في الفصل السابع مولدات زمرة الدورانات الثلاثة ومولدات دورانات لورانتس الستة.

# ملحق الفصل السابع من المجلد الأول

## مولدات زمرة لورانتس

أشرنا في نهاية ملحق الفصل الخامس إلى إمكانية كتابة الزمرة الجزئية بوسيط واحد على شكل أسي (العلاقة 18) ونعني بذلك أن كل عنصر من عناصر المصفوفة التابعة لوسيط واحد قابل للاشتقاق إلى ما لانهاية (من الصف $C^{\infty}$). سنعين الآن مولدات زمرة لورانتس (المتوقفة على ستة وسطاء) مبتدئين بزمرة الدورانات التي هي زمرة جزئية من زمرة لورانتس $SO(3) \subset SO(3,1)$ : ليكن لدينا المتجهة $\vec{r} = (x, y, z)$ التي تدور حول Oz بزاوية قدرها $\varphi$. لدينا

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ننشر $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ في جوار $\varphi = 0$ ونكتب المصفوفة على الشكل

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^3}{3!} \begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix} \qquad (2)$$

إن المصفوفة الأولى في الطرف الأيمن هي المصفوفة الواحدية I؛ نرمز للمصفوفة، جداء $\varphi$، بـ $\Lambda_3$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

م3

ونلاحظ أن جداء $\frac{\varphi^2}{2!}$ هو مربع هذه المصفوفة $\Lambda_3^2$ وجداء $\frac{\varphi^3}{3!}$ هو مكعبها $\Lambda_3^3$ وهكذا.، بحيث يمكننا كتابة المصفوفة (2) التي رمزنا لها بـ $D^{-1}$ $((1.15)_1.5)$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \varphi\Lambda_3 + \frac{\varphi^2}{2!}\Lambda_3^2 + \frac{\varphi^3}{3!}\Lambda_3^3 + \ldots$$

$$D^{-1} = e^{\varphi\Lambda_3} \qquad (2)'$$

إن $\Lambda_3$ هي مولدة دوران المتجهة $\vec{r}$ حول Oz.

# ملحق الفصل السابع من المجلد الأول

## مولدات زمرة لورانتس

أشرنا في نهاية ملحق الفصل الخامس إلى إمكانية كتابة الزمرة الجزئية بوسيط واحد على شكل أسي (العلاقة 18) ونعني بذلك أن كل عنصر من عناصر المصفوفة التابعة لوسيط واحد قابل للاشتقاق إلى ما لانهاية (من الصف $C^{\infty}$). سنعين الآن مولدات زمرة لورانتس (المتوقفة على ستة وسطاء) مبتدئين بزمرة الدورانات التي هي زمرة جزئية من زمرة لورانتس $SO(3) \subset SO(3,1)$ : ليكن لدينا المتجهة $\vec{r} = (x, y, z)$ التي تدور حول Oz بزاوية قدرها $\varphi$. لدينا

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

ننشر $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ في جوار $\varphi = 0$ ونكتب المصفوفة على الشكل

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^3}{3!} \begin{pmatrix} & \dots & \end{pmatrix} \quad (2)$$

إن المصفوفة الأولى في الطرف الأيمن هي المصفوفة الواحدية I؛ نرمز للمصفوفة، جداء $\varphi$، بـ $\Lambda_3$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad م3$$

ونلاحظ أن جداء $\frac{\varphi^2}{2!}$ هو مربع هذه المصفوفة $\Lambda_3^2$ وجداء $\frac{\varphi^3}{3!}$ هو مكعبها $\Lambda_3^3$ وهكذا.، بحيث يمكننا كتابة المصفوفة (2) التي رمزنا لها بـ $D^{-1}$ $((1.15)_1 .5)$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \varphi\Lambda_3 + \frac{\varphi^2}{2!}\Lambda_3^2 + \frac{\varphi^3}{3!}\Lambda_3^3 + \dots$$

$$D^{-1} = e^{\varphi\Lambda_3} \quad (2)'$$

إن $\Lambda_3$ هي مولدة دوران المتجهة $\vec{r}$ حول Oz.

نقوم بالعمل ذاته في الدوران حول Ox حيث المصفوفة هي $C^{-1}$ (5.(1.15)2) والوسيط هو الزاوية θ لنجد أن

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!}\begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix} \quad (3)$$

ونرمز لمولد الدوران حول Ox بـ $\Lambda_1$ :

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

م1

رأينا في ((5.(1.16)) أن دوران جملة المحاور OXYZ لتنطبق على Oxyz هو جداء ثلاثة دورانات

$$\mathcal{A} = B \circ C \circ D$$

وهو مؤلف من دورانين حول المحور الثالث، D و B، ودوران حول Ox، C. إن دوران المتجهة هو، كما نرى هنا، $\mathcal{A}^{-1}$ ((5.(1.21)). أي أن

$$\vec{r}' = \left(D^{-1} \circ C^{-1} \circ D^{-1}\right)\vec{r}$$

$$\vec{r}' = g\vec{r} = e^{\varphi\Lambda_3} e^{\theta\Lambda_1} e^{\psi\Lambda_3}\vec{r} \quad (4)$$

ونكون على هذا النحو قد كتبنا عنصر زمرة الدوران $g \in SO(3)$ على شكل أسي بواسطة مولدين فقط، رغم أن عدد الوسطاء ثلاثة، لأن مولد الدوران حول Oy، ولنرمز له بـ $\Lambda_2$ ليس مستقلاً عن المولدين الأولين؛ ذلك أن دوران المتجهة بزاوية θ حول Oy تعطيه المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = I + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

و

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

م2

نرى من م3 و م1 أن

$$\Lambda_3\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$\Lambda_1\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

م2

$$\Lambda_3\Lambda_1 - \Lambda_1\Lambda_3 = \Lambda_2$$

أي أن المولد $\Lambda_2$ معرف انطلاقاً من هذه العلاقة، نكتب، بتسمية الطرف الأيسر مبادل Commutator $\Lambda_3$ و $\Lambda_1$ ونرمز له بـ $[\ ,\ ]$

$$[\Lambda_3, \Lambda_1] = \Lambda_2$$

ولدينا بصورة عامة

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = \varepsilon_{ijk}\Lambda_k \qquad i,j,k = 1,2,3 \qquad (5)$$

حيث $\varepsilon_{ijk}$ التانسور مضاد التناظر تماماً من الدرجة الثالثة أي أنه يساوي الصفر إذا تساوى اثنان من الأدلة الثلاثة، يساوي 1 إذا كان ترتيب $i,j,k$ دوارياً و $-1$ إذا كان مضاد الدوارية.

لقد اخترنا زوايا أولر في (4) لكتابة الدوران $g$، يمكننا اختيار مركبات متجهة الدوران الآني $\vec{\omega}$ وكتابة $g$ على الشكل

$$g = e^{\omega_x\Lambda_x + \omega_y\Lambda_y + \omega_z\Lambda_z} \qquad (6)$$

ولننظر إلى كيفية تعيين هذه المولدات $\Lambda_x$، $\Lambda_y$، $\Lambda_z$؛ لنكتب $g$ على شكل أسي $g = e^{\Lambda}$.

ثم نكتبه في جوار المتجهة $\bar{r}$

$$g\bar{r} = \bar{r}' = (I + \Lambda)\bar{r} \qquad (7)$$

هذا من جهة، لدينا من جهة أخرى المتجهة $\bar{r}'$ في جوار $\bar{r}$

$$\bar{r}' = \bar{r} + \vec{\omega} \times \bar{r}$$

تتطابق المتجهة المشتبهة $\vec{\omega}$ مع المصفوفة مضادة التناظر التالية

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \equiv \Lambda \qquad (8)$$

لدينا فعلاً $\vec{\omega} \times \bar{r} = \Lambda\bar{r}$ و $\Lambda$ هي مولد الدوران $g$.

نكتبها على الشكل

$$\Lambda \equiv \omega_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \omega_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_z \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبأخذ م3، م1، م2 بعين الاعتبار نرى أن $\Lambda_x$، $\Lambda_y$، $\Lambda_z$ تنطبق على $\Lambda_1$، $\Lambda_2$، $\Lambda_3$.

$$\Lambda = \omega_x\Lambda_1 + \omega_y\Lambda_2 + \omega_z\Lambda_3 \qquad (6)'$$

نتحقق أن $\Lambda$ مضاد التناظر كما تقتضيه العلاقة (16) من ملحق الفصل الخامس.

نكتب $\Lambda$ على شكل مجموع ثلاثة جداءات مضادة التناظر بأن نعود إلى (8) ونكتب $\omega_x = -\omega_{23} = \omega_{32}$، $\omega_y = -\omega_{13} = \omega_{31}$، $\omega_z = -\omega_{21} = \omega_{12}$، ثم نكتب المولدات بدليلين يعينان دوران المستوي فـ $\Lambda_1$ هي دوران المستوي $y,z$ حول $Ox$، نرمز لها بـ $M^{23}$، نرمز كذلك لـ $\Lambda_2$، دوران المستوي $xz$ حول $Oy$ بـ $M^{31}$ وأخيراً لـ $\Lambda_3$، دوران المستوى $xy$ حول $Oz$ بـ $M^{12}$ ونكتب $\Lambda$ على الشكل

$$\Lambda = -\omega_{23}M^{23} - \omega_{31}M^{31} - \omega_{12}M^{12} \quad (6)''$$

إن $M^{ij}$ مثلها مثل $\omega_{ij}$ مضادة التناظر بحيث يمكننا كتابة $\Lambda$ على الشكل

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i}^{3} -\omega_{ij}M^{ij} \quad (6)'''$$

ودوران المتجهة $\vec{r}$ على الشكل

$$\vec{r}' = g\vec{r} = e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}M^{ij}}$$

حيث الجمع على كل الأدلة $i$ و $j$ من الواحد إلى ثلاثة والتي لا تعطي نظراً لتضاد التناظر (العناصر القطرية $ii$ مساوية للصفر) سوى ستة عناصر. وقد أخذنا نصف مجموع العناصر الستة الباقية $\omega_{ji}M^{ji} = \omega_{ij}M^{ij}$.

أما دوران جملة المحاور ككل فهو بالمصفوفة $\tilde{g} = g^{-1}$ كما رأينا

$$g^{-1} = e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}M^{ij}} \quad (9)$$

يصح كل ما فعلناه على زمرة لورانتس بواسطاتها الستة؛ رأينا أن الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر يسير بحركة منتظمة موازية للمحور $Ox'$ هو دوران المستوي $x^ox'$ تحدده المصفوفة

$$\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi & 0 & 0 \\ sh\varphi & ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

ننشر كما فعلنا في (1) الجيوب الزائدية بجوار الصفر

$$ch\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!}$$

$$sh\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!} + \cdots$$

ونحصل على مولد تحويل لورانتس الخاص :

نتحقق أن $\Lambda$ مضاد التناظر كما تقتضيه العلاقة (16) من ملحق الفصل الخامس.

نكتب $\Lambda$ على شكل مجموع ثلاثة جداءات مضادة التناظر بأن نعود إلى (8) ونكتب $\omega_x = -\omega_{23} = \omega_{32}$، $\omega_y = -\omega_{13} = \omega_{31}$، $\omega_z = -\omega_{21} = \omega_{12}$، ثم نكتب المولدات بدليلين يعينان دوران المستوي فـ $\Lambda_1$ هي دوران المستوي $y,z$ حول $Ox$، نرمز لها بـ $M^{23}$، نرمز كذلك لـ $\Lambda_2$، دوران المستوي $xz$ حول $Oy$ بـ $M^{31}$ وأخيراً لـ $\Lambda_3$، دوران المستوى $xy$ حول $Oz$ بـ $M^{12}$ ونكتب $\Lambda$ على الشكل

$$\Lambda = -\omega_{23}M^{23} - \omega_{31}M^{31} - \omega_{12}M^{12} \quad (6)''$$

إن $M^{ij}$ مثلها مثل $\omega_{ij}$ مضادة التناظر بحيث يمكننا كتابة $\Lambda$ على الشكل

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i}^{3} -\omega_{ij}M^{ij} \quad (6)'''$$

ودوران المتجهة $\vec{r}$ على الشكل

$$\vec{r}' = g\vec{r} = e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}M^{ij}}$$

حيث الجمع على كل الأدلة i و j من الواحد إلى ثلاثة والتي لا تعطي نظراً لتضاد التناظر (العناصر القطرية ii مساوية للصفر) سوى ستة عناصر. وقد أخذنا نصف مجموع العناصر الستة الباقية $\omega_{ji}M^{ji} = \omega_{ij}M^{ij}$.

أما دوران جملة المحاور ككل فهو بالمصفوفة $\tilde{g} = g^{-1}$ كما رأينا

$$g^{-1} = e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}M^{ij}} \quad (9)$$

يصح كل ما فعلناه على زمرة لورانتس بواسطاتها الستة؛ رأينا أن الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر يسير بحركة منتظمة موازية للمحور $Ox'$ هو دوران المستوي $x^ox'$ تحدده المصفوفة

$$\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi & 0 & 0 \\ sh\varphi & ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

ننشر كما فعلنا في (1) الجيوب الزائدية بجوار الصفر

$$ch\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!}$$

$$sh\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!} + \cdots$$

ونحصل على مولد تحويل لورانتس الخاص :

$$\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi & 0 & 0 \\ sh\varphi & ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^2}{2!}(\ldots) + \ldots$$

نرمز لهذا المولد بـ $M^{01}$ لنبين، كما فعلنا في زمرة الدورانات أنها دوران المستوي $x^o x^1$

$$M^{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{م4}$$

نرمز بنفس الشكل بـ $M^{02}$ لدوران المستوي $x^o x^2$ :

$$M^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{م5} \qquad (11)$$

ولدوران المستوي $x^o x^3$ بـ $M^{03}$ :

$$M^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{م6}$$

أما الدورانات الأخرى فهي دورانات مكانية صرفة مولداتها هي م1، م2، م3، نكتبها في فضاء مينكوفسكي كمصفوفات $4 \times 4$ بإضافة أصفار إلى الصف الأول والعمود الأول حيث $x^o$ الذي لا يلعب أي دور في الدورانات المكانية ونحتفظ بنفس الرموز

$$M^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Lambda_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{م1}$$

$$M^{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Lambda_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{م2}$$

$$M^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Lambda_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

إن المولدات الزمانية–المكانية (11) متناظرة، نكتب الزوايا المقابلة $\varphi_1$، $\varphi_2$، $\varphi_3$ على الشكل المتناظر $\omega_{01}$، $\omega_{02}$، $\omega_{03}$ (خلافاً للتانسور مضاد التناظر $\vec{\omega}$) ونكتب تحويلات لورانتس الخاصة كما فعلنا في (9) على الشكل

$$e^{\frac{1}{2}\left(\omega_{0i}M^{0i} + \omega_{i0}M^{i0}\right)} \qquad i = 1,2,3 \qquad (12)$$

بحيث يصبح عنصر زمرة الدوران في فضاء مينكوفسكي على الشكل

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}} \qquad (13)$$

الجمع على كل $\rho$ و $\sigma$، حيث $\rho$ و $\sigma$ تساوي 0,1,2,3 لكن $\omega_{\rho\rho}$ و $M^{\rho\rho}$ تساوي الصفر والعناصر 12 الباقية $\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} = \omega_{\sigma\rho}M^{\sigma\rho}$ (متناظرة) بحيث لا يبقى إلا ستة مولدات وستة وسطاء.

لنلاحظ أن المولدات (11) التي تعين تحويلات لورانتس الخاصة ليست مستقلة عن بعضها ونجد على غرار (5):

$$\begin{cases} \left[M^{01}, M^{02}\right] = M^{21} \\ \left[M^{02}, M^{03}\right] = M^{32} \\ \left[M^{01}, M^{03}\right] = M^{31} \end{cases} \qquad (14)$$

أي أننا نعرف أي تحويل خاص بدليل تحويل خاص ودورانين في الفضاء العادي كما برهنا في العلاقة (2.28).

يمكننا بطبيعة الحال إضافة المبادلات بين الدورانات المكانية الصرفة وبين تحويلات لورانتس الخاصة ولكننا سنكتفي بهذا القدر هنا وسنعود إلى الموضوع في دراسة السبين والميكانيك الكمومي النسبوي.

## مسايرة التغير لمعادلة ديراك

ننطلق من العلاقة (13) من ملحق الفصل السابع التي تعين عناصر تحولات لورانتس المقصورة $\Lambda \in L_+^\uparrow$ التي كتبناها على الشكل

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}} \qquad (1)$$

ونذكر أن متجهة الحالة $\psi(x)$ تتحول نتيجة الانتقال من $x$ إلى $x' = \Lambda x$ في فضاء مينكوفسكي إلى

$$\psi'(x') = D\psi(x) \quad (2)$$

حيث $D$ مؤثر واحدي، يضمن بقاء سعة الانتقال والاحتمال – الجداء السلمي والنظيم – ثابتين. قلنا إن $D$ تمثيل للزمرة – زمرة لورانتس المقصورة هنا –، بمعنى أن التحولين $\Lambda$، متبوعاً بالتحول $\Lambda'$، أن الجداء $\Lambda\Lambda'$ مقابل للجداء $D_\Lambda \cdot D_{\Lambda'}$ وأن $I \in L_+^\uparrow$ (العنصر الحيادي في زمرة لورانتس) مقابل بالعنصر الحيادي في فضاء متجهات الحالة أو بعبارة أخرى أن هناك تشاكلاً بين العناصر $\Lambda$ والعناصر $D$.

قلنا أيضاً إن التأكد من مسايرة التغير في الفيزياء التقليدية، حيث الفضاء هو الفضاء الإقليدي ذي الأبعاد الثلاثة وحيث زمرة التناظر هي زمرة الدورانات والانسحابات في هذا الفضاء، هو تساير تغير طرفي المعادلة بالنسبة لهذه الزمرة : أن يكونا سلميين معاً أو أنهما متجهتان بثلاثة أبعاد، أو تانسورات بتسعة أبعاد الخ. رأينا أخيراً، على سبيل المثال، أن مولدات $D$ الممثلة لزمرة الدورانات في الميكانيك الكمومي اللانسبوي هي مركبات العزم الزاوي التي تخضع لذات علاقات المبادلة التي تخضع لها مولدات زمرة الدوران $SO(3)$.

ونريد هنا إثبات أن معادلة ديراك مسايرة التغير في الفيزياء النسبوية؛ أن فضاء السبينورات المزدوجة ذي الأربعة أبعاد هو تمثيل لزمرة لورانتس $SO(3,1)$ "المكافئة" لـ $SL(2,\mathbb{C})$، على غرار تمثيل فضاء السبينورات ذي البعدين لزمرة الدورانات : $SO(3) \leftrightarrow SU(2)/Z$. كما نريد استنتاج مولدات $D$ في هذا الفضاء.

ليكن إذاً $\Lambda$ أحد عناصر زمرة لورانتس المقصورة ولنكتب معادلة ديراك الناتجة عن الانتقال من $x$ إلى $x' = \Lambda x$ على الشكل

$$\left(i\gamma'^{\mu}\partial'_{\mu} - m\right)\psi'(x') = 0 \quad (3)$$

التي نحصل عليها بتطبيق المؤثر $D$ على معادلة ديراك بـ $x$ : لدينا

$$0 = \left(i\gamma'^{\mu}\partial'_{\mu} - m\right)\psi'(x') = D\left[\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x)\right] \quad (3)'$$

يجب أن نجد معادلة كلاين–غوردن انطلاقاً من (3) كما وجدناها انطلاقاً من المعادلة الأصلية بـ $x$ والتي أدت بنا إلى علاقات المبادلة المضادة (2.18). يجب إذاً أن تحقق المصفوفات $\gamma'$ ذات العلاقة

$$\left[\gamma'^{\mu}, \gamma'^{\nu}\right]_+ = 2g^{\mu\nu}$$

إلا أنه من الممكن كما نعلم تغيير القاعدة في الفضاء ذي الأربعة أبعاد الذي تفعل فيه مصفوفات ديراك بمؤثر واحدي $U$ يؤدي إلى مصفوفات جديدة : $\gamma'^{\mu} = U\gamma^{\mu}U^{-1}$. لا مانع إذاً من اعتبار $\gamma'^{\mu} = \gamma^{\mu}$ من أجل كل $\mu = 0$، 1، 2، 3. تتغير المتجهات مضادة التغير $A^{\mu}(x)$ إلى $A'^{\mu}(x')$ بالمؤثر $\Lambda$ :

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}(x) \quad (4)$$

في حين تتغير المتجهات مسايرة التغير $A_{\mu}(x)$ بالمؤثر $\tilde{\Lambda}^{-1}$، حيث $\tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu} = \dfrac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ و $\left(\tilde{\Lambda}^{-1}\right)_{\mu}{}^{\nu} = \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$:

$$A'_\mu(x') = \left(\bar{\Lambda}^{-1}\right)_\mu^{\ \nu} A_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \quad (5)$$

نلاحظ أن كتابة $\Lambda_\nu^\mu$ على هذا الشكل يبرر التسمية تضاد التغير في 4 : $A'$ تابعة لـ $x'$ ولكن التغير (الاشتقاق) هو بالنسبة لـ $x$؛ والتسمية مسايرة التغير في 5 : الاشتقاق هو بالنسبة للمتغير $x'$ الذي تتبع له المتجهة $A'$.

نكتب $\partial'_\mu$ مساير التغير على الشكل (5)

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (6)$$

كما نكتب التغير العكسي

$$\partial_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu \partial'_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \quad (7)$$

نحذف المتجهتين $\psi(x)$ و $\psi'(x')$ في '(3) بكتابة $\psi(x) = D^{-1}\psi'(x')$، نأخذ (7) وكون $\gamma'^\mu = \gamma^\mu$ من أجل كل الأدلة $\mu$ فنحصل على العلاقة

$$\gamma^\nu \partial'_\nu = D\gamma^\mu \partial_\mu D^{-1} = D\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu D^{-1}$$

أي على الشرط الأول لتحقيق مسايرة التغيير :

$$\gamma^\nu = D\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu D^{-1}$$

الذي نكتبه على الشكل

$$D^{-1}\gamma^\nu D = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu \quad (8)$$

أما الشرط الثاني شرط الواحدية فنستخلصه من كتابتنا للمتجهة المرافقة للمتجهة $\psi$ على شكل سطر

$$\psi^\dagger = \overline{\psi}^1\overline{\psi}^2\overline{\psi}^3\overline{\psi}^4$$

حيث – تشير إلى المرافق العقدي.

عندما تتحول $\psi(x)$ إلى $\psi'(x') = D\psi$ فإن $\psi^\dagger$ تتحول إلى $\psi'^\dagger(x') = \left(D\psi(x)\right)^\dagger = \psi^\dagger(x) D^\dagger$.

نكتب الجداء السلمي المنحفظ للمتجهتين $\psi$ و $\overline{\psi}$، $\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ :

$$\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x)$$

$$\psi'^\dagger(x')\gamma^0\psi'(x') = \psi^\dagger(x) D^\dagger \gamma^0 D\psi(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0\psi(x)$$

يتحقق الانحفاظ عندما تحقق $D$ شرط الواحدية التالي

$$D^\dagger \gamma^0 D = \gamma^0 \quad (9)$$

حيث تحل $\gamma^0$ محل العنصر الحيادي $I$ الذي يعرف الواحدية المألوفة $D^\dagger D = I$.

نرمز لمولدات $D$، وعددها 6، عدد مولدات زمرة لورانتس، بالرمز $S^{\rho\sigma}$؛ إنها تتمتع بنفس صفات تضاد التناظر التي تتمتع بها $M^{\rho\sigma}$ ونكتب $D$ على الشكل

$$D = e^{1/4\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}} \quad (10)$$

نكتب العلاقة 8 بنشر D و $D^{-1}$ إلى الرتبة الأولى $I \pm \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}$ :

$$\left[I - \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right]\gamma^{\nu}\left[I + \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right] = \left(\delta^{\nu}_{\mu} + \omega^{\nu}_{\mu}\right)\gamma^{\mu} \quad \text{(a)}$$

فنحصل، نظراً لأن $\omega^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(M^{\rho\sigma}\right)^{\mu}_{\nu}$

و $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(M^{\rho\sigma}\right)^{\mu}_{\nu}$

على

$$\frac{1}{4}\left[\gamma^{\nu}, S^{\rho\sigma}\right] = \frac{1}{2}\left(g^{\nu\rho}g^{\sigma}_{\ \mu} - g^{\nu\sigma}g^{\rho}_{\ \mu}\right)\gamma^{\mu} = \frac{1}{2}\left(g^{\nu\rho}\gamma^{\sigma} - g^{\nu\sigma}\gamma^{\rho}\right) = \frac{1}{8}\left(4g^{\nu\rho}\gamma^{\sigma} - 4g^{\nu\sigma}\gamma^{\rho}\right) \quad \text{(b)}$$

$$\left[\gamma^{\nu}, S^{\rho\sigma}\right] = \frac{1}{2}\left(\left[\gamma^{\nu}, \gamma^{\rho}\right]_{+}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\sigma}\left[\gamma^{\nu}, \gamma^{\rho}\right]_{+} - \left[\gamma^{\nu}, \gamma^{\sigma}\right]_{+}\gamma^{\rho} - \gamma^{\rho}\left[\gamma^{\nu}, \gamma^{\sigma}\right]_{+}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left[\gamma^{\nu}, \gamma^{\rho}\right]_{+}, \gamma^{\sigma}\right]_{+} - \left[\left[\gamma^{\nu}, \gamma^{\sigma}\right]_{+}, \gamma^{\rho}\right]_{+}\right)$$

وباستعمال المتطابقة

$$\left[A, \left[B, C\right]\right] = \left[\left[A, B\right]_{+}, C\right]_{+} - \left[\left[A, C\right]_{+}, B\right]_{+} \quad \text{(c)}$$

على

$$\left[\gamma^{\nu}, S^{\rho\sigma}\right] = \frac{1}{2}\left[\gamma^{\nu}, \left[\gamma^{\rho}, \gamma^{\sigma}\right]\right] \quad (11)$$

أي أن $S^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[\gamma^{\rho}, \gamma^{\sigma}\right]$.

**ملاحظات :**

1- إن مولدات الدوران في الفضاء مزدوج السبينورات، $S^{ij} = \gamma^{i}\gamma^{j}$، مضادة الهيرميتية وتبادلية مع $\gamma^{0}$، وهكذا فإن $\gamma^{0}$ تبادلية مع $e^{S^{ij}}$ بحيث يأخذ شرط الواحدية في هذه الحالة الشكل المألوف $(\gamma^{02} = I)$

$$D^{-1} = \gamma^{0}D^{\dagger}\gamma^{0} = D^{\dagger} \quad (9)'$$

في حين أن مولدات الدوران الزماني المكاني $S^{0i} = \gamma^{0}\gamma^{i}$ هيرميتية : لدينا نظراً لـ (2.5) و (2. 10)

$$\left(\gamma^{0}\gamma^{i}\right)^{\dagger} = \gamma^{i\dagger}\gamma^{0\dagger} = -\gamma^{i}\gamma^{0} = \gamma^{0}\gamma^{i}$$

كما أنها مضادة المبادلة مع $\gamma^{0}$.

2- عندما يكون المولد X مضاد الهيرميتية نستبدل به المولد $\pm iX$ الهيرميتي ونستبدل بالعلاقة المقابلة $(9)'$ : $D^{-1} = D^{\dagger}$، حيث $D = e^{X}$، $X^{\dagger} = -X \Leftrightarrow D^{\dagger} = e^{X^{\dagger}} = D^{-1} = e^{-X}$، العلاقة $D = e^{iX}$، $(iX)^{\dagger} = iX \Leftrightarrow D^{\dagger} = e^{-iX^{\dagger}} = D^{-1} = e^{-iX}$.

وعلى العكس عندما يكون المولد هيرميتياً فإن ضربه بـ $\pm i$ يحوله إلى مضاد الهيرميتية ولكن هذا لا يغير شيئاً في تعريفنا لـ $D^{-1}$ (9; '9 ,'9) في حالة الدوران الزماني المكاني لأن $X = S^{0i}$ مضاد المبادلة مع $\gamma^0$. لدينا، عندما نكتب $iX$ بدلاً عن $X$

$$D = e^{iX} \quad , \quad D^{\dagger} = e^{-iX} \quad (X = X^{\dagger}) \quad ,$$

$$D^{-1} = \gamma^0 D^{\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 (I - iX) \gamma^0 = I - iX = e^{-iX}$$

تسمح لنا هذه الملاحظة بكتابة عناصر زمرة لورانتس المقصورة على الشكل

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(iM^{\rho\sigma})} \quad (1)'$$

وعناصر الزمرة D الفاعلة في الفضاء مزدوج السبينورات

$$D = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\rho\sigma}(iS^{\rho\sigma})} \quad (10)'$$

## التحولات المنفصلة Discrete : $\mathscr{C}$، $\mathscr{E}$، $\mathscr{P}$

نميز هذه المؤثرات عن المؤثرات السابقة من حيث عدم توقفها على وسطاء تجعل الانتقال من حالة إلى حالة أخرى مجاورة دالة متصلة، الدورانات المتناهية في الصغر على سبيل المثال، وندرس ثلاثة مؤثرات منفصلة مبتدئين بمؤثر السوية، مؤثر الانتقال من جملة محاور غاليلية مباشرة إلى غير مباشرة، من اليد اليمنى إلى اليد اليسرى؛ وهو انتقال يستحيل القيام به بشكل متصل. أشرنا منذ البداية أن قوانين الفيزياء التقليدية لا تفرق بين الدوران من اليمين نحو اليسار : إبهام اليد اليمنى نحو السبابة حول الوسطى أو الدوران نحو اليسار : إبهام اليد اليسرى نحو سبابتها حول وسطى اليد اليسرى. أو أنها لا تفرق بين الحادثات الفيزيائية وصورتها في المرآة. بينا أيضاً أن هذا التناظر لا ينتج قوانين انحفاظ في الفيزياء التقليدية خلافاً للميكانيك الكمومي حيث يؤدي إلى قواعد انتقاء.

إن تحول لورانتس المقابل للانعكاس المكاني $(x^0, \bar{x}) \rightarrow (x^0, -\bar{x})$ هو مصفوفة قطرية معينها يساوي 1-، كما في الفضاء الإقليدي نكتبها على الشكل

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\mu} g^{\mu}{}_{\nu} \quad (12)$$

يقابلها المؤثر $\mathscr{P}$ الذي نحصل عليه انطلاقاً من (8) و (9)

$$\mathscr{P}^{-1} \gamma^{\mu} \mathscr{P} = g^{\mu\mu} g^{\mu}{}_{\nu} \gamma^{\nu} = g^{\mu\mu} \gamma^{\mu} \quad (13)$$

$$\mathscr{P}^{-1} = \gamma^0 \mathscr{P}^{\dagger} \gamma^0 \quad (14)$$

ترينا (13) أن $\mathscr{P}$ مضاد المبادلة مع $\gamma^i$ $i = 1, 2, 3$ وتبادلي مع $\gamma^o$ فهوبالتالي متناسب مع $\gamma^o$ (مضاد المبادلة مع $\gamma^i$) $\mathscr{P} = \alpha\gamma^o$. أما (14) فترينا أن $|\alpha|^2 = 1$، وبما أن انعكاسين متتاليين يعيدان إلى الحالة البدائية – المؤثر I – ولكنهما يعطيان $\psi'(x) = \pm\psi(x)$ لأن السبينور معرف مقاس $\pm 1$ كما نعلم، أي أن $\mathscr{P}^2 = \pm 1$ وعليه فإن $\mathscr{P}^4 = I$ ومنه $\alpha = \pm e^{i\pi/2}$ و

$$\mathscr{P} = \pm e^{i\pi/2}\gamma^o \quad (15)$$

إن قوانين الفيزياء التقليدية لا تتأثر كذلك بالانعكاس الزماني[9] $t \to -t$، بقلب اتجاه محور الزمن، بتغيير اتجاه متجهة السرعة لأن قوانين نيوتن المتوقفة على المشتق الثاني (على التسارع) لا تتغير نتيجة هذا القلب؛ وكذلك فإن معادلات أولر – لاغرانج لا تتغير بالانتقال من اللاغرانجي $L(q^i, \dot{q}^i)$ إلى $L(q^i, -\dot{q}^i)$. وهذا حال الميكانيك النسبوي أيضاً. يقابل الانتقال من $(x^o, \bar{x})$ إلى $(-x^o, \bar{x})$ المصفوفة القطرية ذات المعين المساوي لـ 1-

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -g^{\mu\mu}g^{\mu}{}_{\nu} \quad (16)$$

التي تنقلنا من مخروط المستقبل إلى مخروط الماضي، من المتجهات قائمة التوقيت إلى مضادة التوقيت. وهذا هو حال معادلة شرودينغر لأن الانتقال من t إلى t- ينقلنا، في حالة عدم توقف الهاميلتوني على الزمن، من

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\bar{x}, t)}{\partial t} = H\psi(\bar{x}, t)$$

إلى

$$-i\hbar\frac{\partial\psi(\bar{x}, -t)}{\partial t} = H\psi(\bar{x}, -t)$$

وهي معادلة شرودينغر من أجل $\overline{\psi}(\bar{x}, -t)$ $(H^{\dagger} = H)$

$$i\hbar\frac{\partial\overline{\psi}(\bar{x}, -t)}{\partial t} = H\overline{\psi}(\bar{x}, -t)$$

نرى في حالة ديراك من العلاقتين (8) و (9) أن $\mathscr{E}$ مضاد المبادلة مع $\gamma^o$ وتبادلي مع $\gamma^i$، نظراً لوجود إشارة – في (16) عوضاً عن + في (12). إن $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ تحقق هذه الخاصة. لا يؤثر الانعكاس الزماني على خاصة السبينور، لذا نأخذ

---

[9] إن عكوسية الحادثات الفيزيائية، اعتبار الحالة النهائية حالة بدائية والعودة إلى هذه الأخيرة كحالة نهائية ليست سوى حالة مثالية، كما نعلم من الترموديناميك، لا تصح إلا في ظروف استثنائية. أما التطور الواقعي فهو غير عكوس تعين الانتروبية اتجاه للزمن يستحيل قلبه. لذا فإن دراسة تفاعل جسيمين – جسيم في الحقل الذي يحدثه الجسيم الآخر – بمعزل عما عداهما في الكون – وهذا ما فعلناه في كتاب الميكانيك – دراسة مثالية بعيدة عن الواقعية.

$$\mathscr{C} = \gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^0\gamma^5 \quad (17)$$

نرمز لزمرة الانعكاسات المكانية بـ $L_-^{\uparrow}$، حيث يرمز السهم لاتجاه الزمان الموجب و − لإشارة المعين ولزمرة الانعكاسات الزمانية بـ $L_-^{\downarrow}$.

إن التحويل المنفصل الأخير هو اقتران الشحنة، الانتقال من شحنة ما إلى شحنتها المضادة $e \to -e$، إنه تناظر داخلي بمعنى أنه لا يؤثر على $x$ : $\psi'(x') = \psi'(x)$؛ تتحول معادلة ديراك بوجود حقل كهرطيسي إلى الشكل

$$(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi'(x) = 0 \quad (18)$$

لنلاحظ أن المتجهة المرافقة العقدية لـ $\psi(x)$، $\bar{\psi}(x)$ تخضع لمعادلة ديراك التالية

$$\left(-i\partial_\mu\bar{\gamma}^\mu - eA_\mu\bar{\gamma}^\mu - m\right)\bar{\psi}(x) = 0$$

ولنفتش عن المؤثر $D$ الذي ينقل $\bar{\psi}(x)$ إلى $\psi'(x)$ المحققة للمعادلة (18)، $\psi'(x) = D\bar{\psi}(x)$، لدينا كما في $(3)'$

$$0 = \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + eA_\mu\gamma^\mu - m\right)D\bar{\psi}(x) = D\left(-i\partial_\mu\bar{\gamma}^\mu - eA_\mu\bar{\gamma}^\mu - m\right)\bar{\psi}(x)$$

التي تعطينا بضرب الطرفين بـ $D^{-1}$

$$D^{-1}\gamma^\mu D = -\bar{\gamma}^\mu \quad (19)$$

نكتب هذه العلاقة بدليل $\gamma^\dagger$ بأخذ منقول الطرفين

$$\tilde{D}\tilde{\bar{\gamma}}^\mu\tilde{D}^{-1} = -\gamma^{\mu\dagger} \quad (20)$$

نعلم أن $\gamma^1$ و $\gamma^3$ مصفوفتان حقيقيتان وأن $\gamma^2$ تخيلية بحتة في التمثيل الاعتيادي الذي تبنيناه، وأن $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ في الحالات الثلاث (2.12). وهكذا فإن $\gamma^{j\dagger} = \tilde{\bar{\gamma}}^j = -\gamma^j$ من أجل $j = 1, 3$؛ $\gamma^{2\dagger} = -\tilde{\bar{\gamma}}^2 = -\gamma^2$ و $\gamma^0$ حقيقية وقطرية : $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 = \tilde{\bar{\gamma}}^0$ أي أن $\tilde{D}$ في (20) تبادلية مع $\gamma^2$ ومضادة المبادلة مع $\gamma^0$، $\gamma^1$، $\gamma^3$. يمكننا إذاً أخذ $\tilde{D}$ متناسبة مع $\gamma^2$. نريد أخيراً التعبير عن $\psi'(x)$، التي نرمز لها بـ $\psi_c(x)$، ليس بدليل $\bar{\psi}$ وإنما بدليل $\psi^\dagger$، المتجهة السطر، حيث $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$، $\psi^\dagger = \tilde{\bar{\psi}}$ وبدليل $\tilde{D}$

$$\psi_c(x) = D\bar{\psi}(x)$$

$$= \left(\widetilde{\tilde{\bar{\psi}}\tilde{D}}\right) = \left(\widetilde{\psi^\dagger\tilde{D}}\right) = \left(\widetilde{\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\tilde{D}}\right) = \left(\widetilde{\bar{\psi}\gamma^0\tilde{D}}\right)$$

$$\sim \left(\widetilde{\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2}\right) \sim -\gamma^2\gamma^0\tilde{\bar{\psi}} \sim -\gamma^2\gamma^0\psi^\dagger$$

نطلق على مؤثر الانتقال من $\psi_c(x)$ إلى $\psi^\dagger(x)$ اسم $\mathscr{C}$، مؤثر اقتران الشحنة ونختاره مضاد الهيرميتية، أي أننا نختار مثل التناسب بين $\tilde{D}$ و $\gamma^2$ مساوياً لـ $i$-

$$\mathscr{C} = i\gamma^2\gamma^0 \quad ; \quad \mathscr{C}^\dagger = -\mathscr{C}$$

ونكتب

$$\psi_c(x) = \mathscr{C}\psi^\dagger(x) = i\gamma^2\gamma^0\psi^\dagger(x)$$

أشرنا مرات عديدة في هذا الكتاب إلى أن التفاعلات الكهرضعيفة لا تحفظ السوية، أنها تخل بقانون بقاء السوية على حالها وتحول، إن صح التعبير، الدالات الزوجية إلى دالات فردية؛ هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإنه يمكن البرهان أن جداء التحويلات المنفصلة الثلاث $\mathcal{PCT}$ يكافئ تحويل لورانتس؛ وهكذا فلابد لنظرية ما تخل بتحويل من هذه التحويلات الثلاث أن تخل أيضاً، أن تغير الإشارة، في تحويل ثان حتى يبقى هذا التكافؤ قائماً. وهذا ما جعلنا على سبيل المثال ننظر إلى الشحنة المضادة، التي تخل بحفظ $\mathcal{C}$ كجسيم يسير باتجاه معاكس لاتجاه الزمن، يقلب الزمن وهكذا يبقى الجداء $\mathcal{CT}$ منحفظاً.

# ثبت المصطلحات

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 303-94-89-62 | إحداث (خلق) | |
| Creation, Production | 42-39 | اختزال | |
| Reduction | 120 | | |
| Irreductibility | | – | عدم قالبية الـ |
| Resonance | -376-210-209-202-199<br>379 | إرنان | |
| Exclusion | | استبعاد | |
| | 321-311-299-290-289 | – | مبدأ الـ |
| Projection | 265-38-36-33 | إسقاط | |
| | 241-239 | – | مبرهنة الـ |
| Stereographic | 149 | – مجسم | |
| | 151-150-149 | إسقاطية | إحداثيات |
| Projector | 242-36-35-33 | مسقط | |
| | 330-329-327 | إرتداد | |
| Annihilation | 308-307-303-94-89-62 | إفناء (فناء) | |
| | | إغلاق | |
| | 302-237 | – | علاقة الـ |
| Variance | 68-42 | انحراف (تباين) تربيعي وسطي | |
| Shift | | انزياح | |
| Phase Shift | 377-376-361-360 | – الطور | |
| | 440 | – لامب | |
| Collapse | 54-41-39 | انطواء | |
| Diffraction | 10-8-7 | انعراج | |
| Deflexion | 374-357-354-351 | انعطاف | |
| Wave Packet | 27-26 | باقة أمواج (قطار) | |
| Structure | 14 | بنية | |
| Fine | 18 | – احتمالية | الـ |
| | -191-188-177-171-137 | – الدقيقة | |
| Hyperfine | 439-437-435-399 | | |
| | 196-177-176 | – زائدة الدقة | |
| | 308-290-289 | بوزون | |
| | 159-158-155 | تانسور | |

| | | |
|---|---|---|
| | 256-156-32 | |
| Symmetric | 161 | متري – |
| Covariant | 160 | متناظر – |
| Antisymmetric | | مساير التغير – |
| Contravariant | 161-156-102 | مضاد التناظر – |
| | 160 | مضاد التغير – |
| | 160 | |
| Complet | 226-223-222 | تقليص الـ – |
| Description | 18-17 | تام |
| | 237-234 | توصيف – |
| | 41-23 | جماعة تامة (مغلقة) |
| | 281-196 | مجموعة – |
| Completion | 223 | نظمة – |
| Complementarity | 18 | إتمام |
| Commutation | 101 | مبدأ التمامية |
| - Operator | -152-146-128-103-101 | تبادل |
| | -413-406-307-208-153 | مؤثر الـ مبادلة |
| | 458-456-414 | |
| Commutative | 42-40-35-31-22-3 | |
| Commutator | -427-306-304-31-30-22 | تبادلي |
| | 452 | مبادل |
| Anti – | 407-406-405-311 | – مضاد |
| Exchange | 347-345-343-178 | استبدال |
| Permutation | 441-296-295-294-293 | تبديل |
| | 295 | توقيع الـ – |
| - Group | 441-293 | زمرة الـ تبديلات |
| Gedanken Experiment | 12 | تجربة ذهنية |
| Cavity | 210-209 | تجويف |
| | 210 | – الإرنان |
| Degeneracy | 138-110-77-75 | تدني |
| | 140-135 | – مزودج |
| | 75 | ثنائي الـ – |
| | 184-179-177-172 | رفع الـ – |
| Degenerate | 135-23 | متدني |
| Non - | 110-73-22-20 | غير – |
| | 233 | – (معرف موجب) |

| | | |
|---|---|---|
| تردد | 8 | |
| - الاضطراب | 199 | Frequency |
| - بور | 198-199-200-202-208 | |
| تراكم | 222 | |
| تشابك | 43 | |
| تصاكل | 226 | Entanglement |
| تطور (انظر مؤثر التطور) | 23-44-46 | Homeomorphism |
| تقابل | | Evolution |
| مبدأ الـ - (بور) | 15-23-27 | Correspondance principle |
| تمثيل | | Representation |
| - الوضع | 30-95 | |
| - الاندفاع | 30-95 | |
| - شرودينغر | 46-100-389 | |
| - هايزنبرغ | 46-47-100-389 | |
| الـ - الوسطي | 389 | |
| - الزمرة | 141-145-156-416-422-444 | |
| - تانسوري للزمرة | 119-121-145-148-162 | |
| - سبينوري - | 146-148-161-407-416 | |
| - منتظم | 121 | |
| ممثل | 106-107-109 | |
| تناظر (قانون) | 107 | |
| زمرة الـ - | 108-445-456 | |
| كسر الـ - | 184 | |
| توضيع | 38-39-41-43 | Superposition |
| مبدأ الـ - | 9-15-23-54 | |
| توزيع غاوصي | 5-69 | |
| توزيعة | 58-271-273-278 | Distribution |
| - معتدلة | 58-279 | |
| ثابتة البنية الدقيقة | 137-171-213-337 | |
| - الاقتران | 171 | Landé |
| - لاندي | 145-196 | Duality |
| ثنوية الجسيم - الموجة | 25 | |
| جداء | | Convolution |
| - التلاف | 363-376-382 | |

| English | Pages | Arabic | |
|---|---|---|---|
| | 404-158-119-40 | – تانسوري | |
| | 155 | – سلمي | |
| | -243-160-155-60-57-19<br>443-273-271-249-244 | – داخلي (انظر شكل خطي) | |
| | 156-67-33 | الجداء | حفظ الـ |
| | | جموع | |
| | 219-93-16 | – | مربع |
| State | | حالة | |
| | 389-337-144-78 | – القاع | |
| | 58 | – مرتبطة | |
| Mixed | 39 | – مزيج | |
| | 200-71-52 | – مستقرة | |
| Pure | 43-41-40-39 | – نقية | |
| | -57-46-44-41-39-21-17<br>65 | – | متجهة الـ |
| | 289-287-181 | – المتناظرة (زوجية) | |
| | 289-287-181 | – مضادة التناظر (فردية) | |
| | | حقل | |
| | 360 | – مركزي | |
| Self Consistent | 340 | – متسق ذاتياً | |
| Linear | | خطي | |
| Sesquilinear | 231-17 | – ونصف | |
| | 230-229-228-227-19 | – | تطبيق |
| Bilinear | 243-17 | ثنائي الخطية | |
| Linear form | | خطي (صيغة خطية انظر تطبيق) | شكل |
| Function | | دالة | |
| | 359-329-128 | – بسل | |
| | 281-271-264-75-59 | – (قياس) ديراك | |
| Step (en escalier) | 220 | – الدرجية | الـ |
| | 76-61 | – الزوجية | الـ |
| | 76 | – الفردية (انظر السوية) | الـ |
| | 138 | – غاما | |
| | 381-366-363-362-49 | – (توزيعة) غرين | |
| | 274 | – هيفيسايد | |
| Hypergeometric | 358-138 | – فوق الهندسية | الـ |

| | | |
|---|---|---|
| | 260 | – المميزة |
| Characteristic | 76-54-17-16 | – الموجة (انظر متجهة الحالة) |
| | 273 | الدالات المتناقصة بسرعة |
| | 334 | دالتية |
| Functional | 335 | – مطرافية |
| Extremal | 183 | دوار |
| Rotator | 452-294 | دواري (تبديل دائري) |
| Cyclic | 23-21 | رصود |
| Observable | 141 | سبين |
| | 157-155 | سبينور (انظر فضاء) |
| | 156 | – المتري |
| | 157 | – مضاد التغير |
| | 8 | سرعة زاوية |
| | 27 | – الطور |
| Parity | 423-410-181-109 | سوية |
| Form | | صيغة |
| | 283-279 | – بلانشريل |
| | 357-356 | – روذرفورد |
| | 384 | – ليبمان – شفينغر |
| Connection fourmula | 326 | – الوصل |
| | | طاقة |
| | 134-125-99-89-78 | – القاع |
| | 336-135-134 | – ريدبرغ |
| Phase | | طور |
| Shift | 376-361-360 | – (انظر انزياح) |
| Spectra | 53-10 | – (الطريق) |
| Continuous | | طيف |
| Discrete | 58-41-37-20 | – متصل |
| | 57-41-37-20 | – منفصل |
| | 247 | – |
| Transmission | 255 | طيفية (تحليل الوحدة) |
| Form factor | 329-83 | عامل (معامل) الانتقال |
| | 374-373 | – الصيغة |
| Indistinguishability | | عدم |
| | 285 | – التمييز |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | عزم | | Momentum |
| الـ | عزوم المترافقة | 333-208-18 | |
| | غامر (تطبيق) | 263 | Surjective |
| | غرافيتون | 289 | Graviton |
| | فرضية | | |
| | – دوبروي | 26-25 | |
| | – بلانك | 89-26-25 | |
| | فضاء | | |
| | – الطور | 50 | |
| | – إقليدي | 238 | |
| | – انفصالي | 233 | Separated |
| | – باناخ | 226 | |
| | – تام | 222 | |
| | – سبينوري | 154 | |
| | – فصول | 238-234 | Separable |
| | – متجهي | 223-34-31-19-17-16 | |
| | – متري | 222-217 | |
| | – منظم | 245-233-226 | Normed |
| | – هيلبرتي | 230-91-54-17 | |
| | – مشرّع | 281 | Rigged |
| ثنوي الـ | – المتجهي | 245-243-229-57 | |
| | فوق مستوي | 244 | Hyperplane |
| | فيرما (مبدأ) | 52 | |
| | فيرمي (قاعدة فيرمي الذهبية) | 205 | |
| | فيرميون | 301-299-290-289 | |
| | قطع الاتساق | 43 | Decoherence |
| | قياس | | Measure |
| | – متزامن | 3 | |
| | – مثالي (فون نويمان) | 42-41 | |
| | كثافة | | Density |
| | – التيار | 402-83-76-63-62 | |
| | – الاحتمال | 402-323-96-68-63-57 | |
| | كثير حدود | | |
| | – لاكير | 137 | |
| | – لوجاندر | 137-116 | |

| | | |
|---|---|---|
| – هيرميت | 138-93-90 | |
| كرة ريمان | 149-148 | |
| كظوم (اضطراب) | 171-166 | Adiabatic |
| كم | 4 | Quantum |
| | | Quanta جمعها |
| تكميم | | Quantization |
| الـ – الثاني | 304-303 | Second - |
| عدد كمومي (كمي) | | Quantum number |
| – – رئيسي | 438-135 | principal (n) |
| – – سمتي ( مغنطيسي) | 357-182-143-125-123 | azimuthal (m) |
| – – كلي | | total (j) |
| – – قطري | 436-125 | radial (nr) |
| – – مداري | 125 | orbital (l) |
| كمول | 270-260-222 | Integrable |
| كمون | | |
| الـ – الفعال | 124 | |
| كلوون | 289 | Gluon |
| كوارك | 289-143 | Quark |
| لاتحديد | والأصل الألماني لهذه الكلمة | Uncertainty Unbestimmtheit |
| علاقة الـ – | 208-205-71-69-67 | Relation |
| (مبدأ اللاتحديد، اللادقة، اللايقين) | 39-3-1 | |
| لصاق | 252 | Adherence |
| ماغنتون بور | 177-145-142 | |
| مبدأ (انظر الاستبعاد، التمامية، التقابل، التوضيع، عدم التمييز) | | |
| (مبدأ) موبيرتيوس | 52 | |
| ميرهنة ارنفست | 339-65 | |
| – فيريال | 338 | Virial |
| متجهة الموجة | 400-387-140-78-26-8 | |
| متجهي (انظر فضاء) | | |
| متراجحة بسل | 238-236 | |
| – كوشي – شفارتز | 231-218 | |
| – مينكوفسكي | 222-220 | |
| – هولدر | 220 | |
| متطابقة جاكوبي | 32 | |

هيرميت 138-93-90

كرة ريمان 149-148

كظوم (اضطراب) Adiabatic 171-166

كم Quantum 4

Quanta جمعها

تكميم Quantization

– الثاني Second - 304-303

عدد كمومي (كمي) Quantum number

– – رئيسي principal (n) 438-135

– – سمتي ( مغنطيسي) azimuthal (m) 357-182-143-125-123

– – كلي total (j)

– – قطري radial (nr) 436-125

– – مداري orbital (l) 125

كمول Integrable 270-260-222

كمون

– الفعال 124

كلوون Gluon 289

كوارك Quark 289-143

لاتحديد Uncertainty

والأصل الألماني لهذه الكلمة Unbestimmtheit

– Relation 208-205-71-69-67

(مبدأ اللاتحديد، اللادقة، اللايقين) 39-3-1

لصاق Adherence 252

ماغنتون بور 177-145-142

مبدأ (انظر الاستبعاد، التمامية، التقابل، التوضيع، عدم التمييز)

(مبدأ) موبيرتيوس 52

مبرهنة ارنفست 339-65

– فيريال Virial 338

متجهة الموجة 400-387-140-78-26-8

متجهي (انظر فضاء)

متراجحة بسل 238-236

– كوشي – شفارتز 231-218

– مينكوفسكي 222-220

– هولدر 220

متطابقة جاكوبي 32

| | | |
|---|---|---|
| متغيرات خفية | 18-14 | Hidden variables |
| متقايس | 262-223 | Isometric |
| محدبة (مجموعة) | 241-224 | |
| محلل | 394-383-381-268-247 | Resolvent |
| مخططات فاينمان | 398-394-368-347 | |
| محول فوريي | 400-280-279-65-62 | |
| مستحث (محرض) | 214-212 | Induced |
| مستقطب | 9 | |
| مصفوفات باولي | 415-413-153-151 | |
| – ديراك | 410-409-408 | |
| معادلة باولي | 422-420 | |
| – ديراك | -412-410-406-404-399 | |
| | 422-420-415 | |
| – فوك ديراك | 342 | |
| – لابلاس | 139 | |
| – غاوص | 139 | |
| – هارتري فوك | 342 | |
| – القرنية | 174 | Secular |
| معيار كوشي | 223 | |
| مفعول | | Effect |
| – زيمان | 194-191-188 | |
| – شتارك | 183 | |
| – النفق | 82 | |
| مؤثر | | Operator |
| – تفاضلي | 26-25 | |
| – خطي | 35-29-23-18 | |
| – ذاتي الترافق (هيرميتي) | 265-258-256-35-20-18 | Self adjoint |
| – متراص | 251-250-248 | Compact |
| – متناظر | 266-259-258 | |
| – متطابق القوة | 254-253-35 | Idempotent |
| – مغلق | 257 | |
| – واحدي | 45-33 | Unitary |
| – الإحداث (الخلق) / الفناء (الإفناء) | -307-305-303-94-88 | |
| | 319-311-308 | |
| – الاستبدال | 295-286-178 | Exchange |

| | | |
|---|---|---|
| - الانسحاب | 283-264-105 | Translation |
| - التطور | 44 | |
| - التناظر | 288-287 | |
| - الدوران | 158-119-105 | |
| - السوية | 459-431-423-110 | |
| - الكثافة | 40 | |
| - عدد الجسيمات | 314-305-303 | |
| مقطع فعال | 361-351 | Cross Section |
| مناقلة | 294 | Transposition |
| منظر | 293 | Symmetrizer |
| - مضاد | 293 | Anti - |
| مولد | -453-451-426-152-105 458 | Generator |
| - (الزمرة) | 449 | |
| ناشر (فاينمان) | 369 | Propagator |
| نصف قطر بور | 136 | |
| نظمة (تامة) | 20 | System |
| نظيم | -238-225-57-37-20-17 273-252 | Norm |
| - التطبيق الخطي | 250-229 | |
| منظم | 233-226-37 | Normed |
| نواة | | Kernel |
| - التكامل | 348-49 | |
| - التطبيق | 263-243 | |
| هاميلتوني | 23 | |
| هليوم | | |
| - جانبي | 337 | Parahelium |
| - صحيح | 337 | Orthohelium |
| وسيط التصادم | 362-353-350 | |

| | | |
|---|---|---|
| - الانسحاب | 283-264-105<br>44 | Translation |
| - التطور | 288-287 | |
| - التناظر | 158-119-105 | |
| - الدوران | 459-431-423-110 | |
| - السوية | 40 | |
| - الكثافة | 314-305-303 | |
| - عدد الجسيمات | 361-351 | |
| مقطع فعال | 294 | Cross Section |
| مناقلة | 293 | Transposition |
| منظر | 293 | Symmetrizer |
| - مضاد | | Anti - |
| مولد | -453-451-426-152-105<br>458<br>449 | Generator |
| - (الزمرة) | 369 | |
| ناشر (فاينمان) | 136 | Propagator |
| نصف قطر بور | 20 | |
| نظمة (تامة) | -238-225-57-37-20-17 | System |
| نظيم | 273-252 | Norm |
| - التطبيق الخطي | 250-229 | |
| منظم | 233-226-37 | Normed |
| نواة | | Kernel |
| - التكامل | 348-49 | |
| - التطبيق | 263-243 | |
| هاميلتوني | 23 | |
| هليوم | | |
| - جانبي | 337 | Parahelium |
| - صحيح | 337 | Orthohelium |
| وسيط التصادم | 362-353-350 | |

# أسماء العلم

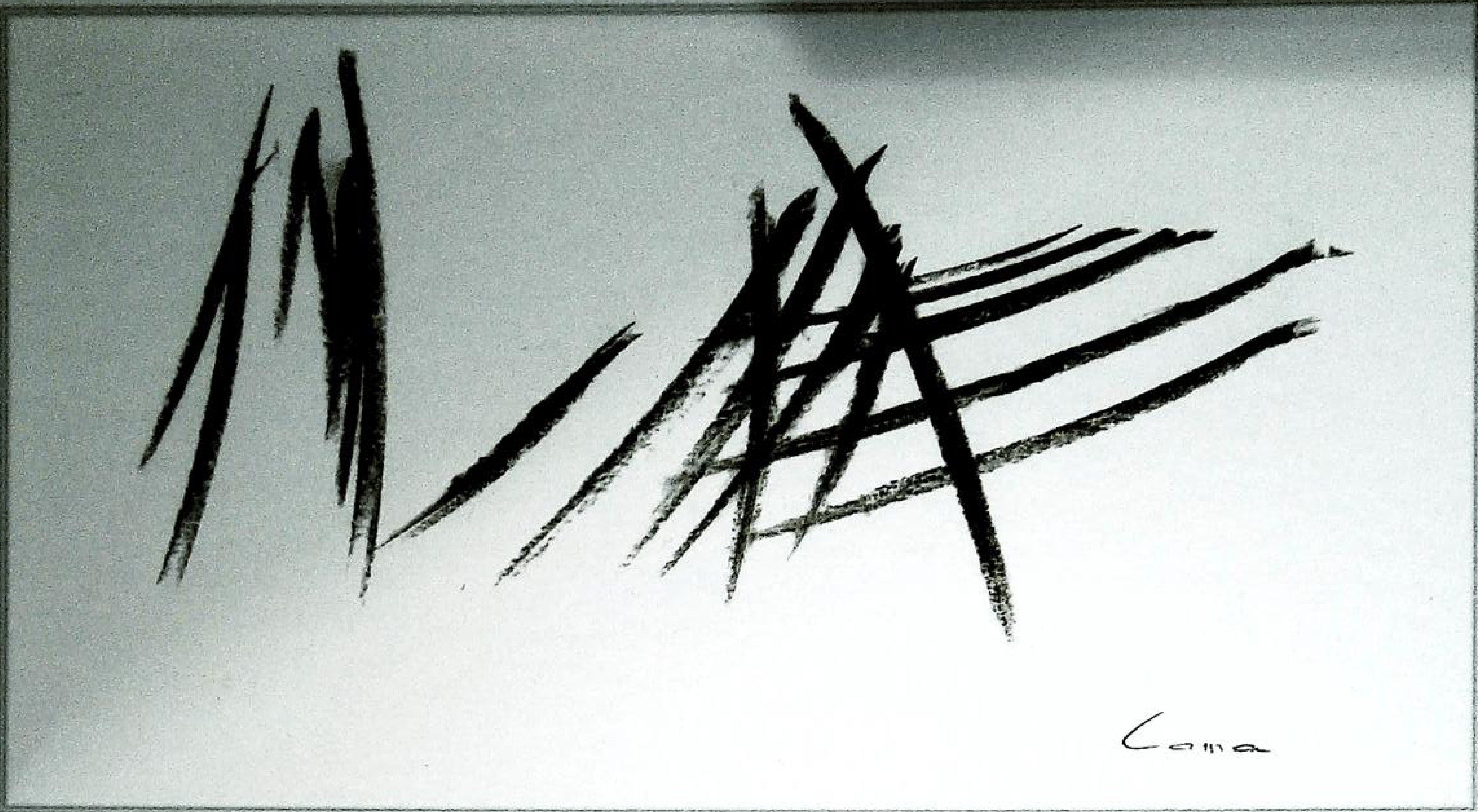

| | | |
|---|---|---|
| Abbe | 70 | آبه |
| Banach | 228-226 | باناخ |
| Bessel | 359-238-236-129-128 | بسل |
| Bohr | 330-142-136-135-18-15-4 | بور |
| Sommerfeld | 330 | - سومرفلد |
| Born | 373-370-367-48-4 | بورن |
| Bose | 289 | بوز |
| Bruhat | 69 | بروها |
| Cantor | 223 | كانتور |
| Cauchy | 277-223 | كوشي |
| - Schwarz | 218-42 | - شفارتز |
| Clifford | 407 | كليفورد |
| Compton | 398 | كونتن |
| De Broglie | 86-26 | دوبروي |
| Dirac | -281-271-270-264-59-38-4 404-399-342 | ديراك |
| Ehrenfest | 321-65 | إرنفست |
| Einstein | 289-39-25-18 | آنشتاين |
| - Podolsky-Rosen | 18 | - بودولسكي – روزن |
| Fermat | 52 | فيرما |
| Fermi | 289-205 | فيرمي |
| Feynman | -368-347-320-191-54-48 417-398-394-369 | فاينمان |
| - Hebbs | 49 | - هيبس |
| Fock | 345-342 | فوك |
| Foldy-Wouthuysen | 422 | فولدي – وتيوزن |
| Fourier | 263-237-236-96-69-65-62 | فورييه |
| Fubini | 280 | فوبيني |
| Gauss | 139-69-63-5 | غاوص |
| Gordon | | غوردن (انظر Klein) |
| Hankel | 359 | هانكل |

| | | |
|---|---|---|
| Hartree | 348-346-342 | هارتري |
| Hausdorff | 234 | هاوسدورف |
| Heaviside | 402-274 | هيفيسايد |
| Heisenberg | 389-321-208-82-48-46-4 | هايزنبرغ |
| Hermite | 336-174-137-93-90 | هيرميت |
| Hilbert | 288-107-57-17 | هيلبرت |
| Hölder | 222-220 | هولدر |
| Huyghens | 48 | هويغنز |
| Jordan | 48 | جوردان |
| Klein-Gordon | 399-397 | كلاين – غوردن |
| Laguerre | 137 | لاكير |
| Lamb-Rutherford | 440 | لامب – روذرفورد |
| Landé | 196-145 | لاندي |
| Landau-Lifchitz | 432-329-140 | لاندو – ليفشيتز |
| Lebesgue | 219-217 | لوبيغ |
| Legendre | 117-116 | لوجاندر |
| Lippman-Schwinger | 386-384 | ليبمان – شفينغر |
| Lipschitz | 226 | ليبشيتس |
| Maupertius | 52 | موبيرتيوس |
| Messiah | 140 | ميسيا |
| Minkowsky | 222-220 | مينكوفسكي |
| Parseval | 237 | بارسفال |
| Planck | 397-332-89-25-4-3 | بلانك |
| Plancherel | 283-279 | بلانشريل |
| Paschen-Back | 197 | باشن – باك |
| Pauli | -409-380-289-151-135-4<br>429-421-420-410 | باولي |
| Poynting | 212 | بوينتينغ |
| Riemann | 148 | ريمان |
| - Stieltjes | 256-217 | – ستيلتجيس |
| Riesz | 270-244 | ريتس |
| Rutherford | 359-354-349 | روذرفورد |
| Rydberg | 336-135-134 | ريدبرغ |
| Schrödinger | 48-46-41-26-23-4 | شرودينغر |
| Schwartz | 271 | شوارتز |

| | | |
|---|---|---|
| Sobolev | 271 | سوبولوف |
| Stark | 183 | شتارك |
| Stern-Gerlach | 143 | شتيرن - غيرلاش |
| Thomas | 430 -375 | توماس |
| Von Neumann | 41-4 | فون نويمان |
| Weierstrass | 234 | فايرشتراس |
| Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) | 329 | فينتزل-كرامر-بريللوان |
| Yang-Mills | 16 | يانغ - ميلز |
| Young | 10-5 | يونغ |
| Zeeman | 197-194-188 | زيمان |

طوب بريس

العنوان، رقم 22، زنقة كلكوتة، المحيط، الرباط
الهاتف، 21 31 73 37 05 (212+) - الفاكس ، 28 39 26 37 05 (212+)
الموقع الإلكتروني، www.toppress.ma
البريد الإلكتروني، toppress2@gmail.com



## أ. د. محمد البغدادي

- أستاذ الفيزياء النظرية
- مؤسس ومدير مختبر الفيزياء النظرية في جامعة محمد الخامس بالرباط (1972-1998)
- عضو أكاديمية العلوم للعالم الثالث - TWAS - 1987.
- درس الرياضيات والفيزياء في جامعات مختلفة، وباللغة العربية على وجه الخصوص في جامعة دمشق والمدرسة العليا للأساتذة بالرباط.
- ألف كتب دراسات عليا بالفرنسية: النظريات الكمومية النسبوية، الرياضيات - الفيزياء (بجزئين) بدعم من وزارة التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي بالمغرب.
- ترجم إلى العربية:

* كتاب كارل بوبر: «منطق البحث العلمي»، عن الألمانية.

* كتاب رشدي راشد: «الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام»، عن الإنجليزية.

* كتاب رشدي راشد «من الخوارزمي إلى ديكارت»، عن الفرنسية، قيد الإنجاز.

الثمن: 400 درهم